电磁学习题指南

（上　册）

前　　言

这份"电磁学习题[illegible]"是尹道先同志在内蒙古大学对1977届物理系学[illegible]课程(采用赵凯华、陈熙谋同志合著《电磁学》一[illegible]),发给学生的。原为校内教学使用,不少兄弟院校同志获悉后,纷纷要求交流。现在书中部分解答由山东工学院章威廉同志完成,並由山东工学院陆敏同志,张尧柏同志和内蒙古工学院贺准诚同志审阅和定稿。我们印刷这份指南的目的是认为做题不应仅从能解出答案为满足,而应有意识地去注意解题方法和从多方面去讨论解答的物理意义,以达到融会贯通、触类旁通的目的。为此对某些主要习题,在解[illegible]可能先分析解题思路,解出答案后,尽可能作些引伸、推[illegible]讨论各种物理意义以及提出一些进一步的问题,以期巩固[illegible]扩大收获,使能起到举一反三的作用。这些都列入"讨论与问题"一栏中。

由于编者业务水平有限,虽经修改和讨论,但都是极其仓促的。因此,其中错误和不妥之处一定不少,我们诚恳地希望使用本讲义的教师和同学给以批评和指正。

编　者　　尹道先　章威廉

审稿者　　陆　敏　张尧柏　贺准诚

1977年12月印于济南

目　　录

上　册

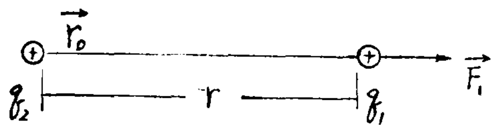
第一章　静电场

§1　静电的基本现象和基本规律

1、真空中两个点电荷$q_1=1.0\times10^{-10}$库仑，$q_2=1.0\times10^{-11}$库仑，相距100毫米，求q_1受的力。

解：电荷q_1受q_2的作用力应为：

$$\vec{F}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{r}_0$$



$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$=9.0\times10^9\times\frac{1.0\times10^{-10}\times1.0\times10^{-11}}{(0.1)^2}$$

$$=9.0\times10^{-10}\text{牛顿}$$

方向与$\vec{r}_0$方向相同。

2、真空中两个点电荷q与Q，相距5.0毫米，吸引力为40达因。已知$q=1.2\times10^{-6}$库仑，求Q。

解：

由库仑定律　$F=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r^2}$，因F为引力，故$Q<0$

得　$$Q=-\frac{4\pi\varepsilon_0Fr^2}{q}=-\frac{1}{9.0\times10^9}\times\frac{40\times10^{-5}\times(5.0\times10^{-3})^2}{1.2\times10^{-6}}$$

$$=-9.3\times10^{-13}\text{库仑}$$

3、为了得到一库仑电量大小的概念，试计算两个都是一库仑的点电在真空中相距一米时的相互作用力和相距一千米时的相互作用力。

解：相距1.0米的作用力为

$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r_1^2}=9\cdot0\times10^9\times\frac{(1\cdot0)^2}{(1\cdot0)^2}=9\cdot0\times10^9\text{牛顿}$$

相距 1·0 千米时的作用力为

$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r_2^2}=9\cdot0\times10^9\times\frac{(1\cdot0)^2}{(1\cdot0\times10^3)^2}$$

$$=9\cdot0\times10^3\text{牛顿}$$

由此可见，1 库仑的电量，按日常生活尺度是一很大数量级的电量。

4、氢原子由一个质子（即氢原子核）和一个电子组成。根据经典模型，在正常状态下，电子绕核作圆周运动，轨道半径是 $5\cdot29\times10^{-11}$ 米。已知质子质量 $M=1\cdot67\times10^{-27}$ 千克，电子质量 $m=9\cdot11\times10^{-31}$ 千克，电荷分别为 $\pm e=\pm1\cdot60\times10^{-19}$ 库，万有引力常数 $G=6\cdot67\times10^{-11}$ 牛顿·米^2／千克^2。(1)求电子所受的库仑力；(2)库仑力是万有引力的多少倍？(3)求电子的速度。

