三 角 学

齐升才、周述岐编

本校内部使用

引　言

三角學與其他所有的科學一樣，也是在解決具體問題的過程中，由人類的實踐而成長起來的。它首創於希臘，當時由於天文學在航海和農業上的應用，便刺激了人類對它的研究。

具體的說，在解三角形時，有些問題（如測樹高等）還可藉平面幾何的定理如勾股弦定理及相似定理來解決，但又有些問題（如測河寬或不能直達被測之物體之問題）再用平面幾何的定理去處理即感困難，原因是在平面幾何中未很好的解決三角形的邊與角之間的關係，但這個問題在三角學中却是中心問題之一，另一就是關於三角函數性質的研究，此二者構成了一門完整的三角學。

這門科學在我國也曾有過一段光輝的歷史，據傳說遠在夏禹時代（公元前二一〇〇年左右），已經引用三角學的原理進行簡單的測量，且在公元二六三年劉徽著的「海島算經」一書中也應用三角學計算過相當複雜的測量問題，其中一部分原理到現在仍被應用於民間。

第一章　緒　論

1.1　角的單位

量角的單位通用的有六十分制與弧度制兩種。

1.六十分制：

把一個圓周分成 360 等份，每段弧所對的圓心角稱爲一度；把一度分成 60 等份，一份稱爲一分；把一分再分成 60 等份，一份稱爲一秒。如 3 度25分46秒記爲$3°25'46''$。一個周角等於$360°$。

2.弧度制：

在一圓周上截一與半徑等長的弧，此弧所對之中心角稱爲一弧度，如右圖。

若 $\overset{\frown}{AB}$ 的長等於半徑 OA 的長，則 $\angle AOB=1$ 弧度。因圓周之長爲 $2\pi R$($\pi=3.1416$)，相當半徑的 $\frac{2\pi R}{R}=2\pi$ 倍，所以一個周角等於 2π 個弧度。

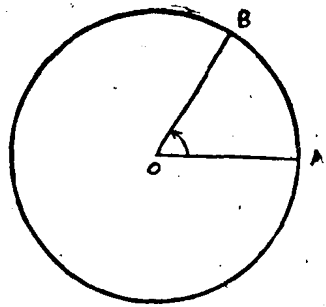

圖 1

3.度數與弧度數間的關係：

因一個周角等於 $360°$，又等於 2π 弧度，

所以 $360°=2\pi$ 弧度

並且可得 $180°=\pi$ 弧度

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}$$

$$1\text{弧度}=\frac{180°}{\pi}$$

以後在換算上經常用到的列表如下：

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

例 1：用弧度表示 $50°$ 和 $135°$ 的角。

［解］因 $1°=\frac{\pi}{180}$ 弧度（習慣上弧度二字可以省去）

所以 $50°=\frac{\pi}{180}\times 50=\frac{5\pi}{18}$

$$135°=\frac{\pi}{180}\times 135=\frac{3\pi}{4}$$

例 2：用度數表示 $\frac{\pi}{5}$ 和 $\frac{8\pi}{9}$ 的角。

因 1 弧度 $=\frac{180°}{\pi}$

所以 $\frac{\pi}{5}=\frac{180°}{\pi}\times\frac{\pi}{5}=36°$

$\frac{8\pi}{9}=\frac{180°}{\pi}\times\frac{8\pi}{9}=160°$

1.2 弧長

設中心角 θ ($\angle AOB$) 所對的弧長 $\widehat{AB}$ 爲 l, 半徑 $=R$, 依弧度的定義

即得 $\frac{l}{R}=\theta$ 弧度

於是 $l=R\cdot\theta$ (θ 須用弧度作單位)

