# 幾何原本

四

# 幾何原本

(四)

利瑪竇口譯
徐光啓筆受

叢書集成初編

（補印本）

# 幾何原本

四冊

一九三九年十二月初版

一九六〇年一月補印

利瑪竇口譯

徐光啓筆受

商務印書館出版

上海虹口印刷廠印刷

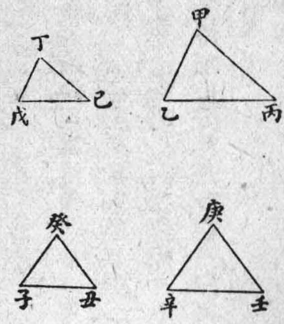
# 幾何原本第六卷之首

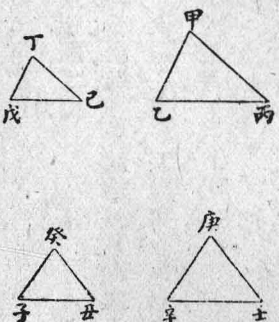
界說六則

第一界

凡形相當之各角等。而各等角旁兩線之比例。俱等。爲相似之形。

甲乙丙、丁戊己兩角形之甲角、與丁角等。乙與戊、丙與己、各等。其甲角旁之甲乙、與甲丙、兩線之比例。若丁角旁之丁戊與丁己兩線。而甲乙與乙丙。若丁戊與戊己。甲丙與丙乙。若丁己與己戊。則此兩角形、爲相似之形。依顯凡平邊形、皆相似之形。如庚辛壬、癸子丑、俱平邊角形。其各角俱等。而各邊之比例亦等者、是也。四邊、五邊、以上諸形。俱倣此。

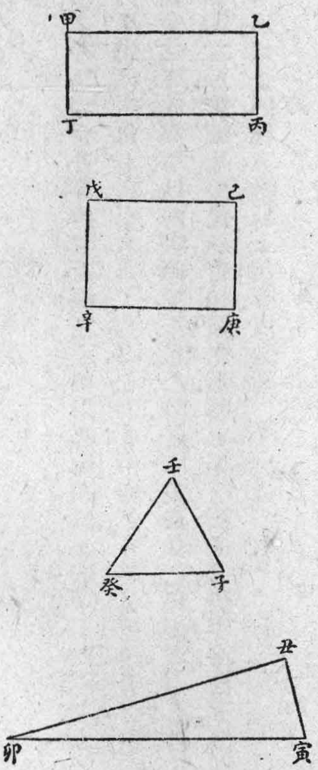


第二界

兩形之各兩邊線。互爲前後率。相與爲比例而等。爲互相視之形。

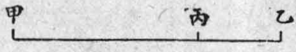
甲乙丙丁、戊己庚辛、兩方形。其甲乙、乙丙、邊與戊己、己庚、邊相與爲比例等。而彼此互爲前後。如甲乙與戊己。若己庚與乙丙也。則此兩形爲互相視之形。依顯壬癸子、丑寅卯、兩角形之壬子與丑寅。若丑卯與壬癸。或壬癸與丑寅。若丑卯與壬子。亦互相視之形也。




第三界

理分中末線者。一線兩分之。其全與大分之比例。若大分與小分之比例。

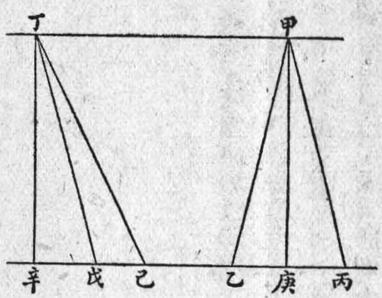
甲乙線。兩分之于丙。而甲乙與大分甲丙之比例。若大分甲丙與小分丙乙。此爲理分中末線。其分法。見本卷三十題。而與二卷十一題理同名異。此線爲用甚廣。至量體尤所必須。十三卷諸題多賴之。古人目爲神分線也。




第四界

度各形之高。皆以垂線之亘爲度。

甲乙丙角形。從甲頂、向乙丙底。作甲庚垂線。卽甲庚爲甲乙丙之高。又丁戊己角形。作丁辛垂線。卽丁辛爲丁戊己之高。若兩形相視。兩垂線等。卽兩形之高、必等。如上兩形在兩平行線之內者是也。若以丙己爲頂。以甲乙、丁戊爲底。則不等。自餘諸形之度高。俱倣此。