解：(1)电子所受的库仑力为

$$F_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=9\cdot00\times10^9\times\frac{(1\cdot60\times10^{-19})^2}{(5\cdot29\times10^{-11})^2}$$

$$=8\cdot23\times10^{-8}\text{牛顿}$$

$\vec{F}_e$ 的方向沿半径指向氢原子核

(2) 电子和氢原子核间的万有引力为

$$F_g=G\frac{M\cdot m}{r^2}=6\cdot70\times10^{-11}\times\frac{(1\cdot67\times10^{-27})\times(911\times10^{-31})}{(5\cdot29\times10^{-11})^2}$$

$$=3\cdot63\times10^{-47}\text{牛顿}$$

$$\frac{F_e}{F_g}=\frac{8\cdot23\times10^{-9}}{3\cdot63\times10^{-47}}=2\cdot27\times10^{30}$$

由此题可见，在原子内部库仑力远大于万有引力，所以在原子中，作用在电子上的力主要是电力，而万有引力小得可以略去不计。

(3) 电子绕核作圆周运动需向心力，它由 F_e 和 F_g 提供，所以

$$\frac{mv^2}{r} = F_e + F_g \approx F_e$$

$$v = \sqrt{\frac{F_e \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{8\cdot 23\times 10^{-8}\times 5\cdot 29\times 10^{-11}}{9\cdot 11\times 10^{-31}}}$$

$$= 2\cdot 19\times 10^{6}\ 米／秒$$

5、卢瑟福实验证明：当两个原子核之间的距离小到 10^{-15} 米时，它们之间的排斥力仍遵守库仑定律。金的原子核中有79个质子，氦的原子核（即 α 粒子）中有2个质子。已知每个质子带电 $e = 1\cdot 60\times 10^{-19}$ 库，α 粒子的质量为 $6\cdot 68\times 10^{-27}$ 千克。当 α 粒子与金核相距为 $6\cdot 9\times 10^{-15}$ 米时（设这时它们都仍可当作点电荷），求(1) α 粒子所受的力；(2) α 粒子的加速度。

解：(1) α 粒子所受的库仑力为

$$F = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 9\cdot 0\times 10^{9}\times\frac{79\times 2\times(1\cdot 60\times 10^{-14})^2}{(6\cdot 9\times 10^{-15})^2}$$

$$= 7\cdot 84\times 10^{2}\ 牛顿$$

$\vec{F}$ 的方向沿 α 粒子与金原子核的联线指向外。

(2) α 粒子的加速度

$$a = \frac{F}{m} = \frac{7\cdot 84\times 10^{2}}{6\cdot 68\times 10^{-27}} = 1\cdot 17\times 10^{29}\ 米／秒^2$$

6、铁原子核里两质子间相距 $4\cdot 0\times 10^{-15}$ 米，每个质子带电 $e = 1\cdot 60\times 10^{-19}$ 库，(1)求它们之间的库仑力；(2)比较这力与每个质子所受重力的大小。

解：(1) 原子核中质子之间相互作用的库仑斥力

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9\cdot 0\times 10^{9}\times\frac{(1\cdot 60\times 10^{-19})^2}{(4\cdot 0\times 10^{-15})^2}$$

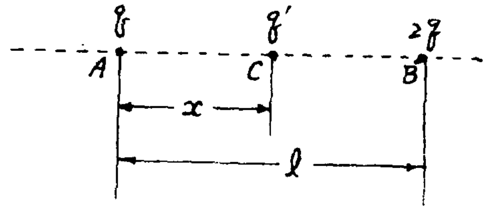
$$= 14\cdot 4\ 牛顿$$

$$(2)\quad \frac{F_e}{F_g}=\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}}{mg}=\frac{14\cdot 4}{1\cdot 67\times10^{-27}\times9\cdot8}$$

$$=8\cdot8\times10^{26}$$

7、两个点电荷带电$2q$和q，相距l，将第三个电荷放在何处所受合力为零？

分析：如果第三个电荷q'所受合力为零，则必须是：q'位于AB联线上且在A、B之间，以使q'所受到的$2q$和q作用的电力大小相等，方向相反。



题7图

解：设q'距q的距离为x，则根据q'所受合力为零，有

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq'}{(l-x)^2}$$

化简得：$\frac{1}{x^2}=\frac{2}{(l-x)^2}$， 即 $x^2+2xl-l^2=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-2l\pm\sqrt{4l^2+4l^2}}{2}=(-1\pm\sqrt{2})l$$

