高等学校试用教材

电磁场论

（学习指导）

戚长鹦　李春祥　于光生　编

王为民　主审

本书作为王为民付教授主编的《电磁场论》一书的自学指导书。内容包括场论的数学基础、基本概念讨论，典型例题及习题选解。数学基础部分讨论了场论学习中经常遇到的数学问题，[illegible]一节“复习提要”，认真阅读将十[illegible]所发现的围绕场求解经常遇到的一[illegible]基本方法及各种方法使用注意事项。[illegible]典型例题 围绕第一节提出的问题作求解示范。所选例题有难有易，个别例题有简单讨论。希望初学者能认真阅读上述两节。第三节给出部分习题详解。其余习题有提示和答案。旨在留给同学一定练习。但希望读者不要先看这一节内容。而待自己求解之后对照一下。

电磁场论的学习中存在问题很多。本书受篇幅限制仅对一些基本问题作出必要讨论。尚有许多问题不能详细描述或未涉及。谨请读者鉴谅。

本书由臧长鹗、李春祥、于光生负责编写。王为民审定全书。王占武绘图。[illegible]担任责任编辑。

书中错误及不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

1983年10月

于长春地质学院

引　　言

“场论的数学基础”是学好场论必备的起码数学知识。根据我们多年教学体会，感到把这部份单独讲解，比放到有关章节讲要好，既可以节省时间，也不会冲淡场论内容。同时对读者以后查找有关内容也比较方便。当然放到有关章节讲也有其优点，它的针对性强，使读者容易引起重视。关于内容方面我们主要是为“场论”教材服务的，当然也为读者阅读有关参考书创造一定的条件。但由于我们侧重于应用数学工具来解决电磁场的实际问题，因而对数学理论证明，和数学的系统性考虑欠周到。对于必讲的内容按排在正文中，而对一些不经常用的内容则放在附录中以便读者参考。

本章共分六节，第一节讲矢量代数运算；第二、三、四节讲梯度、散度和旋度；第五节讲的是场论中常用的几个重要积分公式。第六节讲劈形算符。上述内容是学习场论的最基本的数学知识。

关于4个附录虽然不作为必须讲授内容但是对于读者也是必须掌握的内容。如曲线坐标；付里叶展开及上述内容不但是场论在物探专业课方面也是有用的。关于贝塞尔方程和勒让得方程的解，贝塞尔函数和勒让得函数的性质在场论中更是常用的所以不仅要会而且应该熟练掌握。虽然场论和物探专业还要用很多数学但由于篇幅关系，不能一一说明。读者可以参考有关数学教材。

目　　录

场论的数学基础

目　　录

§1.1 矢量代数

一、矢量和标量：

1．定义：**不仅要用数值表示量的大小，而且还要指明方向的量称为矢量**（或称为向量）。**只计较数值的大小不管方向的量称为标量**（或称数量、纯量、无向量）

矢量一般用粗体**a**、**b**…表示，在几何上可用带箭头的线段来表示。如**AB**表示矢量的始点为A，终点为B。

凡是矢量都应该遵守**矢量的加法规则**。（矢量的多边形规则，或平行四边形规则。）

2．矢量相等的条件

（1）两矢量的模量相等；

（2）两矢量平行（或在一直线上。）；

（3）指向一致；

换句话说两矢量相等则必须是两矢量在同一坐标系的各个坐标轴上的分量大小相等方向相同。

3．单位矢量及矢量在各种坐标中的表示法

（1）**单位矢量**，矢量$\mathbf{a}_0$与$\mathbf{a}$同向，且$\mathbf{a}_0$之模等于1单位，即$|\mathbf{a}_0| = 1$，则称$\mathbf{a}_0$为在$\mathbf{a}$方向的单位矢量。

在直角坐标系中x，y，z轴各方向的单位矢量用$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$表示，我们也经常用$\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$、$\mathbf{e}_z$表示。

在球坐标中，各坐标轴的单位矢量为$\mathbf{e}_r$、$\mathbf{e}_\theta$、$\mathbf{e}_\alpha$。
在柱坐标中，各坐标轴的单位矢量为$\mathbf{e}_r$、$\mathbf{e}_\theta$、$\mathbf{e}_z$。