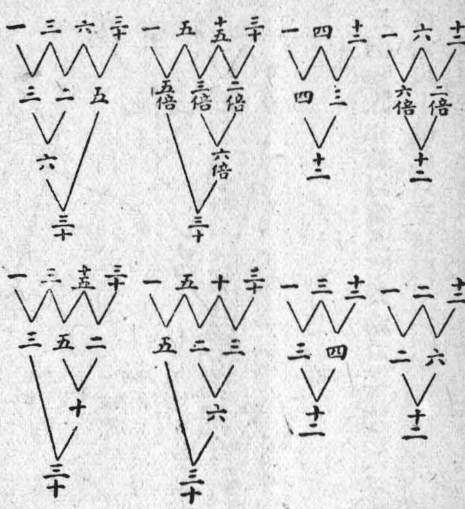



凡度物高以頂底爲界。以垂線爲度。蓋物之定度。止有一。不得有二。自頂至底。垂線一而已。偏線無數也。

第五界

比例以比例相結者。以多比例之命數、相乘、除、而結爲一比例之命數。

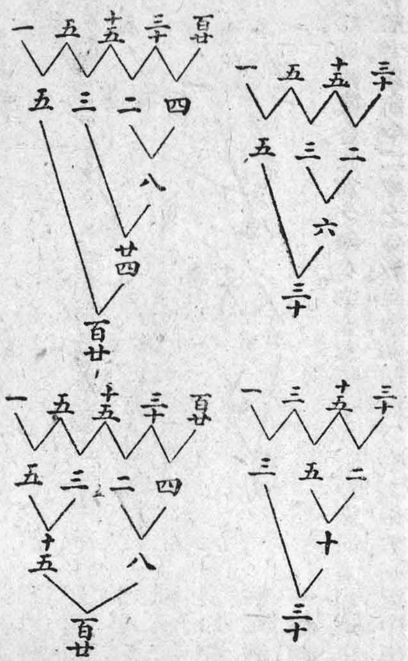
此各比例、不同理、而相聚爲一比例者。則用相結之法。合各比例之命數。求首尾一比例之命數也。曷爲比例之命數。謂大幾何所倍於小幾何若干。或小幾何、在大幾何內若干也。如大幾何、四倍於小。或




小幾何爲大四分之一。卽各以四爲命比例之數也。五卷界說三今言以彼多比例之命數、相乘除而結爲此一比例之命數者。如十二倍之此比例。則以彼二倍、六倍兩比例相結也。二六相乘爲十二、故也。或以彼三倍、四倍兩比例相結也。三四相乘亦十二、故也。又如三十倍之此比例。則以彼二倍、三倍、五倍、三比例相結也。二乘三爲六、六乘五爲三十、故也。其曰相結者。相結之理。蓋在中率。凡中率爲前比例之後。後比例之前。故以二比例合爲一比例。則中率爲輳合之因。如兩𠬞合。此爲之膠。如兩襟合。此爲之紐矣。第五卷第十界、言數幾何爲同理之比例。則第一與第三、爲再加之比例。再加者。以前中二率之命數。再加爲前後二率之命數。亦以中率爲紐也。但彼所言者。多比例同理。故止以第一比例之命數累加之。此題所言。則不同理之多比例。不得以第一比例之命數累加之。故用此乘除相結之理。于不同理之中。求其同理。別爲累加之法。其紐結之義。頗相類焉。下文仍發明借象

之術、以需後用也。

五卷言多比例同理者。第一與第三爲再加。與第四爲三加。與第五爲四加。以至無窮。今此相結之理。




亦以三率爲始。三率則兩比例相乘除、而中率爲紐也。若四率。則先以前三率之兩比例、相乘除、而結爲一比例。復以此初結之比例、與第三比例乘除、相結爲一比例也。若五率。則先以前三率之兩比例、乘除相結。復以此再結之比例、與第三比例、乘除相結。又以三結之比例、與第四比例、乘除相結、爲一比例也。或以第一第二第三率之兩比例、乘除相結。以第三第四第五之兩比例、乘除相結。又以此二所結比例、乘除相結、而爲一比例也。自六以上。倣此以至無窮。