讨论与问题：(1) $x_1=(\sqrt{2}-1)l>0$为所求解答，而q'无论正负都可以。

(2) $x_2=(-\sqrt{2}-1)l<0$不合题意，舍去。问题：请你想一想，为什么会多解出一个x_2来？它的物理意义是什么？

(3) 如果所给条件为$2q$和$-q$，或$-2q$和q，则解又如何？

8、三个相同的点电荷放置在等边三角形的各顶点上。在此三角形的中心应放置怎样的电荷，才能使作用在每一点电荷上的合力为零？

分析：根据题意画图，A点处点电荷所受B、C处点电荷的作用力的合力$\vec{F}$沿$\overline{BC}$边中垂线向外。所以如果要使A处点电荷受力为零，必须在中心D点放一个与q异号的点电荷q'，使q'对q产生吸引力$\vec{F}'=-$

以与$\vec{F}$抵消。

解：$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=d$，

则 $\overline{AD}=\dfrac{d}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$

$$F_1=F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2},$$

合力 $F=\sqrt{3}F_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sqrt{3}q^2}{d^2}$，

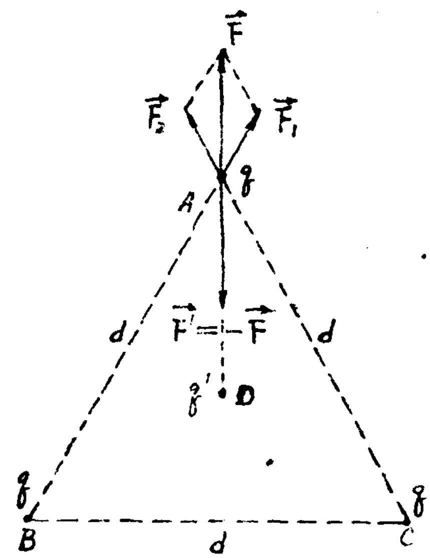
q'对q的吸引力为：

$$F'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\overline{AD}^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qq'}{d^2}$$

由题意 $F'=-F$ 乃得：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qq'}{d^2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}q^2}{d^2}$$

$$\therefore\quad q'=-\frac{\sqrt{3}}{3}q$$



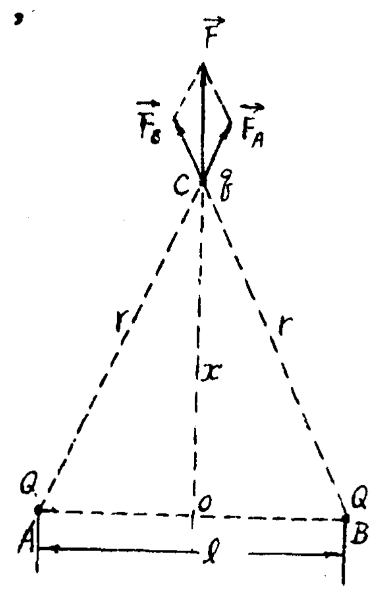
题 8 图

1－9、电量都是Q的两个点电荷相距为l，联线中点为O；有另一点电荷q，在联线的中垂面上距O为x处。(1)求q受的力；(2)若q开始时是静止的，然后让它自己运动，它将如何运动？分别就q与Q同号和异号两种情况加以讨论。

(1) 设 $r=\overline{AC}=\overline{BC}=[x^2+(\frac{l}{2})^2]^{\frac{1}{2}}$，

则 $F_A=F_B=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r^2}$，而合力F可由几何比例关系求出：$\because F/F_A=2x/r$，

故 $F=\dfrac{2x}{r}F_A=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{xqQ}{r^3}$



题 9 图

$$=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ \frac{xqQ}{(x^2+\frac{\ell}{4})^{3/2}}$$

