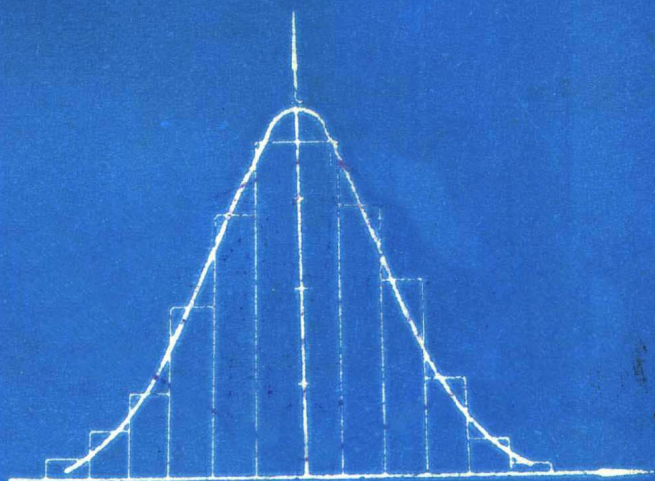


报考硕士研究生 高等数学函授教材

第五册

1985年研究生高等数学入学试题汇解



安徽大学数学系函授部

一九八五年七月

目 录

1 中国科学院 (Ⅲ)	(1)
2 中国科技大学 (甲)	(5)
3 中国科技大学 (乙)	(10)
4 上海交大 天津大学 华中工学院 华南工学院 西安交大 浙江大学 南京大学 哈尔滨工大(I)	(14)
5 上海交大 天津大学 华中工学院 华南工学院 西安交大 浙江大学 南京大学 哈尔滨工大(Ⅲ)	(18)
6 清华大学	(21)
7 厦门大学 (仪器仪表, 分析仪器)	(27)
8 厦门大学 (海洋物理)	(30)
9 厦门大学 (自然辩证法)	(36)
10 安徽大学 (计算机软件)	(38)
11 安徽大学 (I)	(41)
12 安徽大学 (I)	(46)
13 安徽大学 (自然辩证法)	(50)
14 华侨大学	(52)
15 新疆大学 (植物生态学)	(56)
16 新疆大学 (自然地理学)	(57)
17 湖南大学	(61)
18 重庆大学	(65)
19 合肥工业大学 (I)	(68)
20 合肥工业大学 (I)	(70)

21合肥工业大学(Ⅱ)	(74)
22北京航空学院	(80)
23机械工业部研究院(甲)	(83)
24成都电讯工程学院	(37)
25长春光学精密机械学院(机械制造, 光学仪器)	(92)
26长春光学精密机械学院(光电技术)	(96)
27沈阳机电学院	(98)
28武汉钢铁学院	(102)
29鞍山钢铁学院	(107)
30大连轻工业学院	(111)
31太原重型机械学院	(115)
32吉林工学院	(122)
33浙江工学院	(128)
34安徽工学院	(131)
35内蒙古工学院	(136)
36江苏工学院	(142)
37吉林工业大学	(146)
38昆明工学院	(151)
39武汉工学院	(155)
40河北工学院	(158)
41贵州工学院	(164)
42新疆工学院	(170)
43白求恩医科大学(理科)	(175)
44白求恩医科大学(医科)	(178)
45华南农业大学	(180)
48安徽农学院(工科)	(194)
46新疆石河子农学院	(183)
49安徽农学院(农学)	(199)
47上海财经学院	(188)
50北京农业大学	(203)

1 中国科学院 (85) (II)

一、(10分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(x-2y)}{x-2y}, & \text{当 } x \neq 2y \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 2y \text{ 时} \end{cases}$

求函数 $z = f(x, y)$ 的间断点。

【间断点集为 $\{(x, y) | x - 2y = 0, x \neq 0\}$ 】

二、(10分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \int_0^x e^{t^2} dt) / (x^2 \sin 2x)$

(e 为自然对数之底)

【原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \int_0^x e^{t^2} dt) / (2x^3) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{x^2}) / 6x^2$
= $-1/6$ 】

三、(10分) 设 A 为实对称阵, 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.