設三幾何、爲二比例、不同理、而合爲一比例。則以第一與二、第二與三、兩比例相結也。如上圖。三幾何、


二比例。皆以大不等者。其甲乙與丙丁、爲二倍大。丙丁與戊己、爲三倍大。則甲乙與戊己、爲六倍大。二乘三爲六也。若以小不等。戊己爲第一。甲乙爲第三。三乘二亦六。則戊己與甲乙、爲反六倍大也。

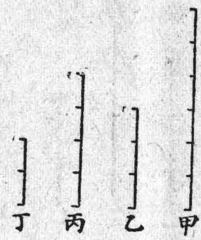
甲乙與丙丁。既二倍大。試以甲乙二平分之。爲甲庚、庚乙。必各與丙丁等。丙丁與戊己。既三倍大。而甲庚、庚乙各與丙丁等。卽甲庚亦三倍大于戊己。庚乙亦三倍大於戊己。而甲乙必六倍大於戊己。


又如上圖。三幾何二比例。前以大不等。後以小不等者。中率小于前後兩率也。其甲乙與丙丁、爲三倍大。丙丁與戊己、爲反二倍大。反二倍大者。丙丁得戊己之半。卽甲乙與戊己、爲等帶半。三乘半得等帶半也。若以戊己爲第一。甲乙爲第三。反推之。半除三。爲反等帶半也。

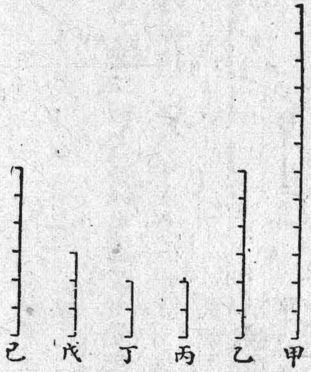

又如上圖。三幾何、二比例。前以小不等。後以大不等者。中率大於前後二率也。其甲乙與丙丁、爲反二倍大。甲乙得丙丁之半。丙丁與戊己、爲等帶三分之一。卽甲乙與戊己、爲反等帶半。甲乙得戊己三分之二。何者。如甲乙二。卽丙丁當四。丙丁四。卽戊己當三。是甲乙二。戊己當三也。

後增。其乘除之法。則以命數三帶得數一。爲四。以半除之得二。二比三、爲反等帶半也。若以戊己爲第

一甲乙爲第三三比二、爲等帶半也。




設四幾何、爲三比例、不同理、而合爲一比例。則以第一與二、第二與三、第三與四、三比例相結也如上圖甲、乙、丙、丁、四幾何、三比例。先依上論。以甲與乙、乙與丙、二比例、相結。爲甲與丙之比例。次以甲與丙、丙與丁、相結。卽得甲與丁之比例也如是遞結。可至無窮也。




或用此圖、申明本題之旨曰。甲與乙之命數爲丁。乙與丙之命數爲戊。卽甲與丙之命數爲己。何者。三命數、以一丁、二戊、相乘得三己。卽三比例、以一甲與乙、二乙與丙、相乘得三甲與丙、

後增若多幾何、各帶分、而多寡不等者。當用通分法。如設前比例、爲反五倍帶三之二。後比例、爲二倍大帶八之一。卽以前命數三、通其五倍、爲十五得分數從之、爲十七。是前比例爲三與十七也以後命數八、通其二倍、爲十六。得分數從之、爲十七。是後比例爲十七與八也。卽首尾二幾何之比例。爲三與八得

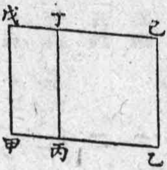
二倍大帶三之二也.