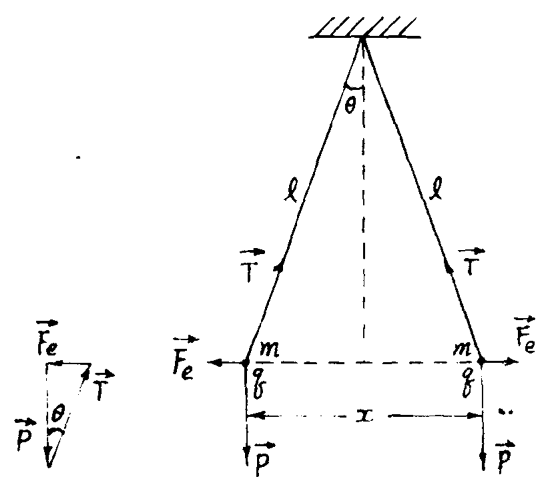
(2) 若 q ，Q同号，则合力 $\vec{F}$ 垂直 $\overline{AB}$ 向外，∴ q 将在电力的作用下从静止开始作加速运动，趋向无穷远。

若 q 、Q异号，则合力 $\vec{F}$ 垂直 $\overline{AB}$ 指向O点，∴ q 将在电力的作用下，从静止开始作加速运动趋向O点。经过O点后，$\vec{F}$ 反向，q 开始减速运动，直到速度为零，然后再反向趋向O点。即 q 在中垂线上以O为中心，以 $\overline{OC}$ 为振幅作周期性振动。

问题：这种振动是~~简谐振动吗？为什么？~~

10、两小球质量都是 m，都用长为 l 的细线挂在同一点；若它们带上相同的电量，平衡时两线夹角为2 θ（见附图）。设小球的半径都可略去不计，求每个小球上的电量。

分析：所谓小球平衡，即意味着小球所受合力为零。每个小球都受到三个力：重力 $\vec{P}=\vec{mg}$，细线张力 $\vec{T}$ 和电力 $\vec{F_e}$。画出小球受力图和力的平衡图如右。



题10图

解：已知：$P=mg$，细线长 ℓ，夹角 θ。求小球上的电量 q。

解题思路为：从已知的P・ℓ・θ，通过力的平衡关系求出电力 F_e，再进而用库仑定律求出小球上的电量 q。

由 $\tan\theta = F_e/P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{mgx^2}$　　$\therefore q=\pm x\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\tan\theta}$

而　$x=2\ell\sin\theta$　　$\therefore q=\pm 2\ell\sin\theta\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\tan\theta}$

当 θ 很小以致于近似有 $\tan\theta \doteq \sin\theta \doteq \theta$ 时，

$$q=\pm 2\ell\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}\cdot\theta^{3/2}$$

讨论与问题：(1)如果两个小球上的电量都减少一半，则夹角 θ 是否也减小一半？

*(2)如果两个小球都是金属的分别带电 q 和 $-3q$，细线是绝缘的，试定性地讨论当两小球相距某一距离，从静止开始的运动情况。

§2 电场 电场强度

1、在地球表面上某处电子受到的电场力与它本身的重量相等，求该处的电场强度（已知电子质量 $m=9\cdot1\times10^{-19}$ 库）。

解：　　$F_e=eE$，　$F_g=mg$

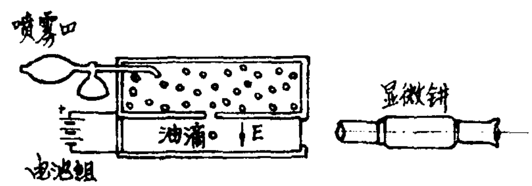
由题设　$F_e=F_g$

所以　　$$E=\frac{mg}{e}=\frac{9\cdot1\times10^{-31}\times9\cdot8}{1\cdot60\times10^{-19}}=5\cdot57\times10^{-11}\text{ 牛顿／库仑}$$

这是一个很弱的电场。

2、电子所带的电量（基本电荷 $-e$）最先是由密立根通过油滴实验测出的。密立根设计的实验装置如附图所示。一个很小的带电油滴在电场E内。调节E，使作用在油滴上的电场力与油滴的重量平衡。如果油滴的半径为 $1\cdot64\times10^{-4}$ 厘米，在平衡时，$E=1\cdot92\times10^{5}$ 牛顿／库仑。求油滴上的电荷（已知油的密度为 $0\cdot851$ 克／厘米^3）。

