

金屬處理中的交流電解法

鞍鋼鋼鐵技術研究所

一九七九年一月

目 录

1.	金属处理中的紊流电磁软送	1
	第一部分：数学公式	1
2.	金属处理中的紊流电磁软送	19
	第二部分：实际应用	19
3.	用矩阵法计算铸件的固化	47
4.	作在线研究的均热炉动态模型	68
5.	钢铁界应该了解的断裂力学现状	82

金属处理中的紊流电磁输送

第一部分：数学公式（模型）

琼·崔堪雷 张新湖

一种描述感应炉中金属液紊流速度场的数学公式（模型）。其基础是诺维-斯托克斯方程，此方程允许用于空间分布的电磁力场。由麦克斯韦方程的电磁流体力学近似得出电磁体力场。对相对紊流情形将方程作了简化，也给出了计算方法的概要。

符号表

A = 矢量势

$A_\theta = \theta$ 方向的有界轴矢量势

B = 磁流密度

$B_r, B_z = r$ 和 z 方向的磁流密度

B_0 = 特征磁流密度

B_1, B_2 = 分别为在介质 1 和 2 中的磁流密度

E = 电场

f = 频率

F_b, F_r

F_θ, F_z = 体力矢量及其分量

H = 磁场强度

H_1, H_2 = 分别为在介质 1 和 2 中的磁场强度

~ 2 ~

J, J_0 = 电流密度及其在 δ 方向的分量

J_s = 表面电流

J_0 = 线圈电流的绝对值

k = 波数

L = 特征长度

$\hat{n}$ = 单位法矢量

P = 压力

r = 有界径向坐标

t = 时间

u_r, u_z = r 和 z 方向的有界速度

U_0 = 特征速度

V = 速度矢量

z = 有界轴坐标

δ = 方程 (30) 中所定义的表皮深度

λ = 波长

μ, μ_1, μ_2 = 分子粘度, 紊流粘度和有效粘度

μ_0 = 自由空间的磁率

$\frac{\rho}{\rho_0}$ = 旋涡流

ρ = 密度

σ = 电导率

τ = 包括层流和紊流的应力张量

ψ = 流函数

ω = 角频率

近年来, 对感应搅拌和感应炉在实验室和全工业性设备中的应用越来越感兴趣。

在有的情形, 主要目的是促进钢液搅拌如在 ASEA-SKF

炉系统的情形，而在另一些情形，主要是在铸造操作中，感应炉用来熔化固体（废钢）炉料。感应炉对许多应用都有吸引力，因为搅拌口和熔液之间没有直接接触，从而使耐火材料的磨损和盛装问题变得不那么尖锐了。

虽然感应搅拌在钢水处理中的应用很普遍并正在增加，但对实现感应搅拌的基本原理却只有不完全的了解；而且，没有提出代表流动现象和在这些系统中的混合的通用预测模型。一般说来，感应搅拌的钢水紊流系统中的流体流动可用下述诺维-斯托克斯方程的时间平滑的矢量形式来表示：

