〔美国〕奇·特里格编

数学450题解

上 册

郑元禄 译

福建省泉州市第五中学

〔美国〕奇·特里格编

数学450题解

郑元禄 译

福建省泉州市第五中学

译 者 的 话

本书译自美国奇·特里格编的《数学机敏》一书。原书收集中等程度的数学习题393个及解答。这些习题是从《美国数学月刊》等五种杂志近四十年来几千题中选出来的，其中多数习题有一定的思考性、综合性和趣味性，解法具有启发性和技巧性，对于提高读者学习数学的兴趣，培养分析问题和解决问题的能力有所帮助。译者删去原书中的少数不合适的习题，又补充了一些其它习题，这样，本书正文一共收集450题及解答。为了参考方便，译者把全部习题分类编排。

本书分上、下册。上册是代数学题解，下册是平面几何、立体几何、解析几何、三角学题解和两个附录。附录一补充正文用到的一些知识，附录二收集趣味性习题300个和答案与提示。附录二是译者增加的。

本书的刊印和内部发行工作，得到我校领导同志和总务处许多同志的大力支持和帮助。老教师林仁荣老师提供外文原本，他和许秉瑢老师对译稿提出了宝贵意见。福建省图书馆、中国科学院数学研究所情报资料室和重庆市2104信箱给译者许多帮助。晋江地区教师进修学院语文组林宝章和福州师范专科学校数学

组何履端两位老师关心本书的印刷和发行工作。本书的大部分插图由泉州喷雾器厂技术员李玉荣同志绘制。郑丽影同志协助抄写译稿。本书的印刷得到晋江地区印刷厂的领导同志和工人师傅们的热情支持和帮助。译者一并在此向他们表示深切的感谢！

由于译者水平限制，本书难免有缺点错误，希望读者批评指正。

郑元禄

1979年5月于泉州五中

目　　录

目　　录

第一章　代数学

第一节　实　数

1．证明：在n为任意整数时，表达式（n^5-n）可被30整除。

证　一个整数和它的5次幂总是以同一数字为末位数。因此，值n^5-n以0为末位数，于是可被2和5整除。其次把它分解成因数（$n-1$）n（$n+1$）（n^2+1），注意，前三个因数之一必定可被3整除。因此，n^5-n可被$2\times3\times5$整除。

2．若正数n不是2的倍数，也不是5的倍数，则n必能整除一个各位都是1的数（例如3整除111，7整除111111）。

证　数1，11，111，…，$\overbrace{111\cdots11}^{n+1个}$被$n$除时，若其中有被$n$除尽者，则问题得证。否则其中必有两数$\overbrace{111\cdots11}^{k}$和$\overbrace{111\cdots11}^{m}$的余数相同（设$k>m$），则$\overbrace{111\cdots11}^{k}-\overbrace{111\cdots11}^{m}$将被$n$除尽，即$\overbrace{111\cdots11}^{k-m}\ \overbrace{00\cdots0}^{m}$被$n$除尽，但$n$不是2和5的倍数，故$n$整除$\overbrace{111\cdots11}^{k-m}$。

3．证明：若三个相邻整数的中间一个是完全平方，则它们之积一定能被504整除。

证　设三个连续整数是n^3-1，n^3，n^3+1（n是任意

整数）。它们之乘积$f(n)=n^3(n^3-1)(n^3+1)$。

a. $f(n)=n^3(n^6-1)$。因n^6-1可被7整除，故$f(n)$可被7整除。

b. 若n是偶数，则n^3可被8整除；若n是奇数，则易证n^3-1可被8整除，于是$f(n)=n^3(n^2-1)(n^4+n^2+1)$也可被8整除。不论哪一情形，$f(n)$总可被8整除。

c. $f(n)=(n-1)n(n+1)n^2(n^4+n^2+1)$。因$(n-1)n(n+1)$是三个相邻整数之积，故可被3整除。又当$n=3m$时，$n^2$可被3整除。当$n=3m\pm1$时，易证$n^4+n^2+1$可被3整除。于是$f(n)$可被9整除。