解：依题意很小的带电油滴可当作点电荷计算。设油滴所带电量的绝对值为Q，半径为R，密度为 ρ。则平衡时，有



题2图密立根实验

$$qE=\frac{4}{3}\pi R^3\rho g$$

或　　$$Q=\frac{4\pi R^3\rho g}{3E}$$

$$=\frac{4\times3\cdot14\times(1\cdot64\times10^{-6})^3\times0\cdot851\times10^3\times9\cdot800}{3\times1\cdot92\times10^5}$$

$$=8\cdot02\times10^{-19}\text{ 库仑}$$

3、在早期（1911年）的一连串实验中，密立根在不同时刻观察在单个油滴上呈现的电荷，其测量结果（绝对值）如下。

$6·568\times10^{-19}$库仑　$13·13\times10^{-19}$库仑　$19·71\times10^{-19}$库仑

$8·204\times10^{-19}$库仑　$16·48\times10^{-19}$库仑　$22·89\times10^{-19}$库仑

$11·50\times10^{-19}$库仑　$18·08\times10^{-19}$库仑　$26·13\times10^{-19}$库仑

根据这些数据，可以推得基本电荷e的数值为多少？

解：因为各油滴上的电荷为基本电荷e的整数倍，所以可分别设为：n_1e、n_2e、n_3e、……n_9e，其中n_1、n_2、n_3、……n_9为不同的正整数。作下列递减表，注意体会通过逐次递减所反映出来的解题思路。表中单位都是10^{-19}库仑，省略。

$q_1=n_1e=65.68$

$(n_2-n_1)e=m_1e=1.636$

$q_2=n_2e=82.04$

$(m_2-m_1)e=k_1e=1·66$

$(n_3-n_2)e=m_2e=3.296$

$q_3=n_3e=11.50$

$(m_3-m_2)e=k_2e=-1·666$

$(n_4-n_3)e=m_3e=1·63$

$q_4=n_4e=13.13$

$(m_4-m_3)e=k_3e=1·72$

$(n_5-n_4)e=m_4e=3.35$

$q_5=n_5e=16.48$

$(m_5-m_4)e=k_4e=-1·75$

$(n_6-n_5)e=m_5e=1·60$

$q_6=n_6e=18.08$

$(m_6-m_5)e=R_5e=0·03$

$(n_7-n_6)e=m_6e=1·63$

$q_7=n_7e=19.71$

$(m_7-m_6)e=R_6e=1·55$

$(n_8-n_7)e=m_7e=3·18$

$q_8=n_8e=22.89$

$(m_8-m_7)e=R_7e=0·06$

$(n_9-n_8)e=m_8e=3·24$

$q_e=n_9e=26.13$

显然，从原则上说，除n_i外，m_i和k_i都是可正可负或零的整数。从上表得出的k_ie数值，並考虑到实验产生的误差，基本电荷e的数值可估计为$1·6-1·7\times10^{-19}$库（请你自已解释一下，根据上表为什么能得出这个估计）。根据这一估计，乃可得出：$n_1=4$，$n_2=5$，$n_3=7$，$n_4=8$，$n_5=10$，$n_6=11$，$n_7=12$，$n_8=14$，$n_9=16$。所以这九次测出的e值分别为（单位都是10^{-19}库）：

$e_1=1·642$，$e_2=1·641$，$e_3=1·645$，$e_4=1·641$，

$e_5=1\cdot648$ ，$e_6=1\cdot644$ ，$e_7=1\cdot643$ ，$e_8=1\cdot635$ ，$e_9=1\cdot633$ 。

由此求出 e 的平均值与误差为：$e=(1\cdot641\pm0\cdot001)\times10^{-19}$ 库。

讨论与问题：(1)我们求 e 的平均值是根据 $\bar{e}=\sum_{i=1}^{9}e_i/9=1\cdot641\times10^{-19}$ 库，有人说这样不对，应该用 $\bar{e}=\sum_{i=1}^{9}q_i/\sum_{i=1}^{9}n_i=\dfrac{142\cdot692\times10^{-19}\,C}{87}=1\cdot640\times10^{-19}\,C$ 请问那种方法正确？为什么？

(2)根据所得结果 $e=(1\cdot641\pm0\cdot001)\times10^{-19}\,C$ ，误差在第四位，那么应该说 e 的前三位有效数字 $1\cdot64$ 是准确无误的了。但实际上众所周知，e 的前三位有效数字的准确值是 $1\cdot60$ ，第三位竟然相差达 4 ，请解释这一矛盾。