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_b \quad (1)$$

式中， $\mathbf{v}$ = 速度矢量

∇p = 压力梯度

$\boldsymbol{\tau}$ = 包括层流和紊流应力的应力张量

$\mathbf{F}_b$ = 表示电磁力场中的体力矢量，响应于流动和混合，

为了能够描述感应搅拌系统中的紊流场，就必须解方程(1)。这个偏微分方程的解由下两组问题：

(i) 麦克斯韦尔方程的电磁流体力学近似式必须求解，以便获得体力场 $\mathbf{F}_b^*$ 的一个表示式

(ii) 当知道了体力场，诺维-斯托克斯方程就可以积分了，然而，这是一项复杂的任务，因为求立体变化的紊流粘度值要求反复解几个联立微分方程。

在这两个问题领域中，以前已经做过大量的工作。

* 在某种条件下，不同于由电磁力场引起的体力场可能也是重要的，如重力和浮力（自然对流），但本文将不讨论这些——作者。

在过去廿年中，电磁流体力学领域已得到相当大的发展，因此，电磁力场的计算就剩下一个建立更为复杂的程序问题，此电磁力场是在电磁感应场中诱导出来的。

关于有限的几种几何形状将紊流诺维-斯托克斯方程进行了积分。最近，已经写了许多论文，讨论了循环流问题。

关于用于钢水处理的电磁输送循环流在文献中很少求出解来。在这方面，达马斯考斯和拉伐斯的工作已讨论过，他们俩人都考虑非粘性系统。Nakanishi 和 Szekely Szekely 和 Azzi 考虑了行进磁场感应起来的循环紊流，塔拉泊尔和艾伐斯则计算了由驻定磁场感应起来的循环紊流。从前述情形可以得出结论，处理在金属液中电磁输送紊流问题是复杂的和困难的问题，因为，为了得到解，就必须同时解复杂的电磁流体力学麦克斯韦尔方程和紊流诺维-斯托克斯方程，由于这个原因，限于作者的知识，本文不能对此问题作一般处理，而是对某些特殊情形求得方程的解。

这两篇文章的目的是发展描述关于钢液处理用的电磁输送循环系统的电磁力场和紊流液体流场的数学公式（模型）。

如下所述，这些问题在实践中极为重要。在许多情形，要求知道流体流场，以判定感应炉的混合情况，即熔池内附加料的弥散情况。在另一些情形，在流体流场中得到的信息代表着计算传热速率的一个必要的中间步骤（例如，在钢在感应炉中的熔化，或计算电渣重熔系统中的钢水池的形状等），夹杂质点的团聚，熔化速度对于固化结构的形态的影响及诸如此类问题的一个必要的中间步骤。在本文中，我们的注意将局限于电磁现象和流场现象，混合过程只是在通过实验测量来证实理论预测的范围内考虑。

关于文章的结构，第一部份致力于数学公式，而在第二下

文中给出了在金属处理的炭化问题中，模型方程的实际应用。

体力场——电动力学的计算

考虑如图1所示的装在感应炉内的熔体。通过线圈供给电流，我们要计算在导电熔体中所产生的体力场。

此体力场决定于线圈电流的密度，（熔体的）几何形状，和线圈的结构，可以根据麦克斯韦方程求出，麦氏方程描述了电场和感应磁力场之间的关系，根据应用于电动力学中的近似，我们有如下方程式：

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \times H = j \quad (3)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (4)$$

式中， E = 电场，伏/米

B = 磁流密度，韦伯/米²（或泰勒斯）

H = 磁场强度，安/米

j = 电流密度，安/米²

而且，我们有

$$B = \mu_0 H \quad (5)$$

这里， μ_0 是自由空间的导磁率，亨利/米。

最后，熔体中的感应电流密度由欧姆定律给出：

~ 6 ~

$$J \approx \sigma E$$

(6)*

式中, σ 是电导率, 西门子/米。电磁体力场 F_b 出现在方程 (1) 中, 可以从下面的方程得到:

$$F_b = J \times B \quad \text{-----} \quad (7)$$

方程 (1)~(7) 结合适当的边界条件和合适的确定 μ_0 的辅助关系, 提供了问题的完全说明。

原则上, 在求解过程中, 我们必须解方程 (2)~(6), 然后用方程 (7) 来得到体力场, 用取得的这些值来解方程 (1)。

这里引进一个矢势 A 是合适的, A 的定义是:

$$B = \nabla \times A \quad \text{-----} \quad (8)$$

$$E = - \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{-----} \quad (9)$$

而

$$\nabla \cdot A = 0 \quad \text{-----} \quad (10)$$

因为没有作用电压, 劳林森条件缩减到如上。

* 我们注意, 对于运动介质, 欧姆定律准确的表达式取如下形式:

$$J = \sigma (E + v \times B) \quad \text{-----} \quad (6a)$$

用于现在的情形, 方程 (6a) 右边的第二项已被忽略。这一假设是认为对反应搅拌金属熔体中所达到的条件是合理的; 而且, 这一假设已被证明, 对于这些条件来说, 与这些项的数量级相比, 这是一个尾数——原文注

~7~

通过合适的运算可以证明，方程(2)~(6)可简化如下：

$$\nabla^2 A = \mu_0 \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (11)$$

对于柱形对称，方程(11)可以进一步简化为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\partial A}{\partial t} = \mu_0 \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (12)$$

而 $A_r = A_z = 0$ 而 A_θ 与 θ 无关。

利用方程(6)，我们有：

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \quad (13)$$

$$\text{和} \quad B_r = - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \quad (14)$$

而且，从方程(6)和(9)，我们有：

$$J_\theta = - \sigma \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \quad (15)$$