$f(n)$可被7，8，9三数整除，而此三数互质，故$f(n)$可被$7\times8\times9=504$整除。

4．假设$a-1$和$a+1$是大于10的素数（这对素数称为孪生素数）。证明：a^3-4a可被120整除。

证 我们来证明一个更强的结果。为此注意，数$(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$是五个连续整数的乘积，从而其中一个可被3整除，一个可被5整除。如果$a-1$和$a+1$是素数，那么$a-2$，a，$a+2$是连续偶数，从而其中至少有一个可被4整除，其余两个可被2整除。因此，与大于5的孪生素数相邻的三个整数之积可被$3\times5\times4\times2\times2$整除。换句话说，$a^3-4a$可被240整除。实际上，如果a是一个奇数的2倍，例如42，那么a^3-4a可被480整除。在最后这一情形，孪生素数具有形式$6k-1$和$6k+1$，其中k是奇数。

5．证明：从不超过100的正整数中任取51个，其中必有一个是另一个的倍数。

证 设这51个数是a_1，a_2，…，a_{51}，每个a_i均可写作$a_i=2^{k_i}t_i$的形式，其中k_i是正整数或0，t_i是奇数。因总共

只有50个奇数，故t_1，t_2，…，t_{51}中必有重复，设第i个与第j个重复（$i\neq j$），即

$t_i=t_j=t$，$a_i=2^{k_i}t$，$a_j=2^{k_j}t$，$a_i\neq a_j$，所以$k_i\neq k_j$，如果$k_i>k_j$，则a_i是a_j的倍数。

6．证明：大于$(\sqrt{3}+1)^{2m}$的最小整数可被2^{m+1}整除。

证 考虑表达式$I=(\sqrt{3}+1)^{2m}+(\sqrt{3}-1)^{2m}$，显然此式是个整数。因为$(\sqrt{3}-1)^{2m}<1$，I与大于$(\sqrt{3}+1)^{2m}$的最小整数相等。

其次，
$$\begin{aligned}I&=(4+2\sqrt{3})^m+(4-2\sqrt{3})^m\\&=2^m[(2+\sqrt{3})^m+(2-\sqrt{3})^m]\\&=2^{m+1}\left[2^m+2^{m-2}\times\frac{3m(m-1)}{2}+\cdots\right]。\end{aligned}$$

7．设P是大于3的质数。证明：对于任意整数a，a^P-a是6P的倍数。

证 由费尔马定理知$a^P\equiv a\pmod P$，即a^P-a是P的倍数。又因$P>3$，P是奇质数，故可为$P-1=2K$，K是正整数。因此

$a^P-a=a(a^{P-1}-1)=a(a^2-1)(a^{2(k-1)}+a^{2(k-2)}+\cdots+a^2+1)$，$a(a^2-1)$为3个连续的数之积，故为6的倍数，因之$a^P-a$为6之倍数。由$P>3$得$(P,6)=1$。因此$a^P-a$为6P的倍数。

8．设a_1，a_2，…，a_n为n个整数（不论有无相等）。证明：必能在其中取出若干个如a_i，a_{i+1}，…，a_j（$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$），使$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j$为n的倍数。

证 在n+1个数0，a_1，a_1+a_2，…，$a_1+a_2+\cdots a_n$中，

必有对n同余者（即用n除时所得<n的非负余数相同）。取如此二者相减，即得一形如$a_j+a_{j+1}+\cdots+a_i$之数，为n之倍数。

9．证明：数$2^{5n+1}+5^{n+2}$当$n=0，1，2\cdots$时可被27整除。

证 为了证明只需注意$2^{5n+1}+5^{n+2}=2(27+5)^n+5^n(27-2)=27k$。

10．证明：数3^k不能表示为两个正整数的平方和。

证 不失一般性，可以认为，k等于使$x^2+y^2=3^k$成立的最小整数，并且从问题条件推出，$k>0$。于是x^2+y^2可被3整除，从而推出x和y应被3整除。就是说，$x=3m$，$y=3n$，$(3m)^2+(3n)^2=3^k$。但这时$m^2+n^2=3^{k-2}$，这与数k的最小性矛盾。