场论中常用$\frac{\mathbf{r}}{r}$表示在$\mathbf{r}$方向的单位矢量。

（2）矢量在各坐标中的表示法：

直角坐标中为$\mathbf{a}=a_x\mathbf{j}+a_y\mathbf{z}+a_z\mathbf{k}$

或$\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y+a_z\mathbf{e}_z$

球坐标中为$\mathbf{a}=a_r\mathbf{e}_r+a_\theta\mathbf{e}_\theta+a_\alpha\mathbf{e}_\alpha$

柱坐标中为$\mathbf{a}=a_r\mathbf{e}_r+a_\theta\mathbf{e}_\theta+a_z\mathbf{e}_z$

二、两矢量的标量积（也称数量积或点乘）

在物理上力对物体所做的功，其值为

$A=FS\cos\theta$　或者表示为$A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}$

上述问题从数学形式来讲是两个矢量的模与夹角余弦之积是一个标量。这种算式在实际中经常遇到，由此得出矢量的标量积的定义。

1．定义：两矢量a和b的标量积等于两矢量的模和它们之间夹角余弦之积，通用a·b表示，因而也叫“点乘”

可表示为$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$

(1.1—1)

2．两矢量的标量积的基本性质：

（1）两矢量a与b平行时，则

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\pm|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

（2）两矢量a与b垂直时，则

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \quad 即 \quad \cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

但a，b均不为零矢量，因为零矢量与任何矢量的标量积皆为零

（3）两矢量的标量积满足交换律、分配律、标量积与标量的乘积满足结合律

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\lambda)$$

（4）两矢量的标量积的坐标表示法

设 $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ 或表示为 $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$

则 $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$ 或表示为 $\mathbf{b}=b_x\mathbf{j}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})\cdot(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})\\&=x_1x_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+y_1x_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})+z_1x_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})\\&\quad+x_1y_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})+y_1y_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})+z_1y_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})\\&\quad+x_1z_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})+y_1z_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})+z_1z_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\end{aligned} \tag{1.1—2}$$

因为**i**，**j**，**k**是互相垂直的单位矢量，所以

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0,\qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1,\qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$

故 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

（5）两矢量间的夹角

$$\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k},\qquad \mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$$

由 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$，则得

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

或用**a**与**b**与坐标轴的余弦表示则为

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

三、两矢量的矢量积（也叫叉乘）

两矢量的矢量积在物理学上应泛应用，如力学中的力矩$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$，刚体转动的线速度$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$，电磁学和场论中的洛仑兹力$\mathbf{f}=e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$，安培力$d\mathbf{f}=Id\mathbf{l}\times\mathbf{B}$，毕奥——沙伐尔定律$\mathbf{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$及能流密度公式$\mathbf{s}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$等等都用到两矢量的矢量积

1．定义：两个矢量a及b，夹角为$\theta=$（a，b），$0\angle\theta\angle\pi$，我们把大小为$|a||b|\sin\theta$，方向为由a转到b按右手法则确定的垂直于a，b确定的平面的矢量C，叫做a与b的矢量积，记作$\mathbf{C}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，它的模为

$$|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\qquad(1.1-3)$$

此数值正好是以**a**，**b**为两边的平行四边形的面积。

2．矢量积的性质：

（1）两矢量平行的充要条件

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$$

（2）两矢量积不满足乘法交换律

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

（3）两矢量积满足分配律：

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

（4）矢量积的坐标表示法

因 $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0$，$\mathbf{j}\times\mathbf{j}=0$，$\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$，

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}$，$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i}$，

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{j}$$

设 $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$

则：
$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})\times(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})\\&=x_1x_2(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+x_1y_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+x_1z_2(\mathbf{i}\times\mathbf{k})\\&\quad+y_1x_2(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+y_1y_2(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+y_1z_2(\mathbf{j}\times\mathbf{k})\\&\quad+z_1x_2(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+z_1y_2(\mathbf{k}\times\mathbf{j})+z_1k_2(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\\&=(y_1z_2-y_2z_1)\,\mathbf{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\,\mathbf{j}\\&\quad+(x_1y_2-x_2y_1)\,\mathbf{k}\qquad(1.1-4)\end{aligned}$$

这个公式可以用二阶行列式写成

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

也可以用三阶行列式表示

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

三、矢量的三重积

1. 矢量的混合积（也称向量三重纯量积）

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

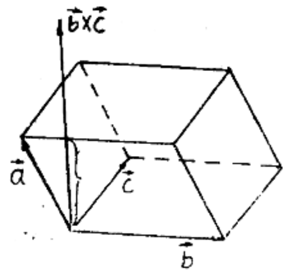
设 $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$,
$\mathbf{c}=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$