(3)在列表递减时，为什么递减列 k_ie 就可以停止，不必再往下递减了？如果再往下递减，会出现什么结果？其物理意义是什么？

(4)仅仅根据上述实验数据，是否能肯定油滴上的基本电荷必然是 $1\cdot6\times10^{-19}\,C$ ？

(5)注：密立根的早期实验结果是 $1\cdot59\times10^{-19}\,C$ ，误差主要由于空气的粘滞系数不够精确引起。

4 、根据经典理论，在正常状态下，氢原子中电子绕核作圆周运动，其轨道半径为 $5\cdot29\times10^{-11}$ 米。已知质子带电 $e=1\cdot60\times10^{-19}$ 库，求电子所在处原子核（即质子）的电场强度。

解：质子在电子所在处的场强

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}=9\cdot00\times10^9\times\frac{1\cdot60\times10^{-19}}{(5\cdot29\times10^{-11})^2}$$

$$=5\cdot15\times10^{11}\text{ 牛顿／库仑}$$

5 · 两个点电荷，$q_1=+8\cdot0$ 微库仑，$q_2=-16\cdot0$ 微库仑（1 微库仑 $=10^{-6}$ 库仑），相距 2 0 厘米。求离它们都是 2 0 厘米处的电场强度 E 。

分析：q_1 、q_2 相距 20 cm ，C 点离它们又都是 2 0 cm ，∴ C 点与 q_1 ，q_2 构成等边三角形，如图。

$E_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{r^2}$，$E_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2}{r^2}$

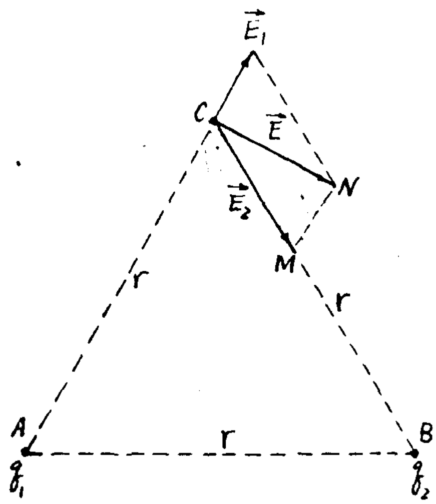
皆已知，而$\angle NMC=\angle MCA=60°$，

∴在ΔCMN中利用余弦定理就可以求出C点的总场强，

$$E=\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos 60°}$$
$$=\sqrt{3}\,E_1$$

解：在这一特例中，实际上不用余弦定理也可以，因为由已知条件很易判断ΔCMN为直角三角形，∴$E=\sqrt{3}E_1$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}=3\cdot1\times10^6\ N/C，$$



题5图

$\vec{E}$的方向为垂直AC联线而指向B一侧。

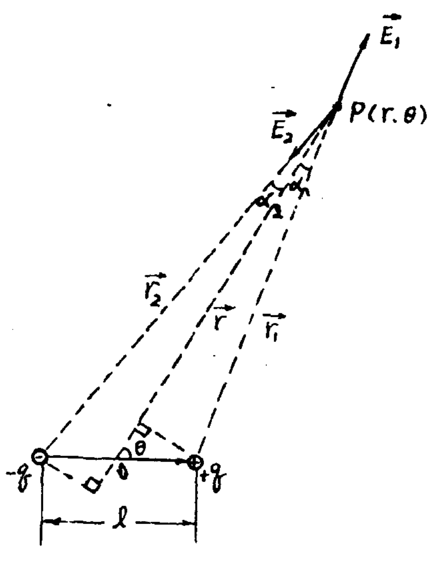
讨论与问题：试讨论所求得的解是否唯一，如果不唯一，这些解的特点是什么？

6、如附图所示，一电偶极子的电偶极矩$p=q\ell$，p点到偶极子中心O的距离为r，r与ℓ的夹角为θ。在$r>>\ell$时，求p点的电场强度E在r（即Op方向的分量E_r和垂直于r方向上的分量E_θ。

分析：p点的场强$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$（见右图）把$\vec{E}_1$、$\vec{E}_2$分别分解为沿$\vec{r}$方向的分量$E_{1r}=E_1\cos\alpha_1$，$E_{2r}=-E_2\cos\alpha_2$和垂直$\vec{r}$（沿$\vec{\theta}°$）方向的分量$E_{1\theta}=E_1\sin\alpha_1$，$E_{2\theta}=E_2\sin\alpha_2$，