11．设a，m，n是正整数，n是奇数。证明：数a^n-1和a^m+1的最大公因数不大于2。

证 设d是数a^n-1和a^m+1的最大公因数。于是在k和r为某些整数时，等式$a^n=kd+1$，$a^m=rd-1$成立。因此，对于某一整数t，$a^{mn}=(a^n)^m=(kd+1)^m=td+1$，并且对于某一整数u（记住，n是奇数），$a^{mn}=(a^m)^n=(rd-1)^n=ud-1$。

因此，$td+1=ud-1$，或者$(u-t)d=2$。由此推出$d=1$或$d=2$。

12．试求一个数，使数1108，1453，1844，2281被它除时有相同的余数。

解 因余数不变，故除数一定是奇数。其次，$1453-1108=345$，$1844-1453=391$，$2281-1844=437$。现在注意，$437-391=391-345=46=2\times23$。因为关系式（$N_1d$

$+r)-(N_2d+r)=d(N_1-N_2)$总是正确的，所以要求的数等于23，相应的余数等于4。

13．设$\overline{abc}=100a+10b+c$。试求一个九位数，使它的所有数字都不相同且不含零，它的平方根具有$\overline{ab}\overline{abc}$的形式，其中$\overline{ab}=c^3$。

解 数字c只能与3或4相同。但是数64644^2是十位数。因此，本题的唯一解是$27273^2=743816529$。

这个解甚至在抛弃限制$\overline{ab}=c^3$的情况也是唯一的。此外，$27273=3\times9091$，而9091是由九个不重复非零数字组成的任一平方数的最大素数因数。

14．试求出两个数，使它们的差与商都等于5。

解 因为两个数的商等于5，所以它们之差中，较大的数比较小的数大4倍。因此，较小的数等于$\frac{5}{4}$，较大的数等于$\frac{25}{4}$。一般说来，如果$x-y=\frac{x}{y}=a$，那么$x=\frac{a^2}{a-1}$，$y=\frac{a}{a-1}$。

15．取一个以任意进位制写成的数，并把它的数字以任意的方式重新排列。证明：这两个数之差可被比这进位制的底数小1的数整除。

证 如果进位制的底数等于b，那么这个数可写成

$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i b^{n-i}$。以$a_{ip}$表示重新排列后在位置$a_i$上的数字。于是两个数之差可以写成下式：

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b^{n-i}-\sum_{i=0}^{n} a_{ip} b^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}(a_i-a_{ip})b^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(a_i-a_{ip})(b^{n-i}-1)+\sum_{i=0}^{n}(a_i-a_{ip})。$$

最后的被加数等于0，可以用归纳法证明，当所有的 $i=0, 1, \cdots, n$ 时，$(b^{n-i}-1)$ 可被 $(b-1)$ 整除。

16. 在哪一种进位制中，数35与53是互质的？

解 以 (x, y) 表示数x和y的最大公因数。于是 $(35, 53)=(35, 23)=(12, 23)=(12, 11)=(1, 11)=1$。因此，在任何底数大于8的进位制中，35与53是互质的。

17. 是否存在这样的5个连续整数，使得前四个数的四次幂之和等于第五个数的四次幂？

解 可以把任一偶数的四次幂表示为 $4k$，把任一奇数的四次幂表示为 $4k+1$。因此，任意四个连续整数的四次幂之和具有 $4k+2$ 的形式，显然不能等于一个整数的四次幂。

18. 设a, b, c是互质的整数，令 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$。证明：数 $(a+b)$，$(a-c)$ 和 $(b-c)$ 是完全平方数。

证 如果 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$，那么 $a+b=\frac{ab}{c}$。因为a和b是整数，所以c可以分解为乘积，例如 $c=qr$，其中一个因数可以整除a，另一个可整除b，于是 $a=mq$，$b=pr$。因此 $mq+pr=mpqr\div qr=mp$。因三个数a，b，c互质，故m与r互质（即它整除p），p与q互质（即它整除m）。因此 $m=p$，从而 $p(q+r)=p^2$，$q+r=p$。由此得 $a+b=pq+pr=p\times(q+r)=p^2$，$a-c=pq-qr=q(p-r)=q^2$，$b-c=pr-qr=r(p-q)=r^2$。