因为 J 和 B 都只由 A 确定的，对合适的边界条件，方程(12)的解定义为电磁体力场是合适的。更准确地说，体力场的两个分量给出如下：

$$F_z = - J_\theta B_r \quad (16)$$

和

$$F_r = J_\theta B_z \quad (17)$$

而 $F_\theta = 0$

电磁边界条件

在解方程(12)~(15)中所遇到的一个主要的实际问题是对

~ B ~

由一定线圈形式和线圈电流所产生的电磁场，为了做到这一点，必须对方程(11)或(12)规定合适的边界条件。由于物理原因，这些边界条件必须用 H 或 B 表示出来，然后，通过用方程(13)~(15)改写成用 A 表示。

可以证明，在两种介质，例如介质 1 和 2 分离的边界上必须满足下列关系。在本文的情形，此边界条件对应于分离自由空间和金层熔体的界面，因为线圈和熔体之间夹进的其他介质（耐火材料，炉衬等）一般都忽略掉了。

因此，我们有

$$\hat{n} \cdot (B_1 - B_2) = 0 \quad \text{-----} \quad (16)$$

此式表示这样一个事实，在边界上，磁流密度的法向分量必须是它分变量的连续函数；而且，

$$\hat{n} \times (H_1 - H_2) = J_s \quad (17)^*$$

此式表示了这样一个事实，因为存在表面电流 J_s ，在磁场强度的切向分量中有一不连续性。如果我们象通常所做的那样假设线圈在坩埚壁是闭合的，那末，对给定的应用来说， J_s 当然是知道的。

用于表述这些边界条件的实际的方法必将依赖于电磁场的性质（驻波还是行驻波）；在后面的第 2 个分中将给出此类例子。

* 在许多实际情形中，在线圈和熔体之间存在几种夹入介质，诸如有几层耐火材料。正如拉克斯所讨论的，方程(16)和(17)已推广到了这些条件。当考虑耐火材料被流动着的熔融金属所浸蚀的情形，此类问题就变得具有特殊的重要性。

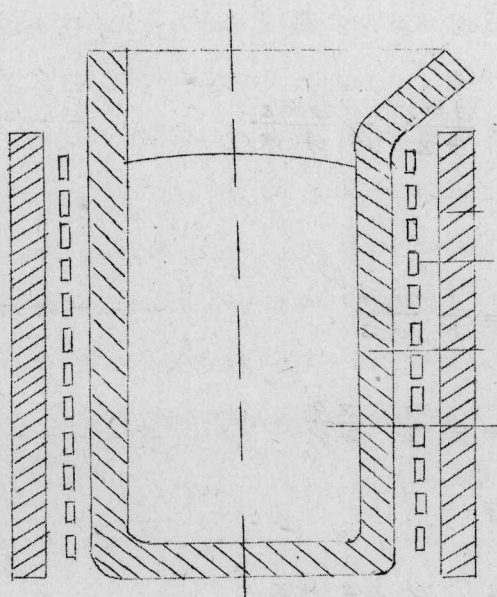


图 1、感应炉系统图

流体流动方程

素流诺维-斯托克斯方程一般表述式已在方程(1)中给出。
对于圆柱形对称来说，方程取如下形式：

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right] + J_0 B_z \quad \text{----- (20)}$$

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] - J_0 B_z \quad \text{----- (21)}$$

~ 10 ~

引进涡流, ξ

$$\xi = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad \text{----- (22)}$$

和流函数 ψ

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{----- (23)}$$

$$u_z = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{----- (24)}$$

运动方程写成为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\xi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) \\ & + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \xi) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (J_0 B_z) + \frac{\partial}{\partial r} (J_0 B_r) \right\} = 0 \quad \text{----- (25)} \end{aligned}$$

式中 $J_0 B_z$ 和 $J_0 B_r$ 是对圆柱对称的 $J \times B$ 的适当的项。

有效粘度定义为:

$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad \text{----- (26)}$$

这里 μ_t 是紊流粘度, 可以通过解紊流动能守恒方程和紊流漂移频率求得。包括在“两个方程模型”中所用的实际方法已经充分论述过了, 将不再进行讨论。然而, 我们注意, ξ 和 ψ 是通过下式联系起来的:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \xi = 0 \quad \text{----- (27)}$$

边界条件:

运动方程的边界条件必须表示出下列物理约束条件:

