

6026843

應力測定法

應力測定技術研究會編

东北重型机械学院 藏书印 图书馆	711
	15(3)321
	3



朝倉書店

TH 113.2/13

02 M



0743708

d

應力測定法

定價2800圓

昭和30年9月10日 初版発行
昭和37年11月10日 4版発行

編 者 應力測定技術研究會

發行者 朝 倉 鉉 造
東京都新宿区東五軒町55

印刷者 齋 藤 貞 子
東京都千代田区飯田町1の18

發 行 所

株式 朝 倉 書 店
会 社

東京都新宿区東五軒町55
電話東京(303) 0146 (代)
郵便口座東京8573番
自然科学書協會員

表し高一風丁・落丁の節はお取替致します。
日月印刷・渡邊製本

序 文

應力測定法は最近十數年の間に米・英・獨などの諸外國で劃期的な發展を示したのであるが、我國では戰時中ならびに終戰の當座においてはさまざまな制約によつて、外國の事情もわからず、研究もはなはだ困難な状態にあつた。昭和 25 年の末からこの方面の同好者約 30 名が相集まり應力測定技術研究會を組織し、爾來毎月研究會を開催して活潑な討議を行い、その研究報告も既に數卷を發刊し、戰中及び戰後の遅れを取り戻すのに大いに貢獻した。

最近の應力測定法は單なる技巧にとどまらず、各方面の斬新な學理が適用されており、その方法も極めて多岐に亘つている。したがつて應力を測定するにあつては、その目的に最も適應した方法を選ばなければならない。本書はこの多岐に亘る應力測定技術を平易に解説し誰でも容易に應力測定に携わり得るよう、應力測定技術研究會において、各方面の堪能の士が各自の得意とする方面を分擔し協力して執筆したもので、その内容は單なる外國技術の紹介にとどまらず、各自が新に開拓した結果をも含めたものである。

應力測定技術は應用力學の研究者のみならず、一般の工學者又は現場の技術者にも今後ますます必要と思われるが、遺憾ながら我國においては應力測定の最新技術の普及は充分でなく、これに關する邦文の専門書も少ない。このときに當つて本書が刊行されることは、まことに時宜を得たものと信ずる。

昭和 30 年 8 月

應力測定技術研究會委員長

竹 中 二 郎

執筆 者 一 覧 (執筆順)

日本大學工學部 教授・工學博士	倉西正嗣	神奈川大學教授 工學博士	津村利光
東京都立大學工學部 教授・工學博士	川田雄一	東京工業大學助教授 工學博士	中原一郎
運輸技術研究所電機 機器研究室長・運輸技官	小林韓治	東京大學航空研究所 教授・工學博士	池田健
東京大學生産技術 研究所助教授	大井光四郎	東京大學工學部 教授・工學博士	鵜戸口英善
東京大學航空研究所 助教授	富田文治	東京大學航空研究所 助教授・工學博士	河田幸三
早稻田大學生産研究 所教授・工學博士	西野吉次	慶應義塾大學工學部 助教授	國尾武
東京大學生産技術 研究所助教授	森大吉郎	東京大學生産技術研 究所教授・工學博士	一色貞文

目 次

第1章 總 論	倉西 正嗣	1
§ 1 緒 論		1
§ 2 應 力		2
§ 3 歪, 應力と歪の關係		26
§ 4 三つの歪成分から應力成分を求める方法		40
§ 5 應力分布状態の圖示, その性質		57
第2章 機械的歪計	川田 雄一	75
§ 1 緒 言		75
§ 2 機械的歪計概説		76
§ 3 機械的歪計の實例		89
§ 4 光學的擴大法		125
第3章 電気抵抗歪計および回路	大井光四郎・小林韓治	158
§ 1 はしがき		158
§ 2 金屬抵抗歪計		160
§ 3 ゲージの製作法		173
§ 4 抵抗線歪計の諸性質		181
§ 5 歪計構成回路		191
§ 6 電子管回路及びその他		203
§ 7 測定装置		230
第4章 容量型歪計	池田健・富田文治	261
§ 1 はしがき		261
§ 2 ゲ ー ジ		262
§ 3 指示回路		271
§ 4 感度較正		278
§ 5 多點測定法及び感度統一法の一例		279