19. 证明：不存在这样的三个连续奇数，使得其中每个数是两个非零平方数之和。

证 每个整数可用下列形式之一表示：$4k$，$4k+1$，

$4k+2$，$4k+3$。因此，整数的平方可表示为$4k$或$4k+1$，两个这样的平方数之和有$4k$或$4k+1$或$4k+2$的形式。任一奇数有$4k+1$或$4k+3$的形式；因此，不但在三个甚至在两个连续奇数之间，一定有一个数不能表示为两个平方数之和的形式。

20．某数N是三个素数之积，这三个素数的平方和等于2331。存在7560个小于N而且与N互质的数（包括1）。N的所有因数（包括1和本身）的和等于10560。求N。

解 设$N=pqr$。那么$p^2+q^2+r^2=2331$，就是说，每个素数小于$(2331)^{\frac{1}{2}}<49$，所有这三个素数都是奇数。

N的所有因数之和等于$(1+p)(1+q)(1+r)=10560=11\times960$。不大于49且比某个素数大1的11的唯一倍数等于44，因此$r=43$。所以$p^2+q^2=482$，这两个数的每一个小于$(482)^{\frac{1}{2}}<22$。其次注意，奇数的平方只能以1，5或9作为末位数，因而p^2和q^2以1为末位数。因此，$p=11$，$q=19$，$N=11\times19\times43=8987$。

21．证明：存在无穷多个素数。

证 假设存在一个最大的素数p。考虑一个比小于或等于p的所有素数乘积大1的数，即$Q=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots\cdots p+1$。现在注意，Q不能被上面所写的乘积中的任一素数整除（因为Q被这些素数中任一个除时余数为1）。因此，或能Q本身是素数，或者如果它是合数，可分解为每个大于p的素因子的乘积。在任一场合下，存在一个比p大的素数。就是说在素数中没有最大的素数。

22．证明：含整数边长的直角三角形的两条直角边的长度不能用孪生素数表示。

证 设p和$p+2$是这样的两个孪生素数，使$p^2+(p+$

$+2)^2=k^2$，其中k是整数。于是$2p^2+4p+4=k^2$。但是由此推出，k^2即k是偶数。设$k=2n$，那么上述关系式可改写为$2p^2+4p+4=4n^2$或$p^2+2p+2=2n^2$。此式左边是奇数，因p是奇数，右边是偶数。因此，这个等式是矛盾的。

23．设p_1和p_2是两个连续的奇素数，从而$p_1+p_2=2q$。证明：q是一个合数。

证　数$q=\frac{p_1+p_2}{2}$是数p_1和p_2的算术平均数；因而$p_1<q<p_2$。但p_1和p_2是连续的素数；因此，q是一个合数。

24．求出数1000027的素数因数。

解　$1000027=(100)^3+(3)^3=(100+3)(10000-300+9)=103\times9709=103\times7\times1387=103\times7\times(1460-73)=103\times7\times73\times19$。

25．在十进制中借助于（$6k-1$）个1写成的自然数能不能是素数？

解　在十进制中借助于（$6k-1$）个1写成的自然数可以是素数。例如，已知$\frac{10^{23}-1}{9}$可用23个1写成，它是一个素数。

用$q=6k-1$个1写成的任意一个数可以表示为$\frac{10^q-1}{9}$的形式。因为$6k-1$不能被9整除，所以数$\frac{10^q-1}{9}$的所有素因子应当是数10^q-1的因子。大家知道，如果q是合数，那么$\frac{10^q-1}{9}$也是合数。因此，如果数$\frac{10^q-1}{9}$是素数，那么q也是素数。此外，从费尔马定理推出，数$\frac{10^q-1}{9}$的任一素因子

p一定可表示为$2kq+1$的形式，其中k是整数。

其次，如果$p=2q+1$是素数，q也是素数，且$p\neq5$，那么从欧拉一个结果的推广可以得到，$p=2q+1$是数$\frac{10^p-1}{9}$的因子。