曷謂借象之術.如上所說、三幾何、二比例者.皆以中率爲前比例之後.後比例之前.乘除相結.略如連比例之同用一中率也.而不同理.別有二比例異中率者.是不同理之斷比例也.無法可以相結.當于其所設幾何之外.別立三幾何、二比例.而同中率者.乘除相結.作爲儀式.以彼異中率之四幾何、二比例.依倣求之.即得.故謂之借象術也.假如所設幾何.十六爲首.十二爲尾.却云十六與十二之比例.若八與三、及二與四之比例.八爲前比例之前.四爲後比例之後.三與二、爲前之後.後之前.此所謂異中率也.欲以此二比例、乘除相結.無法可通矣.用是別立三幾何、二比例.如其八與三、二與四之比例.而務令同中率.如三其八、得二十四.爲前比例之前.三其三、得九.爲前比例之後.即以九爲後比例之前.又求九與何數爲比例、若二與四.得十八.爲後比例之後.其二十四與九.若八與三也.九與十八.若二與四也.則十六與十二.若二十四與十八.俱爲等帶半之比例矣.是用借象之術.變異中率爲同中率.乘除相結.而合二比例爲一比例也.其三比例以上.亦如上方所說.展轉借象.遞結之. 詳見本卷二十三題.算家所用借象金法、雙金法.俱本此.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 十六 | 八 | 廿四 | 十六 | 六 | 廿四 | 十六 | 六 | 廿四 |
| | 三 | 九 | | 九 | 三六 | | 二 | 八 |
| | 二 | 九 | | 四 | 三六 | | 四 | 八 |
| 十二 | 四 | 十八 | 十二 | 二 | 十八 | 十二 | 九 | 十八 |
| 十六 | 四 | 廿四 | 十六 | 四 | 廿四 | 十六 | 四 | 廿四 |
| | 九 | 五四 | | 二 | 十二 | | 六 | 三六 |
| | 六 | 五四 | | 六 | 十二 | | 二 | 三六 |
| 十二 | 二 | 十八 | 十二 | 九 | 十八 | 十二 | 一 | 十八 |

## 第六界

平行方形不滿一線．爲形小于線．若形有餘．線不足．爲形大于線．




甲乙線．其上作甲戊丁丙平行方形．不滿甲乙線．而丙乙上無形．卽作己乙線、與丁丙平行．次引戊丁線、遇己乙於己．是爲甲戊己乙滿甲乙線平行方形．則甲丁爲依甲乙線之有闕平行方形．而丙己平行方形爲甲丁之闕形．又甲丙線上、作甲戊己乙平行方形．其甲乙邊、大于元設甲丙線之較、爲丙乙、而甲己形、大于甲丙線上之甲丁形．則甲己爲依甲丙線之帶餘平行方形．而丙己平行方形、爲甲己之餘形．

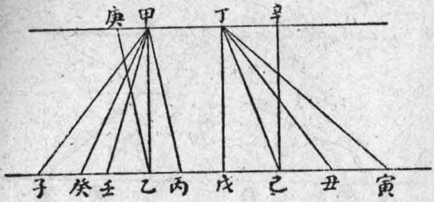
# 幾何原本第六卷

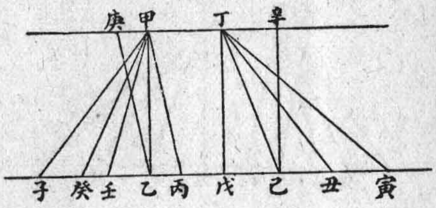
本篇論線面之比例　計三十三題

## 第一題

等高之三角形、方形．自相與為比例．與其底之比例等．

解曰．甲乙丙、丁戊己兩角形等高．其底乙丙、戊己．丙庚、戊辛兩方形等高．其底乙丙、戊己．題言甲乙丙與丁戊己之比例．丙庚與戊辛之比例．皆若乙丙與戊己．



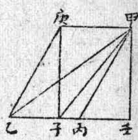


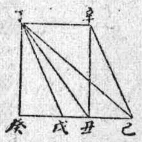

論曰。試置四形于庚辛、子寅兩平行線內。凡形自頂至底作垂線。卽本形之高。故等高者。必在平行線內。見本卷界說四。於乙子線內、作數底線。各與乙丙等。爲乙壬、壬癸、癸子。于己寅線內、作數底線。各與戊己等。爲己丑、丑寅。次從甲、從丁作甲壬、甲癸、甲子、丁丑、丁寅諸線。其甲乙丙、甲乙壬、甲壬癸、甲癸子、四三角形。既等底。而在平行線內。卽等。一卷三八 依顯丁戊己、丁己丑、丁丑寅、三三角形亦等。則子丙底線、大于乙丙若干倍。而甲子丙角形。大于甲乙丙、亦若干倍。依顯戊寅之倍戊己。亦若丁戊寅之倍丁戊己。底線分數與形之分數等。故。即用三試法。若子丙底、大于戊寅底。則甲子丙形、亦大于丁戊寅形也。若等、亦等。若小、亦小也。一卷三八 則一乙丙所倍之子丙。三甲乙丙所倍之甲子丙。與二戊己所倍之戊寅。四丁戊己所倍之丁戊寅。等、大、小、皆同類也。而一乙丙底與二戊己底之比例。若三甲乙丙與四丁戊己矣。五卷六界 又丙庚、戊辛、兩方形。各倍大于甲乙丙、丁戊己兩角形。一卷卌三 而甲乙丙與丁戊己之比例。既若乙丙與戊己。卽丙庚與戊辛兩方形之比例。亦若乙丙、戊己、兩底矣。五卷十五 或從壬、癸、子、及丑、寅、各作直線。與庚乙、辛己、平行。卽依上論推顯。