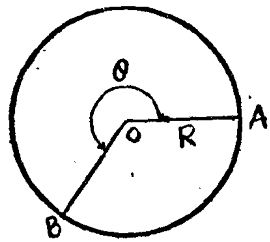

圖 2

例: 已知一圓的半徑爲 5 尺, 求中心角爲135°時所對的弧長。

〔解〕 $\because 135°=\frac{\pi}{180}\times 135=\frac{3\pi}{4}$

$\therefore l=R\cdot\theta=5\times\frac{3\pi}{4}=5\times\frac{3}{4}\times 3.1416=11.78$ 尺

習 題

1. 用弧度表示下列各角:
 15°, 22°30′, 36°, 75°, 108°, 150°。
2. 用度數表示下列各角:
 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $1\frac{1}{2}\pi$, 1.5, 0.75。
3. 圓半徑爲 5 公分, 求 18° 角所對的弧長。
4. 弧長爲50尺, 它所對的中心角如爲200°, 則圓的半徑爲若干尺?
5. 圓的半徑爲 2.4 公尺, 弧長爲 4 公尺, 求此弧所對之中心角爲若干度?

第二章　銳角三角函數

2.1 銳角三角函數的意義

1.在直角三角形中，任意二邊的比是角的函數。

設任一銳角$\angle SAT$，在AT上任取二點B、B'，作AS的垂綫BC與$B'C'$。

$\because \triangle ABC$與$\triangle AB'C'$相似

依幾何上相似三角形相當邊成比例的定理得：

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}$$

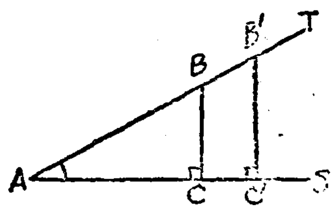

圖 3

故若A角一定，則任意二邊之比也一定，所以任意二邊的比是角的函數。這種函數值的大小，僅決定於角的大小，與邊的長短無關。

因爲三角形的三個邊可作出六種比值來，因此可以得出六種函數。爲了區別這六種函數，分別給與不同的名稱與符號。

2.銳角三角函數的定義：

在直角三角形ABC中，$\angle A$爲銳角，其大小以A表之，對應邊之長分別以a，b，c表之。則：

$\frac{a}{c}$叫做A角的正弦：$\sin A=\frac{a}{c}$，

$\frac{b}{c}$叫做A角的餘弦：$\cos A=\frac{b}{c}$，

$\frac{a}{b}$叫做A角的正切：$\tan A=\frac{a}{b}$，

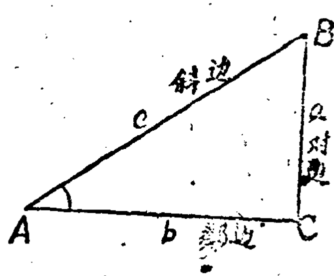

圖 4

$\frac{b}{a}$叫做 A 角的餘切： $\cot A=\frac{b}{a}$，

$\frac{c}{b}$叫做 A 角的正割： $\sec A=\frac{c}{b}$，

$\frac{c}{a}$叫做 A 角的餘割： $\csc A=\frac{c}{a}$。

正弦與餘弦，正切與餘切，正割與餘割互稱爲餘函數。又因 a 爲 A 角的對邊，b 爲 A 角的鄰邊，c 爲 A 角的斜邊，

故　$\sin A=\frac{對邊}{斜邊}$，　$\cos A=\frac{鄰邊}{斜邊}$；

$\tan A=\frac{對邊}{鄰邊}$，　$\cot A=\frac{鄰邊}{對邊}$；

$\sec A=\frac{斜邊}{鄰邊}$，　$\csc A=\frac{斜邊}{對邊}$。

例 1：已知直角三角形的二邊 $a=3$，$b=4$；求 A 角的六種函數。

〔解〕$\because \triangle ABC$爲直角三角形，依勾股弦定理：

$$c^2=a^2+b^2$$

則 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

$$\therefore \sin A=\frac{3}{5},\ \cos A=\frac{4}{5},\ \tan A=\frac{3}{4},$$

$$\cot A=\frac{4}{3},\ \sec A=\frac{5}{4},\ \csc A=\frac{5}{3}。$$

例 2：已知直角三角形的二邊 $b=5$，$a=10$；求 B 角的六種函數。

〔解〕$\because c=\sqrt{10^2+5^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