- (i) 在固体边界上两个速度分量都是零;
- (ii) 通过自由边界的剪力传输等于零, 即速度梯度等于零;
- (iii) 观察到关于中心线成对称。

因为运动方程 (25) 是用流函数和涡流写出来满足上述边界条件必须按这些量重写出来。

在固体边界上零速度的约束可由指定边界上的流函数是常数来满足, 在现在的情形是选择零。条件 (ii) 和 (iii) 也已经写成 ψ 的表示式。

用旋涡表示时, 条件 (ii) 被假定自由表面上旋涡是零所满足; 如在第 2 节分将要说明的, 固体表面上旋涡的表示式可以通过揭示局部剪应力和体力之间的关系而得到。关于中心线对称的约束是由令 $\psi = 0$ 来满足的。

求解技术

方程 (25) 和 (27) 结合与之相关的边界条件和定义化了的表示式代表了对问题的全个说明。求解过程经常是把这些量表示成无量纲形式, 然后解麦克斯韦尔方程以得到一有质动力场的表示式, 一旦知道了电磁力场, 然后就可以用迭代法解分运动方程 (25), 并与描述象流粘度的微分方程联立求解。

图 2 是一个计算机程序流程示意图。程序的详细叙述结合控制方程的有限差分形式可用于本文得以立论的论题。

然而, 计算机的时间要求必然决定于特殊应用, 对于 11×21 格栅, CDC 6400 型计算机的时间要求在 5~10 分钟量级内。

本文第 2 节分给出了计算结果的选择; 然而, 用讨论解的

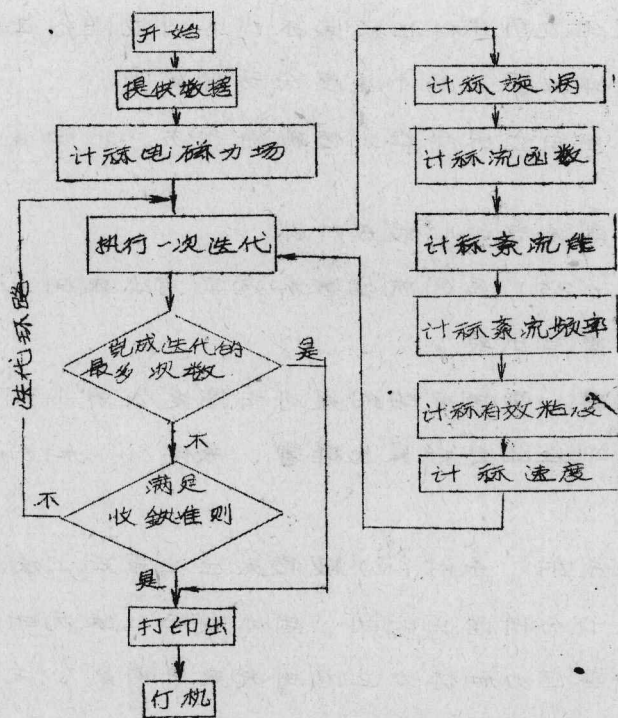


图 2. 计算机程序的简化示意图流程图

一般性质和以控制方程形式表示的主要参数之间的关系来推断此表示式是值得做的。

讨 论

场的性质

让我们重新考虑图 1 所示的感应炉。正如胡弗斯和杨所讨论的，在连接感应线圈时，可作两种基本形式的安排。其中一种形式产生行驻磁场，而另一种产生驻波磁场。

行进磁场的线圈电流由下式给出：

$$J_0 = J_0 e^{j(\omega t - Kz)} \quad \text{--- (28)}$$

而对于驻定磁场的表示式则为：

$$J_0 = J_0 e^{j\omega t} \sin Kz \quad \text{--- (29)}$$

式中， J_0 = 线圈电流的绝对值。

$$j = \sqrt{-1}$$

ω = 角频率，弧度/秒

K = 波数， $1/\lambda$

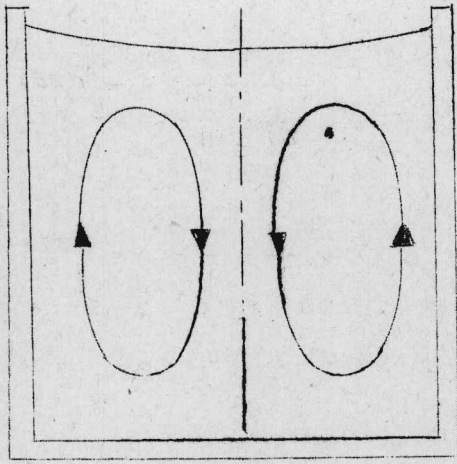
z = 轴坐标

t = 时间

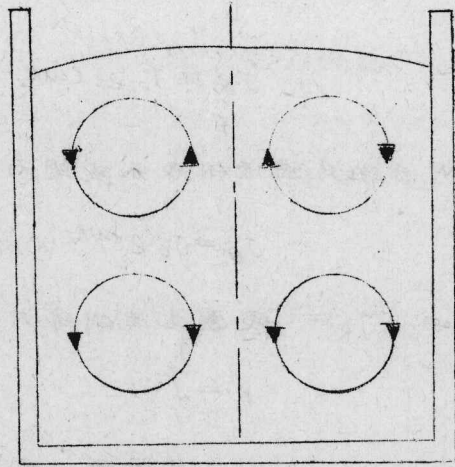
已经发现，对于 z 方向极为均匀的磁场来说，得到两个不同的流动图型表示出不同场的性质。这在图3中作了说明，从图中可以看到，对于行进场来说，可得到两个轴对称位环流（图3a和b），而驻定场产生四个环流（图3c）。从图3a和b也可以看到，当应用前进场时，在边壁附近的环流方向与场的行进方向相重合。必须强调，图3所示的流动场是理想化的，环流的详细图型必然依赖于线圈的图型。