【由实对称阵的性质知存在正交阵 T , 使得 $TAT' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 故 $TA^2T' = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) = 0$, 因此 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, 即 $TAT' = 0$, 所以 $A = 0$ 】

四、(10分) 某人掷不均匀钱币, 出现反面的概率为 P , $0 < P < 1$, 求两次出现反面之间出现正面次数的概率分布和数学期望。

【以 ξ 记在两次出现反面之间出现正面的次数, 则

$$P\{\xi = K\} = (1-P)^K P, K = 0, 1, 2, \dots. E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} K(1-P)^K P$$

$$P)^K P = (1-P)/P$$

五、(10分)求常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -2x_3 \end{cases}$$

的通解。

【设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ，由 $\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 4) \cdot$

$(\lambda + 2)$ 得特征根为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ ，相应的特征向量

为 $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，故其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

六、(12分)求曲线积分 $\oint_C \frac{(x+4y)dy + (x-y)dx}{x^2 + 4y^2}$ 之

值，其中 C 为单位圆周正向。

【令 $x = \cos\theta, y = \sin\theta, 0 < \theta \leq 2\pi$ ，则

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 3\sin^2\theta} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{3\sin\theta\cos\theta}{1 + 3\sin^2\theta} d\theta = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 2 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{1 + 3\sin^2\theta} = 2 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 + \tan^2\theta}{1 + 4\tan^2\theta} d\theta$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \arctg 2x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$$I_2 = 0, I = \pi$$

七、(10分) 设 $f(x)$ 是可微函数, $f'(0) < 0, f'(1) > 0$, 求证存在点 $C \in (0, 1)$ 使 $f'(C) = 0$ 。

【由 $f'(0) < 0$, 所以存在 x_1 使 $f(x_1) < f(0), 0 < x_1 < 1$ 。同样由 $f'(1) > 0$, 存在 x_2 使 $f(x_2) < f(1), 0 < x_2 < 1$ 。故 $f(x)$ 的最小值点不是区间端点) 必在内点 C 取到, 这时由 $f(x)$ 可导即得 $f'(C) = 0$ 。(此时最小值点必为极小值点)。

$$\text{八、(12分) 已知 } \arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (|x| < 1),$$

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)} (|x| \leq 1)$ 之和。

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)} \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right) (-1)^n x^{2n+1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^n}{n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= -x \ln(1+x^2) - 2 \arctg x + 2x \end{aligned}$$

九、(16分) 设 $f(x) = (x^2 - 1)^n$, n 为正整数

$$\begin{aligned} (1) \text{ 证明: 当 } k \text{ 为小于 } n \text{ 的正整数时 } f^{(k)}(1) &= \\ &= f^{(k)}(-1) = 0, \text{ 且 } f^{(n)}(1) = 2^n n!, \quad f^{(n)}(-1) \\ &= (-2)^n n! \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 求 } \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ 和 } \int_{-1}^1 [f^{(n)}(x)]^2 dx \text{ 之值。}$$

【(1)】由莱布尼兹公式

$$\begin{aligned} f^{(s)}(x) &= \sum_{m=0}^s C_s^m [(x-1)^{s(m)}] [(x+1)^{s(s-m)}] \\ &= \sum_{m=0}^s C_s^m m!(s-m)! (x-1)^{s-m} (x+1)^{s+m-s} \end{aligned}$$

令 S 分别取 n 和 k 得

$$f^{(n)}(1) = \sum_{m=0}^n C_n^m m!(n-m)! (1-1)^{n-m} (2)^{n+m-n}$$

$$= C_n^n n! 2^n = 2^n n!$$

$$f^{(n)}(-1) = C_n^n n! (-1-1)^n = (-2)^n n!$$

$$f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0 \quad (\text{因 } n-m \geq n-k \geq 1, \quad n+m-S \geq n-k \geq 1).$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx = (-1)^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} x \cdot \\ &\quad \cdot d\sin x = I_{2n+1}. \end{aligned}$$