由矢量积及标量积的计算公式，可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\\&=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

(1.1—5)

混合积的几何意义是以**a**，**b**，**c**为边的平行六面体的体积，由图（1.1—1）知



（图1.1—1）

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$，$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$

$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$都是表示该平行六面体的体积。则得

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad (1.1—6)$$

对于上式由于经常应用，为了帮助读者记住可用左旋法则。由图（1.1—2）从某一矢量开始，按顺时针方向点乘其它两矢量的叉积，如从**a**开始则为$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$，它等于从**b**开始点乘$\mathbf{c}\times\mathbf{a}$，也等于从**c**开始点乘$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$即$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

当$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0 \quad (1.1—7)$时表示**a**，**b**，**c**三矢量在同一平面上，则平行六面体的体积必为零。这是**三矢量共面的充要条件。**

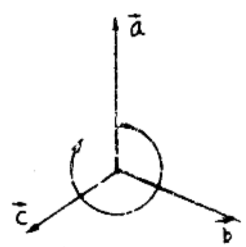


图1.1—2

2．三矢量的矢量积

$$\mathbf{f}=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \quad (1.1—8)$$

上式称为三矢量的矢量积。若设$\mathbf{d}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$

根据矢量积的定义知，**f**垂直于**a**和**d**所组成的平面。由（1.1—7）式三矢量共面的条件容易看出

$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{f}=0$ 所以**f**与矢量**b**、**c**共面。因此我们可将矢量**f**分解为沿矢量**b**和**c**方向的分量：

$$\mathbf{f}=m\mathbf{b}+n\mathbf{c}$$

m、n是任意的数值。由于$\mathbf{f}=\mathbf{a}\times\mathbf{d}$所以$\mathbf{f}$也垂直于$\mathbf{a}$，因而有

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}=m(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+n(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=0$$

由此得

$$\frac{m}{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}=-\frac{n}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}=\lambda$$

根据此式得

$$\mathbf{f}=m\mathbf{b}+n\mathbf{c}=\lambda[\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})] \quad (1.1—9)$$

现在只剩下确定比例系数λ

由式$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\lambda[\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})]$ (1.—10)

为此，只要比较以上公式左右两边的向量沿任何一个坐标轴的分量即可。取OX轴的方向和矢量$\mathbf{a}$方向一致，再计算沿Oz轴的分量。由于这样选坐标轴则（即使这样仍不失一般性）

$$a_x=|\mathbf{a}| \qquad a_y=a_z=0$$

由矢积定义知 $\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & 0 & 0\\ d_x & d_y & d_z\end{vmatrix} \qquad \mathrm{d}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$

则（1.1—10）式左端为$f=a_x(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_y$

$$=a(b_zc_x-b_xc_z)$$

而对（1.1—10）式右端由矢量的标量积定义可知

$$f_z=\lambda[b_z(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)-c_z(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)]$$

因为已知$a=a_x \qquad a_y=a_z=0$

则$f_z=\lambda[b_zac_x-c_zab_x]=\lambda a(b_zc_x-c_zb_x)$

与上边直接运算的式子对比知$\lambda=1$

故 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

§1.2 方向导数和梯度

一、方向导数和复合函数的导数

函数$z=f(x\cdot y)$的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$是这函数沿着平行于坐标轴方向的变化率。但在很多实际问题中，往往需要知道的是函数$z=f(x, y)$沿任意确定方向的变化率，以及沿什么方向函数的变化率最大。如求某点电场强度则必须知道该点电势在某一方向的最大变化率。因此研究多元函数在任一点p沿给定方向导数是很有意义的。

1. 方向导数

设函数$z=f(x, y)$在$p_0(x, y)$及其附近有意义，$\mathbf{l}$是从p_0引出的一条射线。$p(x+\triangle x, y+\triangle y)$是$\mathbf{l}$上任意一点，（图1.2—1）点$p_0$和p之间的距离为

$\rho=\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}$，于是函数的改变量为$f(x+\triangle x, y+\triangle y)-f(x, y)$与$p_0$，p两点间的距离比

$$\frac{f(x+\triangle x,\ y+\triangle y)-f(x,\ y)}{\rho} \qquad (1.2-1)$$

就表示函数$z=f(x, y)$在点p_0处沿$\mathbf{l}$方向的平均变化率。当p沿射线趋向p_0（即$\rho\to 0$）时，（1.2—1）式的极限存在，就称这个极限为函数$z=f(x, y)$在点p_0沿着方向$\mathbf{l}$的方向导数。可表示为