增題。凡兩角形。兩方形。各等底。其自相與爲比例。若兩形之高之比例。

解曰。甲乙丙、與丁戊己、兩角形。甲庚乙丙、與丁戊己辛、兩方形。其底乙丙、與戊己、等。題言甲乙丙、與丁戊己兩角形之比例。甲庚乙丙、與丁戊己辛、兩方形之比例。皆若甲壬、與丁癸。兩高。

論曰。試作子壬底線。與乙丙等。作丑癸底線。與戊己等。次作甲子、丁丑、兩線。其甲壬子、與甲乙丙、兩角形等底。又等高。即等。依顯丁癸丑、與丁戊己、兩角形亦等。一卷三八 即甲乙丙與丁戊己之比例。若甲壬子與丁癸丑也。五卷七 今以甲壬、丁癸、爲底。即甲壬子、與丁癸丑、兩角形之比例。若甲壬與丁癸兩底也。本篇一 而甲乙丙與丁戊己之比例。亦若甲壬與丁癸矣。又甲乙丙、與丁戊己、

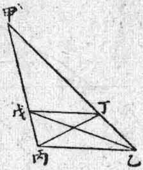



兩角形之比例。既以倍大故、若甲庚乙丙、與丁戊己辛、兩方形之比例。五卷十五 即兩方形之比例。亦若甲壬與丁癸兩底也。五卷十一 若作庚子、辛丑、兩線。亦依前論推顯。

## 第二題　二支

三角形。任依一邊作平行線。即此線分兩餘邊以爲比例。必等。三角形內有一線分兩邊以爲比例、而等。即此線與餘邊爲平行。

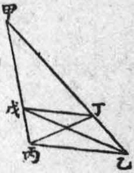



先解曰。甲乙丙角形內。如作丁戊線。與乙丙平行。題言丁戊分甲乙、甲丙、于丁、于戊、以爲比例、必等者。甲丁與丁乙。若甲戊與戊丙也。

論曰。試作丁丙、戊乙、兩線。其丁戊乙、丁戊丙、兩角形。同以丁戊爲底。同在兩平行線內。卽等。一卷三七 而甲戊丁與丁戊乙兩角形之比例。若甲戊丁與丁戊丙矣。五卷七 夫甲戊丁與丁戊乙兩角形。亦在平行線內。若于戊點上作一線、與甲乙平行。卽兩形在其內。 則甲戊丁與丁戊乙兩角形之比例。若甲丁與丁乙兩底也。本篇一 依顯甲戊與戊丙兩底之比例。亦若甲戊丁與丁戊丙兩角形也。兩形亦在兩平行線內故 是甲丁與丁乙兩線之比例。甲戊與戊丙兩線之比例。皆若甲戊丁與丁戊乙也。或與丁戊丙也。丁戊乙與丁戊丙等 則甲丁與丁乙。亦若甲戊與戊丙也。五卷十一

後解曰。甲乙丙角形內。有丁戊線。分甲乙、甲丙、于丁、于戊、以爲比例、而等。題言丁戊與乙丙爲平行線。

論曰。試作丁丙、戊乙、兩線。其甲丁與丁乙兩底之比例。若甲戊丁與丁戊乙兩角形也。在兩平行線內故。見本篇一。 而甲丁與丁乙之比例。若甲戊與戊丙。卽甲戊丁與丁戊乙之比例。亦若甲戊與戊丙也。五卷十一 又甲戊與戊丙兩底之比例。既若甲戊丁與丁戊丙。在兩平行線內故。見本篇一。 則甲戊丁與丁戊乙之比例。亦若甲戊丁與丁戊丙也。五卷十一 而丁戊乙與丁戊丙兩角形等矣。五卷九 兩角形、同以丁戊爲底。而等。則在兩平行線內。一卷卅九




第三題　二支

三角形任以直線。分一角爲兩平分。而分對角邊爲兩分。則兩分之比例。若餘兩邊之比例。三角形分角