分部积分得 $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$, 递推可得

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = (-1)^n \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2$$

$$\int_{-1}^1 [f^{(n)}(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) df^{(n-1)}(x)$$

$$= - \int_{-1}^1 f^{(n-1)}(x) f^{(n+1)}(x) dx$$

$$= \cdots = (-1)^n \int_{-1}^1 f(x) f^{(2n)}(x) dx$$

$$= (2n)! (-1)^n \int_{-1}^1 f(x) dx = (2n)! \frac{2n}{2n+1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 2$$

$$= 2 \cdot \frac{(2^n n!)^2}{2n+1}$$

2 中国科技大学 (85) (甲)

一、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

$$1. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} [\ln(1+2x)]/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

则常数 $a =$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

【 $a = 2$ 时。

2、设 a, b 是常数, $u = x \sin(ax - byz)$, 则 $\text{grad } u =$

$$[\text{grad } u = [\sin(ax - byz) + ax \cos(ax - byz)] \vec{i} - bxz \cos(ax - byz) \vec{j} - bxy \cos(ax - byz) \vec{k}]$$

3、设 $w = \sqrt{z}$ 确定在以正虚轴为支割线割开的 Z 平面上, 且 $w(1) = -1$, 则在支割右岸的 i 点, $w(i) =$

$$\text{【} w(i) = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i)\text{.} \text{】}$$

$$4. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ 则 } f^{(50)}(0) =$$

$$\text{【} f^{(50)}(0) = -1/51 \text{】}$$

二、(共 26 分) 1、已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 绝

对收敛。

$$\text{【因 } \left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + a_n^2 \right), \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 收敛, 故}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ 绝对收敛} \text{】}$$

2、求曲线 $x=4t/3, y=t^2, z=t^3$ 上的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ，使在该点处曲线的切线平行于平面 $x+2y+z=6$ 。

【所给曲线的切向量 $\{x', y', z'\} = \{4/3, 2t, 3t^2\}$

依题意有 $1 \cdot 4/3 + 2 \cdot 2t_0 + 1 \cdot 3t_0^2 = 0$ ，得 $t_0 = -2/3$ 。

故所求点为 $(-8/9, 4/9, -8/27)$ 。

3、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，问A能否相似于对角阵，为何？

何？

【由 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 解得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ ，即A的三个特征根不同，故A相似于实对角阵。

4、试将复函数 $f(z) = 1/(z^2 - 3z + 2)$ 在点 $z=0$ 展开为Taylor级数，并求其收敛域。

$$【f(z) = 1/(1-z) - \frac{1}{1-z/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) z^n$$

收敛域为 $|z| < 1$ 。

三（10分）设物体的密度 $\rho(x, y, z) = \rho_0 \exp(-k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ （其中 $\rho_0 > 0, k > 0$ 为常数），求占有无限域 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ 的物体的质量。

$$【所求质量为 M = \rho_0 \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \geq 1} \exp(-k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \cdot dx dy dz$$

（其中 $\exp(x) = e^x$ ）

作变换： $x = r \cos \theta \cos \varphi, y = r \cos \theta \sin \varphi, z = r \sin \theta$ 。

$$\begin{aligned} \text{则 } M &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_1^{\infty} e^{-k r} r^2 dr \\ &= 4\pi \rho_0 e^{-k} (k^2 + 2k + 2) / k^3. \end{aligned}$$

四、(10分) 设A是n阶正交且正定矩阵, 证明A必是单位矩阵。

【因 $A'A=E$, $A'=A$ (A对称), 故 $A^2=E$, 所以A的特征根为 ± 1 , 又A正定, 特征根均大于0, 故特征根全为1, 从而存在正交阵T使

$$A = T' \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} T = E, \text{ 即A为单位矩阵。}$$

五、(10分) 问分式线性变换 $w = (2z-i)/(2iz-1)$ 把Z平面上的区域 $\text{Im}z < 0$ 映射成w平面上的什么区域(要说明理由)?