而$E_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_1^2}$，$E_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_2^2}$

（都是绝对值） (1)



题6图

$$\therefore \quad E_r = E_{1r} + E_{2r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\alpha_1}{r_1^2} - \frac{\cos\alpha_2}{r_2^2}\right) \qquad ②$$

$$E_\theta = E_{1\theta} + E_{2\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\alpha_1}{r_1^2} + \frac{\sin\alpha_2}{r_2^2}\right) \qquad ③$$

可见关键在于求距离和角度的近似值（当 $r \gg \ell$ 时）。

解：对距离：利用余弦定理及二项式展开：

$$\frac{1}{r_1^2} = (r_1^2)^{-1} = \left[r^2 - r\ell\cos\theta + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\doteq (r^2 - r\ell\cos\theta)^{-1} = r^{-2}\left(1 - \frac{\ell\cos\theta}{r}\right)^{-1}$$

$$\doteq r^{-2}\left(1 + \frac{\ell\cos\theta}{r}\right) = \frac{1}{r^2} + \frac{\ell\cos\theta}{r^3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r_1^2} \doteq \frac{1}{r^2} + \frac{\ell\cos\theta}{r^3}\text{，类似可得}\quad \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\ell\cos\theta}{r^3} \qquad ④$$

对角度：$\cos\alpha_1 \doteq \left(r - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)/r_1$

而 $r_1 = \left[r^2 - r\ell\cos\theta + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \doteq (r^2 - r\ell\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$

$$= r\left(1 - \frac{\ell\cos\theta}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq r\left(1 - \frac{\ell\cos\theta}{2r}\right)$$

$$\therefore \quad \cos\alpha_1 \doteq 1\text{，}\quad\text{类似可得}\quad \cos\alpha_2 \doteq 1 \qquad ⑤$$

$$\sin\alpha_1 = \left(\frac{\ell}{2}\right)\sin\theta/r_1 \doteq \left(\frac{\ell}{2}\right)\sin\theta/r\text{，}$$

$$\sin\alpha_2 \doteq \left(\frac{\ell}{2}\right)\sin\theta/r \qquad ⑥$$

将上述近似分式④，⑤，⑥代入②，③，乃得到 $r \gg \ell$ 时的场强：

$$E_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{\ell\cos\theta}{r^3}-\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\ell\cos\theta}{r^3}\right)\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q\ell\cos\theta}{r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \quad (7)$$

$$E_\theta=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r^3}+\frac{\ell\cos\theta}{r^3}\right)\frac{\ell\sin\theta}{2r}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\ell\cos\theta}{r^3}\right)\frac{\ell\sin\theta}{2r}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\ell\sin\theta}{r^3}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \quad (8)$$

讨论与问题：(1)往往将E_r、E_θ合在一起表为$\vec{E}=E_r\vec{r}^0+E_\theta\vec{\theta}^0$

由于：$\vec{p}=p\cos\theta\,\vec{r}^0-p\sin\theta\,\vec{\theta}^0$ (9)

$$(\vec{p}\cdot\vec{p}^0)\vec{r}^0=p\cos\theta\,\vec{r}^0 \quad (10)$$

∴ $3\times(10)-(9)$：

$$3(\vec{p}\cdot\vec{r}^0)\vec{r}^0-\vec{p}=2p\cos\theta\,\vec{r}^0+p\sin\theta\,\vec{\theta}^0 \quad (11)$$

$$\therefore\quad \vec{E}=E_r\vec{r}^0+E_\theta\vec{\theta}^0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2p\cos\theta\,\vec{\theta}^0+p\sin\theta\,\vec{\theta}^0\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{r}^0)\vec{r}^0-\vec{p}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right] \quad (12)$$

(2) 求E_r时，如果对距离不是分别用二项式展开，而直接用分式通分计算也可以，即：

$$E_r=E_{1r}+E_{2r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)=\frac{1}{4\pi r\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r^2+\frac{\ell^2}{4}-r\ell\cos\theta\right)}\right.$$

$$-\frac{1}{r^2+\frac{\ell^2}{4}+r\ell\cos\theta})=\frac{}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2r\ell\cos\theta}{(r^2+\frac{\ell^2}{4})^2-r^2\ell^2\cos^2\theta}$$

$$\doteq\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2r\ell\cos\theta}{r^4}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