§ 6	温度補償	283
§ 7	結 び	284
第 5 章	電磁型歪計その他	小林 韓治・西野吉次 286
§ 1	電磁型變換器一般	286
§ 2	基礎事項	287
§ 3	インダクタンス型變換器の例	293
§ 4	交流ブリッジ回路の特長	304
§ 5	測定回路	307
§ 6	壓電氣型變換器	311
§ 7	記録装置	313
第 6 章	振動測定	森 大吉郎 327
	はしがき	327
§ 1	振動計の理論	327
§ 2	振動測定の方法と計器例	332
§ 3	検定と起振	352
§ 4	防振と振動測定	355
第 7 章	残留應力測定法	川田 雄一 358
§ 1	緒 言	358
§ 2	残留應力の發生機構	359
§ 3	残留應力の測定法	360
§ 4	熱處理による残留應力	378
§ 5	常温加工による残留應力	397
§ 6	残留應力と疲れ強さ	402
第 8 章	應力塗料	津村利光・中原一郎 413
§ 1	塗料による應力測定法の沿革	413
§ 2	應力塗料の性質	417
§ 3	應力塗料の使用法	421
§ 4	量的測定法	424

§ 5	塗料の破壊法則	426
§ 6	應力塗料の實例	430
§ 7	應力塗料の配合例	433
§ 8	殘留應力の測定	435
§ 9	塑性歪の測定	436
§10	殘留應力の測定	437
第 9 章	類似現象による應力測定法	池田 健 443
§ 1	はしがき	443
§ 2	薄膜の類似	444
§ 3	薄膜實驗法	455
§ 4	石鹼膜實驗の具體例	460
§ 5	電氣ポテンシャルの利用	465
§ 6	その他の類似問題	466
§ 7	類似現象の利用	469
第 10 章	平面光弾性實驗法	鶴戸口英善 472
§ 1	光弾性學	472
§ 2	偏 光	474
§ 3	光の波長と色	476
§ 4	複 屈 折	477
§ 5	光弾性效果	481
§ 6	等傾線と等色線	483
§ 7	光弾性偏光器	485
§ 8	光弾性實驗裝置	493
§ 9	光弾性實驗裝置の各部品	499
§10	光弾性模型材料の感度とその檢定法	508
§11	等傾線の性質とその求め方	517
§12	主 應 力 線	521
§13	特 異 點	524

§14	等色線と縞次數の求め方	530
§15	小數の縞次數測定法	533
§16	主應力 and の測定法	543
§17	主應力決定の圖式計算法	549
§18	主應力の單獨値測定法	560
§19	等厚線圖の光學的撮影法	569
§20	光彈性材料	572
§21	試験片の加工法	581
§22	光彈性實驗の誤差とその防止及び補正法	584
第 11 章	三次元光彈性實驗法	河山幸三・國尾 武 595
§ 1	應力状態と光學的性質との關係	595
§ 2	ポリマーの光彈性的性質	604
§ 3	三次元應力の二次元的解析法(常溫法三次元光彈性)	616
§ 4	應力凍結法	620
§ 5	收斂光法	654
§ 6	散亂光法	672
第 12 章	X 線應力測定法	一色 貞文 693
	はしがき	693
§ 1	X 線による格子面間隔の測定法	694
§ 2	X 線應力測定法の原理	701
§ 3	測定装置と測定方法	714
	和文索引	729
	英文索引	737

第 1 章 總 論

§1 緒 論

機械、構造物の應力の分布状態を確めることは機械などの強さや耐久性を確認する上からも、また場合によつては、その機械の改良のためにも必要なことはすべての技術者の認めるところである。本書で述べる應力測定法ではこれを實驗的な手段方法で求めようとするものである。昔からこの實驗的な方式は純理論的な、従つて數學的な手法によるものと相並んで發達して來たのであるが、現在では實驗的な研究調査はあらゆる科學の分野の成果を取り入れて非常に發達を來たし、すべての技術者はこの手法に慣熟しないと機械などの設計、製作、研究、改良に手を染めることが出來ないほどになつて來た。

實際、理論的な方法のときには、僅かではあつても、いつでも眞實と離れた假定を用い、また數學的な困難のために實物通りのものを解析することは不可能に近いということになるが、實驗的な方法では、實物そのものに就いて、實際の状態で測定することもそれほど困難ではない、場合によつては、模型を適當な寸法に作つて充分な調査を行うことが望ましいこともある。