【 $w = (2z-i)/(2iz-1) = -i(z-\frac{1}{2}i)/(z+\frac{1}{2}i)$ 将 $z=0, 1, \infty$ 分别变成 $w=i, \frac{1}{2}(-4-3i), -i$, 故把z平面上实轴变为W面上单位圆, 又将 $z=-\frac{1}{2}i$ 变为 ∞ , 根据线性变换保对称点的性质知, 它把Z平面上 $\text{Im}z < 0$ 保形变换成W平面上单位圆的外部 $|w| > 1$ 。

六、(14分) 解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} - 2hu_t, & 0 < x < \pi, h \text{ 为常数}, 0 < h < 2, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = x(\pi-x), u_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

【设 $u(t, x) = T(t)X(x)$, 那么 $T(t), X(x)$ 满足

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (1)$$

$$T''(t) - 2hT'(t) + 4\lambda^2 T(t) = 0 \quad (2)$$

方程(1)满足 $X(0) = X(\pi) = 0$ 的特征值 $\lambda_n = n$, 特征函数为

$$X_n(x) = \sin nx, n=1, 2, \dots$$

方程(2)的解为 $T_n(t) = A_n e^{h^2 t} \sin \sqrt{4n^2 - h^2} t + B_n e^{h^2 t} \cdot$

$\cos \sqrt{4n^2 - h^2} t$, 所以原方程的形式解为: $u(x, t) =$

$$= e^{h^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin \sqrt{4n^2 - h^2} t + B_n \cos \sqrt{4n^2 - h^2} t] \sin nx,$$

由 $u(0, x) = x(\pi - x)$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx = x(\pi - x)$, 故

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx dx = 4[1 + (-1)^{n-1}]/n^3\pi$$

又由 $u_t(0, x) = 0$ 得

$$b \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{4n^2 - h^2} \sin nx = 0$$

于是 $A_n = -hB_n/\sqrt{4n^2 - h^2}$, 最后得原问题的解为

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} e^{at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^3} [\sin \sqrt{4n^2 - h^2} t - \frac{h}{\sqrt{4n^2 - h^2}} \cos \sqrt{4n^2 - h^2} t] \sin nx.$$

七、(10分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1、证明 $n \geq 3$ 时, $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$ (E 为三阶单位阵)

2、求 A^{100} .

【1、 A 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)$

从而 $f(A) = (A^2 - E)(A - E) = 0$, 因 $n \geq 3$ 时

$$\lambda^n - \lambda^{n-2} - \lambda^2 + 1 = f(\lambda)g_n(\lambda)$$

故 $A^n - A^{n-2} - A^2 + E = f(A)g_n(A) = 0$,

即 $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$.

2、由 1 递推得 $A^{100} = 50A^2 - 49E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

八、(10分) 设 $f(z)$ 在圆域: $|z| < R$ 内解析, 且 $f(z)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \quad C_n \text{ 为复常数.}$$

1. 证明: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 r^{2n}, \quad (r < R)$

2. 设 $\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r)$, 证明

$$|C_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

【1. 因 $|f(re^{i\varphi})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n e^{in\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_n} r^n e^{-in\varphi}$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} C_j \overline{C_k} r^{j+k} e^{i(j-k)\varphi}$$

当 $j \neq k$ 时 $\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)\varphi} d\varphi = 0$, 而 $r < R$ 时上面级数绝对收

敛可逐项积分

$$\text{故 } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \overline{C_n} r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 r^{2n}$$

2. 由柯西不等式 $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}$, 而 $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$\text{故 } |C_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

九、(10分) 用 Laplace 变换方法解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0, x > 0 \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = f(t) \end{cases}$$

【把X看成参变量，作 $u(t, x)$ 关于 t 的Laplace变换：

$$L(u, t, x) = \bar{u}(p, x) = \int_0^{\infty} u(t, x) e^{-pt} dt,$$

于是原问题化为，

$$\begin{cases} p^2 \bar{u} = a^2 \bar{u}'', \\ \bar{u}(p, 0) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = L(f) \end{cases}$$

通解为 $\bar{u} = C_1 e^{-px/a} + C_2 e^{px/a}$ ，要求解有界，故 $C_2 = 0$

于是 $\bar{u} = L(f) e^{-px/a}$ ，由卷积公式知

$$u(t, x) = e^{-x/a} \int_0^t f(u) e^{xu/a} du.$$

3 中国科技大学(85)(乙)

1、(12分) 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \cos x)/x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \int_0^{x^2} \cos t^2 dt / x & x > 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 的连续性和可微性。