$$\therefore \sin B=\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos B=\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan B=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ \cot B=2,$$

$$\sec B=\frac{\sqrt{5}}{2},\ \csc B=\sqrt{5}.$$

2.2 同角三角函數間的關係

依三角函數的定義得：

1.倒數關係：依倒數的定義，則

$$\sin A\cdot\csc A=\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}=1\quad 即\sin A\cdot\csc A=1$$

$$\cos A\cdot\sec A=\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}=1\quad 即\cos A\cdot\sec A=1$$

$$\tan A\cdot\cot A=\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}=1\quad 即\tan A\cdot\cot A=1$$

2.分式關係：

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}=\tan A\quad 即\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{b}{a}=\cot A,\quad 即\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

3.平方關係：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

$$=1\quad (\because a^2+b^2=c^2)$$

即 $\sin^2A+\cos^2A=1$

注意：其中$\sin^2A$ 等即$(\sin A)^2$等。

$$1+\tan^2A=1+\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}=\left(\frac{c}{b}\right)^2=\sec^2A.$$

即 $1+\tan^2A=\sec^2A$

同樣 $1+\cot^2A=\csc^2A$，這些都是三角函數間的基本關係。

例1：已知 $\tan\theta=\frac{4}{3}$，求其他五種函數。

〔解〕根據本節的基本公式：

$$\because \tan\theta \cdot \cot\theta = 1 \quad \therefore \cot\theta = \frac{3}{4}$$

$$\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\therefore \sec\theta = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$\because \cos\theta \cdot \sec\theta = 1 \quad \therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\because \sin\theta \cdot \csc\theta = 1 \quad \therefore \csc\theta = \frac{5}{4}$$

例 2：用 $\sin\theta$ 表示其他五種函數。

〔解〕$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

例 3：證 $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = \sin^2\theta$。

〔證明〕根據代數公式 $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

則 $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$

$\therefore (1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = \sin^2\theta$