注意，在大多数工业应用的情形，电磁场力场仅渗透进金属熔体的一段有限的深度，如图4所示，渗透的程度既决定于由线圈图型产生的电流频率，也决定于它的波长 λ 。频率较低时，渗透得较深，类似地，波长较长时，渗透得较深。

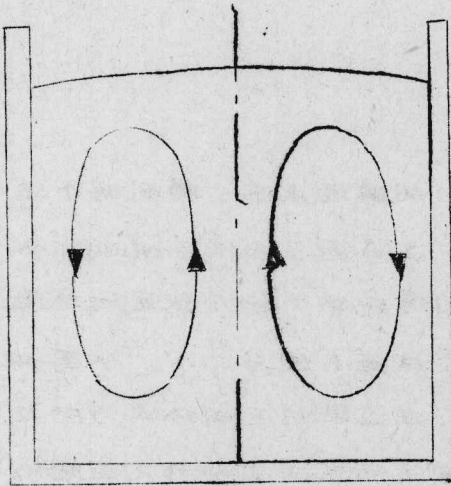
~ 14 ~



(a)



(c)



(b)

图 3, 由于 a) 向上行进的
磁场; b) 向下行进的磁场;
c) 驻定的磁场所产生的流统
示图

在边界层理论模拟中, 可以按如下方式确定一平均渗透距
离:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}} \quad \text{--- (30)}$$

式中, δ 表示渗透深度, σ 导电率, μ 导磁率, ω 频率越高, 其值越
小。

速度和线圈电流之间的关系

模拟感应炉中的流动场的一个重要目的是把线圈电流和速度联系起来，作为一个出发点，让我们把方程(1)和(7)组合起来得到：

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad \text{--- (31)}$$

如果惯性力占优势，例如在高雷诺数时，那么，作一次近似，我们可以忽略方程(31)右边的前两项。继而，我们若忽略下一项中的易的数易级。我们有：

$$\rho\{\mathbf{v} \cdot \nabla\} \mathbf{v} \approx \frac{\rho U_0^2}{L} \quad \text{--- (32)}$$

式中，

$U_0 = \text{特征速度}$

$L = \text{特征长度}$

$$\rho\{\mathbf{j} \times \mathbf{B}\} \approx \sigma B_0^2 f L \quad \text{--- (33)}$$

式中

$f = \omega/2\pi$ 是频率

取

$$B_0 \approx J_0 \mu_0 L \quad \text{--- (34)}$$

将方程(32)和(33)组合起来，我们有：

$$\frac{\rho U_0}{L} \approx \sigma f L^3 J_0^2 \mu_0^2 \quad \text{--- (35)}$$

即是：

$$U_0 \approx J_0 \sqrt{\frac{\sigma f}{\rho}} L^2 \mu_0 \quad \text{--- (36)}$$

这就表明，特征速度正比于线圈电流，也正比于频率的平方根，线圈电流和速度之间的线性关系也已被法拉根金娜和梯尔涅茨验证。最后，要对搅拌的性质作些讨论。