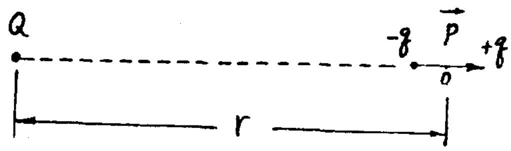
。对 E_θ 也可以类似地用分式通分计算。但请注意，用通分的办法，只有在差别很小的两项相加或相减，并且无根式运算时（参看§4－11题），计算才较方便，而二项式展开求近似值的办法是普通适用的。所以我们认为后者是应该让学生着重掌握的。（联系§2－7题）

(3) 场强与角度 θ 有关，请你讨论当距离 r 不变时，E_r、E_θ 与 θ 角的关系，并画图表示以获得较深印象。（注意，当 $\theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，就过渡到书上所求的特殊结果。

(4) 场强与距离 r 三次方成反比（而点电荷的场强 $\propto\frac{1}{r^2}$）因为正、负电荷的场强大部分抵消，所以随着 r 的增加，场强将比点电荷时更快地趋于零。

7、把电偶极矩 $p=q\ell$ 的电偶极子放在点电荷Q的电场内，p 的中心O到Q的距离为 r（$r\gg\ell$）。分别求(1) $p\parallel\overrightarrow{QO}$（图 b ）时 偶极子所受的力F和力矩L。

解：(1) （$-q$）电荷所受Q的作用力：



题 7(a)图

$$F_1=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0(r-\frac{\ell}{2})^2},$$

（$+q$）电荷所受Q的作用力：$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(r+\frac{\ell}{2})^2}$

当 $r\gg\ell$ 时，利用二项式展开求近似值：

$(r-\frac{\ell}{2})^{-2}\doteq\frac{1}{r^2}+\frac{\ell}{r^3}$，$(r+\frac{\ell}{2})^{-2}\doteq\frac{1}{r^2}-\frac{\ell}{r^3}$ 分别代入 F_1，F_2：

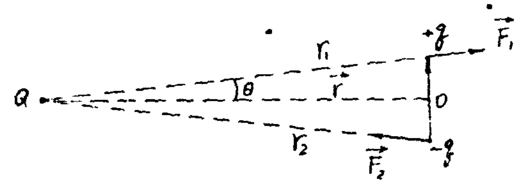
∴　电偶极子受力 $F=F_1+F_2=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2q\ell Q}{r^3}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2pQ}{r^3}$

或写为矢量形式：$\boxed{\vec{F}=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Q\vec{p}}{r^3}}$　当 $Q>0$ 时，$\vec{F}$ 指向 Q（吸力）；当 $Q<0$ 时，F 背离 Q（斥力）。

而 $\vec{p}$ 所受的力矩为零，因为 F_1，F_2 在同一直线上，即 $\boxed{\vec{L}=0}$，

(2)　当 $\vec{p}\perp\vec{r}$ 时，受力情况如右图

（为明确起见，图中画的是 $Q>0$ 情形）



题 7(b)图

$$F_1=F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_1^2},$$

$\vec{p}$ 所受的力 $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ 可分解为沿 $\vec{r}$ 方向的分量 F_r 和垂直 $\vec{r}$ 方向的分量 F_θ，即：

$$F_r=F_{1r}+F_{2r}=F_1\cos\theta-F_2\cos\theta=0$$

$$F_\theta=F_{1\theta}+F_{2\theta}=F_1\sin\theta+F_2\sin\theta$$

$$=2F_1\sin\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qQ}{r_1^2}\frac{\ell}{2r_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pQ}{r_1^3}$$

而 $\dfrac{1}{r_1^3}=(r_1^2)^{-3/2}=\left(r^2+\dfrac{\ell^2}{4}\right)^{-3/2}$

$$=r^{-3}-\frac{3}{2}r^{-5}\frac{\ell^2}{4}+\cdots\doteq\frac{1}{r^3}$$

∴　$\boxed{F=F_\theta=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qp}{r^3}}$　当 $Q>0$ 时，力的方向与 $\vec{p}$ 一致；反之，相反。

p 所受力矩：$L=F_{1r}\ell=F_1\cos\theta\ell=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq\ell r}{r_1^3}\doteq$