現在應力測定法として實用されている方式は實に多種多様に涉つている、その詳細はそれぞれの章、節で述べられるが、實際問題に當つたときには、その構造、材料などによつて自ら最も適當な方法というものがあることになるから、技術者はこれらの方法全般に就いて、その特長とするところをよく把握して最良の方式を採用して問題を處理することが必要である。

模型によるときには、寸法、材料の性質、接合の方式、肉厚、曲げ剛性などの配置、挫屈、重力の影響、振動などの諸點に就いて詳しく比較して、實物と模型との相似性を出来る限り問題に適合するように努力する必要がある。

また何れにせよ、測定の精度は實驗方式にも關係するが、調査する目的にじ應て適當に選ぶことも實驗者として是非必要なことであらう。

本章では應力測定の基礎となる材料の性質、彈性體に就いての應力と歪の各種の基礎的な智識を述べるものである^{1~6)}、従つて實際に應力測定に應用する方

法に就いては關係各章に譲ることとした、

§2 應 力

2・1 一つの界面での應力、垂直應力と剪断應力

ある物體が外力を受けていると、その物體の内部は互に力を作用しあつて、この外力と力の釣合を保つている。この物體の内部で相互に力の作用し合つている状態を應力を受けている状態という。外力に対してこれを内力と名づけることもある。この應力の大きさ等をどう定義するかというと、今物體の内に一つの面を想像して見る。この面を界として 物體は相互に同じ大きさの力を作用しあつているのであるから、その界面の微小面積 ΔA を取つて見ると、それを通じて互に或る方向の、大きさが ΔP である力の作用していることになる。それで應力 p の大きさとしては、この面積當りの力を取ることにする、すなわち

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (1)$$

應力が一様に分布していないときには、或る點の應力の大きさとしては、上式の極限值を取ることにする。この單位面積當りの應力を、詳しくいえば應力度というべきであるが、普通單に應力といつているから、本書ではそれに従うこととする。

應力の方向は作用し合つている力の方向を取る。すると一般には界面と或る角度傾いている。それで便宜上これを界面に垂直なものと平行なものに分括して考える。この垂直成分を垂直應力、平行成分を剪断應力とする。またこの剪断應力を界面上に設けた二つの座標の軸方向に分解することも多い。

今問題にしている點を原點に取り x 軸を界面に垂直に、 y, z 軸を界面上に取つた直角座標を考えると、界面は x -面であるから、その點での應力を p_x で表わす。これの x, y, z 方向の成分を p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} で表わすと、これで應力の大きさと方向とが完全に示めされるが、 p_{xx} は垂直應力であつて普通これを σ_x と書く。また p_{xy}, p_{xz} は剪断應力で、これを τ_{xy}, τ_{xz} で表わす。この二つの剪断應力を合成したものを τ_x と書くこととしよう。すなわち、

$$\tau_{xy} = p_{xy}, \quad \tau_{xz} = p_{xz} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \rho_{nn}, \\ \tau_n &= \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}\end{aligned}\quad (2b)$$

そうして τ_n の方向は y 軸と $\arctan(\tau_{xz}/\tau_{xy})$ の角度をなしている。

さて應力は界面を通じて或る一つの方向に同じ大きさの力が反対の向きに作用し合っているのであるから、應力は力ではない。従つて應力の正負は力と同様に向き (sense) によつて定めることは出来ない。それで垂直應力はこの作用し合う力の向きが互に界面から離れるものと、界面の方に向うものとで符號を異にするようにする。前者が引張應力といわれるもので、後者は壓縮應力である。普通行われるように引張應力を正に取れば、壓縮應力は負である。同様に考えると、剪斷應力は正負ともに剪斷應力であるので、これは約束による外はない。

この應力の正負の定め方を上述の直角座標に就いて表現すると、 x 面の應力成分 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ は x の正側の物體部分が負側に及ぼす力の向きが x, y, z の正の向きであるときに、正であるということにする。従つて x の負側の部分が正側に及ぼす力の向きが x, y, z の負の向きであるときに、それぞれの應力は正であることになる。

直角座標以外の直交座標を採用するときには上記と同一方針で應力の符號を定めるのが便利である。すると垂直應力には變化はないが、剪斷應力に就いては符號に相違が出来ることに注意する必要がある。

2.2 一つの點での應力、應力の種類

物體内の或る一つの界面を考えたときの應力は上述のように定義されるが、物體の或る一つの點を考えると、その點を通る界面は無数にあるから、一つの點での應力ということになると、また新しい考察が必要となる。