例 4：證 $(1+\cot^2\theta)\cdot\sin^2\theta = 1$。

［證明］ $(1+\cot^2\theta)\cdot\sin^2\theta=\csc^2\theta\cdot\sin^2\theta$

$$=(\csc\theta\cdot\sin\theta)^2=1$$

$\therefore\ (1+\cot^2\theta)\cdot\sin^2\theta=1$

2.3 餘角三角函數間的關係

在直角三角形中，$\because A+B=90°$，則A、B二角互爲餘角。

$\because \sin A=\dfrac{a}{c}=\cos B$，$\cos A=\dfrac{b}{c}=\sin B$

$\tan A=\dfrac{a}{b}=\cot B$，$\cot A=\dfrac{b}{a}=\tan B$

$\sec A=\dfrac{c}{b}=\csc B$，$\csc A=\dfrac{c}{a}=\sec B$

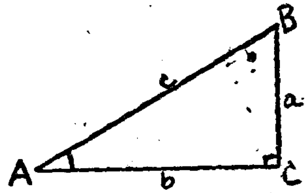

圖 5

又因 $A=90°-B$ （$90°-B$ 與 B 互爲餘角）

則得 $\sin(90°-B)=\cos B$，$\cos(90°-B)=\sin B$

$\tan(90°-B)=\cot B$，$\cot(90°-B)=\tan B$

$\sec(90°-B)=\csc B$，$\csc(90°-B)=\sec B$

綜合以上結果得：一角的函數等於其餘角的餘函數。

例：化簡$\sin30°\cdot\sec60°-\cos20°\cdot\csc70°$

［解］ $\sin30°\cdot\sec60°-\cos20°\cdot\csc70°=\cos60°\cdot\sec60°$

$$-\sin70°\cdot\csc70°=1-1=0$$

2.4 銳角三角函數值的變化

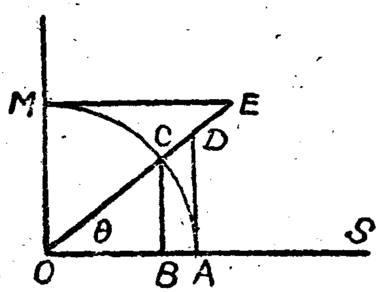

圖 6

1.銳角三角函數值的綫段表示法：

在$\angle SOE$的OS邊上取一單位長OA，自OA開始，以O爲圓心，OA爲半徑作$\frac{1}{4}$個單位圓，與OE邊的交點爲C，作圖如下：

令 $\angle SOE=\theta$

因$\triangle OBC$，$\triangle OAD$，$\triangle OEM$全相似，又$\because OA=OC=OM=1$

$$\therefore \sin\theta = \frac{BC}{OC} = BC$$ BC綫段叫做正弦綫段

$$\cos\theta = \frac{OB}{OC} = OB$$ OB綫段叫做餘弦綫段

$$\tan\theta = \frac{BC}{OB} = \frac{AD}{OA} = AD$$ AD綫段叫做正切綫段

$$\cot\theta = \frac{OB}{BC} = \frac{ME}{OM} = ME$$ ME綫段叫做餘切綫段

$$\sec\theta = \frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA} = OD$$ OD綫段叫做正割綫段

$$\csc\theta = \frac{OC}{BC} = \frac{OE}{OM} = OE$$ OE綫段叫做餘割綫段

注意：這裏所談的六個綫段僅分别表示各函數值的大小。

2.角由0°變化到 90° 時，三角函數值的變化：

因爲三角函數值全可以用同一單位圓的特殊綫段表示，現在我們就借用單位圓的特殊綫段來研究三角函數值的變化。

在圖7——9三圖中，我們看到當 θ 角由0°增至 90° 時，BC，AD，OD 漸漸增大，而OB，ME，OE 漸漸減小。故當 θ 角由0°變化到 90° 時，正弦、正切、正割的值漸漸增大，餘弦、餘切、餘割的值漸漸減小。

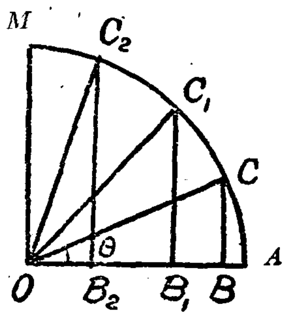

圖 7

當 θ 角由0°增大到90°時，BC 變爲 1，OB 變爲 0，AD 變爲∞，ME 變爲 0，OD 變爲∞，OE 變爲 1。$\therefore \sin 90° = 1$，$\cos 90° = 0$，$\tan 90°$ 不存在，$\cot 90° = 0$，$\sec 90°$ 不存在，$\csc 90° = 1$。

又當 θ 由 90° 變化到 0° 時，BC、AD、OD亦隨之變小，而OB、ME、OE 則漸漸增大。$\therefore \sin 0° = 0$，$\cos 0° = 1$，$\tan 0° = 0$，$\cot 0°$不存在，$\sec 0° = 1$，$\csc 0°$不存在。