【由洛必达法则得：

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \cos x^4 = 0 = f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续。

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos x^4}{2x} = 1$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可微。

2、(10分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$ 。

【当 $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, 比较两

幂级数对应项的系数有 $f(0) = 0, f'(0) = 0$,

$f^{(n)}(0) = n!$, $(n = 2k)$, $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 2k+1)$ $(k \geq 1)$

3、(12分) 设 $u = u(x, y)$ 有连续的二阶偏微商, 且 $x = e^t \cos t$,

$y = e^t \sin t$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 。

$$\left[\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = e^t \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + e^t \sin t \frac{\partial u}{\partial y} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= e^t \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2t} \cos^2 t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{2t} \sin t \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ &\quad + e^t \sin t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{2t} \sin^2 t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -e^t \sin t \frac{\partial u}{\partial x} + e^t \cos t \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -e^t \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2t} \sin^2 t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2e^{2t} \sin t \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ &\quad - e^t \sin t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{2t} \cos^2 t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{2t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

4、(12分) 在区间 $[0, 2]$ 上展开函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

为余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos \frac{2k\pi}{2} x dx = \int_0^1 x \cos k\pi x dx + \\ &+ \int_1^2 (2-x) \cos k\pi x dx = \frac{2}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1], \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = 1$$

$$b_k = 0, \quad k \geq 1$$

$$\text{从而 } f(x) \text{ 的余弦级数为 } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1] \cos k\pi x$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos(2k-1)\pi x.$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 则 } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \pi^2/8$$

$$\text{故由 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}, \text{ 得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$$

$$5、(10分) \text{ 计算积分 } \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx.$$

$$\text{【令 } \tan x = t^2, \text{ 则 } I = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = 2 \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

$$= \sqrt{2} \pi / 2.$$

6、(10分) 计算曲线积分 $\oint_C x^2 y dx + y^2 x dy$
其中C为依反时针方向通过闭路 $|x| + |y| = 1$

$$\text{【由格林公式 } I = \iint_D (y^2 - x^2) dx dy$$

(其中D为区域: $|x| + |y| \leq 1$)

$$= \iint_D y^2 dx dy - \iint_D x^2 dx dy$$

$$\text{由D的对称性知 } \iint_D y^2 dx dy = \iint_D x^2 dx dy$$

$$\text{故 } I = 0$$

7、(10分) 求由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 和 $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$) 所围成的立体体积。

【作变换 $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$ 。

$$\text{则 } V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (r^2 \sin\varphi - 1) dr = \frac{1}{3} (\sqrt{2} + 1) \pi$$

8、(12分) 设均匀薄壳的形状为抛物面

$$z = \frac{3}{4} - (x^2 + y^2) \quad (x^2 + y^2 \leq 3/4)$$

试求这壳的重心

【由对称性可知, 重心在z轴上, 因壳是均匀的, 不妨设密度 $\rho = 1$, 则重心的z坐标为

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \iint_S z ds / \iint_S ds = \left(\iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}} (\frac{3}{4} - (x^2+y^2)) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy \right) / \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{47}{120} \pi / \frac{7\pi}{6} = \frac{47}{140} \end{aligned}$$

故重心坐标为 $(0, 0, 1/4)$

9、(12分) 求二阶方程 $2(2+y)y'' = 1+y'^2$ 的通解。

【原方程化为 $y'^2 - 2yy'' - 4y'' = -1$ (1)

两边求导得 $(y+2)y''' = 0$, 显然 $y = -2$ 不是原方程的解, 舍去。

则 $g''' = 0$, 于是 $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$, C_1, C_2, C_3 为任意常数。将此代入 (1) 式得 C_1, C_2, C_3 满足 $C_2^2 = 1 + 4C_1C_3 + 8C_3$

故通解为 $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数但满足

$$C_2^2 = 1 + 4C_1C_3 + 8C_3.$$

或设 $y' = p$, 将 y 看作自变量, 原方程为 $\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{2+y}$ 求解。

4 上海交大 天津大学 华中工学院
华南工学院 西安交大 浙江大学 南京大学
哈尔滨工大 (85) (I)