今問題にしている點を原點に取つて直角座標を定める。すると前節と同様にして x -面では $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$; y -面では $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$; z -面では $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ の應力成分を考えることが出来る。このときに應力の釣合上から (第5頁参照)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (3)$$

という関係がある。等しい二つの剪斷應力を互に共軛剪斷應力という。

同じ點に就いて別の直角座標 x', y', z' を取り、その x' -、 y' -、 z' -面に就いての應力成分 $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'}, \tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}, \tau_{y'z'}$ を考えると、これと上記の $\sigma_x,$

$\sigma_y, \sigma_x, \tau_{yz}, \tau_{xy}, \tau_{zy}$ と間には次の関係が成立することが證明できる。

$$p_{rs} = \sum_j \sum_l l_{rj} l_{sl} p_{lj} \quad (4)$$

ここでは一般的に表示するため(2.2), (2.3)式によつて σ, τ を p で統一してあり、 $\sum_j \sum_l$ は $i=x, y, z; j=x, y, z$ に取つたものを全部合計することであり、 $r=x', y', z'; s=x', y', z'$ と變化した場合の $p_{x's'}, \dots, p_{z'y'}$ が求められることになる。なお l_{ri} は r 軸と i 軸の間の角度の餘弦を表わしている。これを普通の形に書き表わしたものは第10頁(26), (27)式に示してある。

この(4)式によつて、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{yz}, \tau_{xy}, \tau_{zy}$ が或る直角座標に就いて與えられると、他の任意の界面での應力も確定することが示されたので、或る點での應力はこの $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{yz}, \tau_{xy}, \tau_{zy})$ によつて定められることになる。それで、この6個を或る點での應力の成分であるといい、その點の應力を $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{yz}, \tau_{xy}, \tau_{zy})$ で表わす。

或る一點での應力成分は上述のように定義されるのであるから、基準とする直角座標の取り方によつて異なつた表示となる。ところがその内に一つの特別な直角座標が存在する。(例外的な場合にはこの数は一つに限らない)。その直角座標に就いての應力成分は $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; 0, 0, 0)$ となつて、剪断應力は全部零であつて、垂直應力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はそれぞれ極大、または極小値となるのである。(普通 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ に選ぶ)。この場合の直角座標軸を主應力軸といい、また座標面を主應力面、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を主應力成分或は普通簡単に主應力という。

本節に述べた座標軸の轉換、主應力に就いてはなお詳細に後述するが、ここで簡単に應力の種類に就いて考えよう。

棒が單純に引張または壓縮を受けるときには主應力は一つだけ零でなく、他は全部零となる。すなわち引張のときには $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 、壓縮のときには $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ となる。この應力の状態を單軸應力という。この時には引張、壓縮を受ける面以外の界面での合成應力はすべてこの引張または壓縮應力の方向と一致している。そうしてこの方向に平行な界面では應力は全然存在しない。

棒が單純に捩りを受けているときには主應力は $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_1$ という形になる。このときを單純剪断應力という。これと前述の單軸應力とを合せて單

純應力ということもある。普通に棒に引張、壓縮、捩り、曲げを加える場合は各點の應力はこの單純應力のみとなるので、材料力學ではこれが主要部分を占めている。

主應力の一つだけが零であるときには、その應力状態を平面應力または二軸應力と名づける。この零となるのは $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の何れでも差支えはない。このときには零となる主應力面には垂直應力も剪斷應力もないから、全く應力が作用していない、そうして他の任意の界面での合成應力はすべてこの主應力面に平行している。薄い板であるとか、外力の作用していない物體表面ではこの應力状態になる。

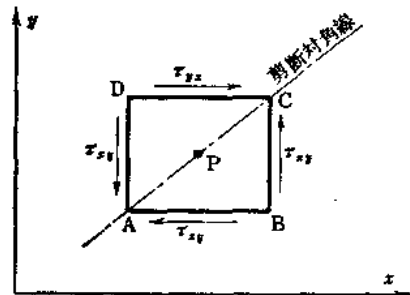
主應力が3個とも零でない一般の場合を立體應力または三軸應力という。

2・3 平面應力

平面應力で應力の零である面を座標面に取つて、その面上に x, y 軸を置く。そうして界面としてその面に垂直なものだけを考える。すると上述によつて、任意界面の應力はすべて xy 面内の方向に作用することになる。従つて應力成分としては $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ のみを考えればよいこととなる。單軸應力もまたこの場合の一特例であると看做せる。