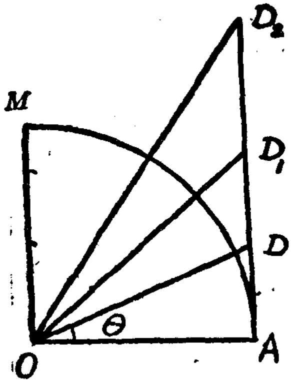

圖 8

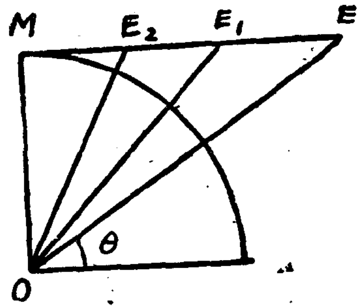

圖 9

小結：當 θ 角由 0° 增大到 90° 時，則各三角函數值的變化如下表：

函數值 角 / 函數	0°	↗	90°
sin	0	↗	1
cos	1	↘	0
tan	0	↗	∞
cot	∞	↘	0
s	1	↗	∞
csc	∞	↘	1

2.5 銳角三角函數值的求法

1.特別角函數值的求法：

（1）45°角的三角函數值：

在等腰直角三角形ABC中，若令$BC=AC=1$

則 $\angle A=\angle B=45°$,

$AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

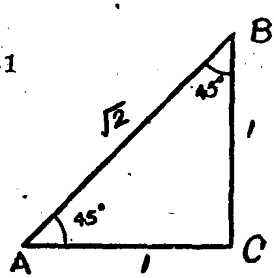

圖 10

$\tan 45° = 1$

$\cot 45° = 1$

……………

（2）30°角和60°角的三角函數值：

由等邊三角形ABC的頂角C作分角綫CD交底邊AB於D，則CD垂直且平分AB。於是在直角三角形ADC中

$A=60°$，$\angle ACD=30°$

如令　$AD=1$　則$AC=2$

$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}$

$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\therefore \sin 30° = \frac{1}{2}$，

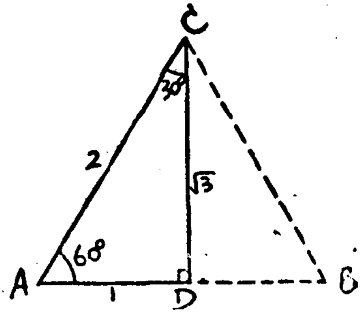

圖　11

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cot 30° = \sqrt{3}$……

同時　$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60° = \frac{1}{2}$，$\tan 60° = \sqrt{3}$，

$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$……

小結如下表：

函數值 角 / 函數	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707$	$\frac{1}{2}=0.5$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577$	1	$\sqrt{3}\approx 1.732$
cot	$\sqrt{3}\approx 1.732$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577$

例1：化簡 $2\sin 30^\circ+3\cos 60^\circ+\tan 45^\circ$。

〔解〕 $2\sin 30^\circ+3\cos 60^\circ+\tan 45^\circ$

$$=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}+1=3\frac{1}{2}$$

例2：化簡 $2\tan^2 45^\circ-\sin^2 30^\circ-\sin^2 60^\circ$。

〔解〕 $2\tan^2 45^\circ-\sin^2 30^\circ-\sin^2 60^\circ$

$$=2\times 1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=1$$

例3：化簡 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 45^\circ-\frac{\sqrt{3}}{3}\tan 30^\circ+\sqrt{3}\cos 60^\circ$。

〔解〕 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 45^\circ-\frac{\sqrt{3}}{3}\tan 30^\circ+\sqrt{3}\cos 60^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+3\sqrt{3}}{6}$$

2.三角函數表的查法：

上面談到的僅是些特別角的三角函數值，在求一般銳角三角函數值時，須用三角函數表。這種表的形式有許多種，現在只就本講義所附的一種來說明它的用法，但應注意其中絕大多數的三角函數值都是近似值。

（1）由角求三角函數值。

例1：求 $\sin 32^\circ$ 的值。

〔解〕在求小於 45° 角的函數值時，由表的左旁自上而下找出 32°，再從表的上方找出 $\sin$；由左向右，由上向下交叉處的數0.5299，就是 $\sin 32^\circ$ 的值。

例2：求 $\cot 63^\circ$ 的值。

〔解〕在求大於 45° 角的函數值時，由表的右旁自下而上的找出 63°，再從表的下方找出 $\cot$；由右向左，由下而上交叉處的數0.5095，就是 $\cot 63^\circ$ 的值。