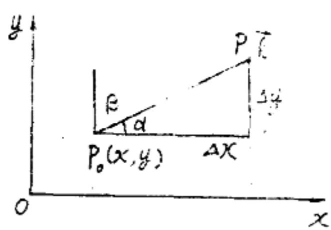


图1.2—1

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y)}{\rho}$$

如果函数$z=f(x, y)$在$p_0(x, y)$可微，则在p_0点沿任一方向l的方向导数都存在，可由下列公式计算方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta \qquad (1.2—2)$$

式中　$\cos\alpha$，$\cos\beta$为l方向的方向余弦。

对于三元函数情况$u=f(x, y, z)$，在空间一点$p_0(x, y, z)$沿l方向的方向余弦为$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$其方向导数可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (1.2—3)$$

例 1　设函数$z=x^2y$，l是由点（1，1）与x轴y轴的正向夹角分别为$\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$的一条射线，求$\frac{\partial z}{\partial l}$

解：因为由偏导数公式知

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1.1)}=2xy=2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1.1)}=x^2=1$$

所以得$\frac{\partial z}{\partial l}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1.1)}\cos\frac{\pi}{6}+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$

2．复合函数的导数

如函数$z=f(x, y)$可微，并且$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$对于t的导数存在，则复合函数

$$z=f[\varphi(t), \Psi(t)]$$

对t的导数存在，且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (1.2—4)$$

若函数$x=\varphi(s, t)$，$y=\psi(s, t)$的偏导数$\frac{\partial x}{\partial s}$，$\frac{\partial y}{\partial s}$，$\frac{\partial x}{\partial t}$，$\frac{\partial y}{\partial t}$在点$(s, t)$都存在，而函数$z=f(x,y)$在对应于$(s, t)$点$(x, y)$可微，则复合函数$z=f[\varphi(s, t), \psi(s, t)]$对于s，t的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

求复合函数的偏导数时要注意以下两点：

1）搞清函数的复合关系。

2）对某一个自变量求偏导数，应注意要经过一切有关的中间变量而归结到该自变量。

例2　$z=x^2-y^2$　$x=\sin t$，$y=\cos t$，求$\frac{dz}{dt}$

解：因为x，y是中间变量，z是t的复合函数。

由（1.2—4）式知

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x\cos t+(-2y)(-\sin t)$$

$$= 2x\cos t + 2y\sin t = 2\sin t\cos t + 2\cos t\sin t$$
$$= 2\sin 2t$$

例3 若 $z = f(x, y)$　$x = r\cos\theta$，　$y = r\sin\theta$

求证：$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

证明：$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} r(-\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} r\cos\theta$$

$$\therefore \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta + 2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta\cos\theta$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$$

因而得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

故得证明

二、梯　　度

1．标量场的等值面或等值线

我们在讨论标量场$\varphi=\varphi$（x，y，z）的性质时，为了研究场的分布特点，常常要考察具有相同场值的点，即满足

$$\varphi(x, y, z)=c$$

的点，其中c是常数。该方程在几何上表示曲面，我们称它为等值面。当c取不同数值时，所得到的等值面也不同。如电场中电势的等值面是等势面，温度场中的等值面是等温面，大气中气压相等点构成等压面等等。通常隔一定的函数值绘出一个等值面，结果得到一系列的等值面，它形象的表示出标量场（又称数量场）的分布情况。同时可以看出在等值面密集之处，则标量函数的空间变化快；反之，在等值面稀疏的地方，标量函数的空间变化就缓慢。

对于两个变量的标量场则有等值线，如平面电场的等位线（也叫等势线），气象图上的等温线地形图上的等高线等等，这都是等值线。

2．梯　　度

从等值面（或等值线）出发，引出一个具有重要意义的向量场。

我们以电场的等位线为例，如右图所示，在方向l_1，电位从p点的12伏过度到14伏的p_1点，经过的距离为$\overline{pp_1}$，它比沿方向l_2从p变到14伏的p_2点的距离$\overline{pp_2}$要小的多。所以按距离而言，电位沿l_1的平均增长率，大于沿l_2的平均增长率。显然，如果在一个方向上的电位线越密集，说明