この平面應力の場合に就いて、前節で證明なしに述べた事項に對して説明を加えることとしよう。

まず $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ であるが、或る點 P を含んで x, y 軸に平行な邊からなる微小長方形 $ABCD$ を第1圖のように考える。(この場合に z 方向には單位長さの厚さがあるものとし、 AB, BC はそれぞれ xy 面に垂直な界面と xy 面との交線であつて、それぞれの界面を表わしているものとする。以下でも同様であるから、この點を省略して記述する)。界面 AD, BC には



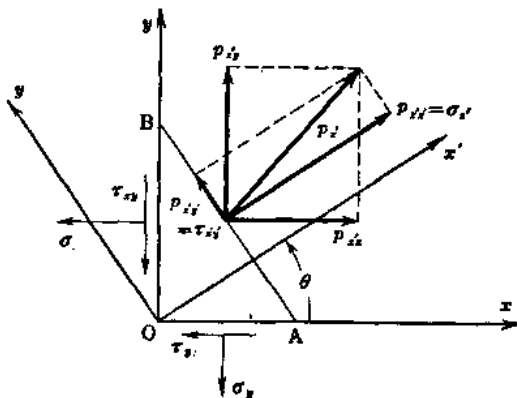
第1圖 共軛剪斷應力

剪斷應力 τ_{xy} が、また界面 AB, CD には剪斷應力 τ_{yx} が外部からこの長方形の部分に作用しているが、その正の場合にはそれぞれ圖示の向きになる。

さてP點の周りのモーメントの釣合を考えると τ_{xy} によるものは $\overline{AD} \times \overline{AB} \times \tau_{xy}$ であつて、 τ_{yx} によるものは $-\overline{AB} \times \overline{AD} \times \tau_{yx}$ である。釣合のためにはこれを加えて零となるべきだから

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3)$$

この式は x 、 y 面に垂直應力があり、また假りに z 面に應力があつても、上記のモーメントに無関係であるから、常に成立する。



第2圖 座標軸の轉換

次に座標軸の轉換であるが、第2圖のように x 、 y 軸から逆時計周りに θ だけ回轉した x' 、 y' 軸を考える。そうしてまず問題の點Oを頂點として、 x' 軸に垂直な底邊を持つ直角三角形OABを作る。そうして x' 、すなわち、AB面の應力 $p_{x'y'}$ を最初に x 、 y 軸に平行なものに分解する。この應力を $p_{x'x}$ 、 $p_{x'y}$ とする。OB面には σ_x 、 τ_{xy} が、OA面には σ_y 、 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ がそれぞれ正のときに圖示のようにこの三角形の部分に外から作用している。この應力による力の x 、 y 方向の釣合を考察すると、

$$-\overline{OB} \times \sigma_x - \overline{OA} \times \tau_{xy} + \overline{AB} \times p_{x'x} = 0$$

$$-\overline{OB} \times \tau_{xy} - \overline{OA} \times \sigma_y + \overline{AB} \times p_{x'y} = 0$$

ところで $\overline{OB}/\overline{AB} = \cos \theta$ 、 $\overline{OB}/\overline{AB} = \sin \theta$ であるから、

$$p_{x'x} = \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \quad (5)$$

なお第1圖で剪斷應力の矢印の集る頂點A、Cを結ぶ對角線を剪斷對角線と呼ぶことがある。すると剪斷應力の正のときにはこの剪斷對角線が第1と第3象限を通ることとなり、負のときには第2と第4象限を通ることになる。これで符號を見分けることもできる。

$$p_x'y = \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta$$

求めるものは $\sigma_x' = p_x'x'$ 、 $\tau_x'y' = p_x'y'$ であるが、これと $p_x'x$ 、 $p_x'y$ との関係は同じ p_x' の異なつた直交方向の二成分であるから、圖からも容易に判るように

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= p_x'x \cos \theta + p_x'y \sin \theta \\ \tau_x'y' &= -p_x'x \sin \theta + p_x'y \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

これを (5) 式に入れると

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \tau_x'y' &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (7)$$

同様にして

$$\begin{aligned} \sigma_y' &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \tau_y'x' &= \tau_x'y' \end{aligned} \quad (8)$$

これらの関係は三角形 OAB の大きさに無関係であるから極限として 0 を通る x' -面でも成立する。

上記の σ_x' の停留値を調べて見ると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x'}{\partial \theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \tau_x'y' = 0 \end{aligned}$$