$\therefore \cot 63^\circ=0.5095$

例3：求 $\tan 78°$ 的值。

［解］$\tan 78° = 4.7046$

（2）由三角函數值求角：

例1：已知 $\cos\theta = 0.8746$，求 θ 角。

［解］先在 cos 行內由下而上的找出0.8746，自該數向左與度數行的 29° 相交，知 $\cos 29° = 0.8746$，$\therefore \theta = 29°$。

例2：已知 $\tan\theta = 1.4281$，求 θ 角。

［解］當在表的上方 tan 行內自上而下的找不出 1.4281 時，則由表的下方 tan 行內自下而上的去找，找到恰有該數，則自該數向右與度數行的55°相交，知 $\tan 55° = 1.4281$，$\therefore \theta = 55°$。

例3：已知 $\cot\theta = 0.4040$，求 θ 角。

［解］由表中查出 $\theta = 68°$

3.插補法：

例1：求 $\tan 22°30'$ 的值。

［解］如在表中不能直接找出，則用插補法去求。

先找出 $\tan 22° = 0.4040$

再找出 $\tan 23° = 0.4245$

當角增加60′時，函數值增加0.0205

令角增加30′時，函數值增加爲 x

依比例 $60' : 30' = 0.0205 : x$

$$\therefore x = \frac{30 \times 0.0205}{60} = 0.01025$$

$\therefore \tan 22°30' = 0.4040 + 0.01025 = 0.41425$

例2：求 $\cos 62.25°$ 的值。

［解］先找出 $\cos 62° = 0.4695$

再找出 $\cos 63° = 0.4540$

當角增加1°時，函數值減小0.0155

令角增加0.25°時，函數值減小爲 x

則 $1° : 0.25° = 0.0155 : x$

$\therefore x = 0.0039$

$\therefore \cos 62.25° = 0.4695 - 0.0039 = 0.4656$

例3：已知 $\sin\theta = 0.4478$，求 θ 角。

〔解〕當在 sin 行內找不到 0.4478 時，則先找出比它略小的數 0.4384 與比它略大的數 0.4540，它們的角為 $26°$ 與 $27°$。

由 $sin26° = 0.4384$

$sin27° = 0.4540$

當函數增加 0.0156 時，角增加 $60'$

令函數值增加 0.0094 時，角度的增加數為 x

則 $0.0156 : 0.0094 = 60' : x$

$x = 36'$

$\therefore \theta = 26°36'$

例 4：已知 $cot\,\theta = 0.7211$，求 θ 角。

〔解〕由 $cot55° = 0.7002$

$cot54° = 0.7265$

當函數值增加 0.0263 時，角度減小 $60'$

令函數值增加 0.0209 時，角度減小 x

則 $0.0263 : 0.0209 = 60' : x$

$x = 48'$

$\therefore \theta = 55° - 48' = 54°12'$

2.6 直角三角形的解法

在直角三角形中，若知二邊長或知一邊長及一銳角，則利用銳角三角函數的定義，便可求出其他元素，這種由三角形的已知元素求其未知元素叫做解三角形。

例 1：設已知一直角三角形的 $c = 267$，$A = 35°$，解此三角形。

〔解〕因 $A + B = 90°$

$\therefore B = 90° - A = 90° - 35° = 55°$

又 $\because sinA = \dfrac{a}{c}$

$\therefore a = c \cdot sinA = 267 \times sin35° = 267 \times 0.5736 = 153.15$

$\because cos\,A = \dfrac{b}{c}$

$\therefore b = c \cdot cosA = 267 \times cos35° = 267 \times 0.8192 = 218.73$

例 2：設已知一直角三角形的二邊 $a = 14$，$b = 15$，解此三角形。

〔解〕$\because tanA = \dfrac{a}{b} = \dfrac{14}{15} = 0.9333 \quad \therefore A = 43°$