26．设n是大于3的自然数。证明：存在两个这样的奇素数p_1和p_2，使得$2n-p_1$可被p_2整除（不排除$2n-p_1<0$的情形）。

证I．可以证明更强一些的断言。原来，对于任意自然数n，存在两个奇素数p_1和p_2，使$n-p_1$可被p_2整除。实际上，取任一自然数n。其次取一个奇素数p_1，使$n-p_1$不具有$2^\alpha p_1^\beta$的形式。然后把数$n-p_1$分解成素因数。在这个分解中包含某一奇素数p_2。例如$1=11-5\times2$，$2=7-5$，$3=13-5\times2$，$4=11-7$，$5=11-3\times2$等等。

证II．从等差数列中著名的狄利克来素数定理可推出强得多的断言。设p_2是不能整除n的任一奇素数。定理保证，在等差数列$2n+kp_2$（其中$k=1，2，\cdots$）中，包含无限多个素数项。设p_1是这类项之一。于是$2n-p_1$可被p_2整除。

27．证明：数$(p_1p_2\cdots p_n+1)^{2^k}-1$至少有$n+k$个不同的素因数，其中$p_1$，$p_2$，…，$p_n$是前$n$个奇素数。

证 设$N=(p_1p_2p_3\cdots p_n+1)^{2^k}-1$。于是，因为$a^{2^k}-1=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^{2^2}+1)\cdots(a^{2^{k-1}}+1)$，所以

$N=(p_1p_2\cdots p_n)[(p_1p_2\cdots p_n+1)+1][(p_1p_2\cdots p_n+1)^2+1]\cdots[(p_1p_2\cdots p_n+1)^{2^{k-1}}+1]$。其次以$N_r$表

示$(p_1p_2\cdots p_n+1)^r+1$。因$(b+1)^r=\sum\limits_{j=0}^{r} c_r^j b^{r-j}$，故

$$N_r=\sum_{j=0}^{r-1} c_r^j(p_1p_2\cdots p_n)^{r-j}+2$$。由于$p_i(i=1,2,\cdots,n)$可整除$\sum\limits_{j=0}^{r-1} c_r^j(p_1p_2\cdots p_n)^{r-j}$而不可整除2，所以数$N_r$不能被$p_i$整除。因此，$N_r$至少应当包含一个不同于$p_1,p_2,\cdots,p_n$的素因数$p_r$。因$N_r$是奇数，故数$p_r\neq 2$。现在考虑$M=N_{2^{t+s}}+N_{2^t}$，其中$t\geqslant 0$，$S\geqslant 1$。注意

$$M=(p_1p_2\cdots p_n+1)^{2^{t+s}}+(p_1p_2\cdots p_n+1)^{2^t}+2$$

$$=(p_1p_2\cdots p_n+1)^{2^t}\left\{(p_1p_2\cdots p_n+1)^{(2^s-1)2^t}+1\right\}+2。$$

把此式分解因数，得

$$M=(p_1p_2\cdots p_n+1)^{2^t}\left\{\left[(p_1p_2\cdots p_n+1)^{2^t}+1\right]\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{i=2}^{2^s}(-1)^i(p_1p_2\cdots p_n+1)^{(i-2)2^t}\right]\right\}+2$$

$$=(p_1p_2\cdots p_n+1)^{2^t}N_{2^t}\left[\sum_{i=2}^{2^s}(-1)^i(p_1p_2\cdots p_n+1)^{(i-2)2^t}\right]+2。$$

其次，存在数N_{2^t}的不同于$p_1,p_2,\cdots,p_n$的素因数P_{2^t}。因此，M不能被P_{2^t}整除，即$N_{2^{t+s}}$不能被p_{2^t}整除。于是，在每个s（相应地，t）等于0，1，…，k-1时，数N_{2^s}（相应地，N_{2^t}）有不同于所有p的素因数P_{2^s}（相应地P_{2^t}）。