で θ の値が定められ、すなわち σ_x' の停留値のときには $\tau_x'y' = 0$ となり、また

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (9)$$

から、 θ には直交する二つの値が得られる。 σ_x' の値は主応力 σ_1 、 σ_2 であるから、(7) 式に入れて

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10)$$

が得られる。

元の x 、 y の方向に無関係に同一の σ_1 、 σ_2 の値が得られることを考えると、或いはまた (7)、(8) 式から直接計算しても、次の式の左邊の値は直角座標を何れの方法に取つても一定値であることが判る。

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (12)$$

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \quad (13)$$

これを不変量という。ただし (12) と (13) とは何れか一つだけが独立である。そうしてそれぞれ右邊の主應力で表わした量に等しい。

これから容易に判ることは $\sigma_x \sigma_y > \tau_{xy}^2$ では二つの主應力は同符號で、 $\sigma_x \sigma_y < \tau_{xy}^2$ では異符號となることである。

なお主應力軸から逆時計周りに ϕ だけ回轉した軸が x, y 軸であるとするとき $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は次式で與えられる

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \phi + \sigma_2 \sin^2 \phi \\ \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \phi + \sigma_2 \cos^2 \phi \\ \tau_{xy} &= -(\sigma_1 - \sigma_2) \cos \phi \sin \phi \end{aligned} \quad (14)$$

または

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\phi \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\phi \end{aligned} \quad (15)$$

なお軸の轉換の場合に便利な式を誘導しておくこととする。 x, y 軸についての $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が與えられたとき、これを逆時計周りに ϕ だけ回轉した新しい軸 x', y' に就いての $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$ は (7), (8) 式で與えられるが、この間に次の關係がある。

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} + \sigma_{y'} &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_{x'} - \sigma_{y'} &= (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi + 2\tau_{xy} \sin 2\phi \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi \end{aligned} \quad (16)$$

その故に若し元の x, y 軸が主應力軸であつて $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \tau_{xy} = 0$ であると

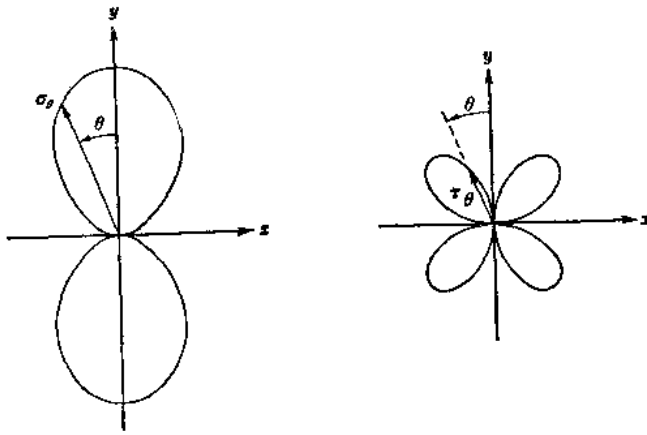
$$\begin{aligned} \sigma_{x'} + \sigma_{y'} &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_{x'} - \sigma_{y'} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\phi \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\phi \end{aligned} \quad (17)$$

と書くことが出来る。

2・4 平面応力状態の圖示

一つの界面での應力は、第2圖などでも圖示したように、物體の一部に他の部分から作用する力で表わされるから、ベクトルとして描けばよい。しかし一つの點での應力を圖示するとなると無数の界面があるから、そう簡単には行かない。それで種々の工夫考案がある。

2・4・1 極線圖 これはもつとも原始的なものであるが、垂直應力と剪斷應力とに就いて別個の線圖を作り、界面をその法線方向で表わし、原点からこの法線



單純引張の場合の
a) 垂直應力 b) 剪斷應力

第3圖 平面應力の極線圖

方向に垂直應力または剪斷應力の値を取つて、その端末を連ねた曲線を描くのである。すると問題とする界面での應力は原点からその界面の法線方向に線を引き曲線までの距離を取れば直に求められる。しかし應力の符號を表わすのに便利でない。例えばy方向の單純引張の場合は第3圖のようになる。引張の方向から逆時計周りに θ だけ回轉した法線を有する界面では圖のようにして σ_θ 、 τ_θ が求められる。

2・4・2 應力橢圓 これは各界面での應力の主應力軸方向の成分を座標に取つ