

# 力 学

(用于农机结构强度计算)

福州大学数学系 编  
《农机结构强度计算短训班》

1977年9月

# 第一章 外力的分析和简化

农机结构由于外力的作用产生了内力和变形，要进行强度校核必须计算结构的内力和变形，为此，首先必须对作用于农机结构上的外力进行分析和简化。

作用于农机结构上的外力，可分为二类：一类是荷载，例如结构的自重、牵引力、工作阻力等；一类是约束反作用力（或称约束反力）。荷载是主动作用于结构上的外力，约束反力是被动的未知力，它起着约束结构的作用，使结构与机架和地面保持一定的相对位置关系。

本章先对这两类外力进行分析和简化，然后运用平衡方程式求未知外力。外力求出后，再简化到机架上。

## 第一节 荷 载

荷载的确定是结构设计中极为重要的工作。荷载如果估计过大，则设计的结构过于笨重，造成浪费。荷载如果估计过嫩，则设计的结构不够安全，易于损坏。因此，确定荷载需要深入现场，作周密的谨慎的调查研究工作，向有实践经验的工人、贫下中农请教，并参考总结了设计经验和科学研究成果的荷载规范，才能对荷载作出合理的决定。

本节仅讨论荷载的分类和简化的原则。

### 1.1. 荷载的分类

荷载可以按不同的特征进行分类。

荷载可分为体积力和表面力两种。作用于机具任何体积上的荷载叫做体积力，作用于机具表面上的荷载叫做表面力。

体积力一般只有结构的自重和运动中的惯性力两种。体积力以单位体积承受的重量计算，单位是公斤/毫米<sup>3</sup> ( $\text{kg}/\text{mm}^3$ )，表面

## 目 录

第一章 外力的分析和简化	1
第一节 荷载	1
1.1. 荷载的分类	1
1.2. 荷载的简化和确定	2
第二节 约束和约束反力, 物体系统的自由度	3
2.1. 约束与约束反作用力	3
2.2. 可能位移, 自由度	9
第三节 静力平衡方程式	10
3.1. 一些概念的复习	10
3.2. 静力平衡方程式	12
3.3. 静定、静不定问题的概念	
3.4. 静力平衡方程式的应用举例	
第四节 水田犁外载的计录及外载向犁架的简化	15
4.1. 水田犁外载的平衡方程式	16
4.2. 外载向框架简化的步骤	21
第二章 静定刚架的内力计录	26
第一节 单根杆件的内力计录	26
1.1. 用截面法求指定截面的内力	26
1.2. 外力与内力之间的关系	31
1.3. 用叠加法作弯矩叠	33
1.4. 曲杆的内力计录	36
第二节 静定刚架的内力计录举例	38
第三节 空间结构内力的一般计录法	46
第三章 静定结构的位移计录	56
第一节 实功和实功原理	58
1.1. 实功	58

# 目一 2

1.2.	外力实功	60
1.3.	内力实功	60
1.4.	实功原理	62
第二节	虚功和虚功原理	65
2.1.	虚功	65
2.2.	外力虚功	67
2.3.	内力虚功	68
2.4.	虚功原理	69
第三节	空间静定结构的位移计算	73
3.1.	空间结构位移计算的一般公式	73
3.2.	图乘法	74
3.3.	例题	78
3.4.	讨论	84
第四章	用力法计算超静定结构	92
第一节	结构的超静定次数	92
第二节	力法基本原理三例	98
第三节	空间力法的一般步骤和方程	105
第四节	例题和讨论	110
4.1.	例题	110
4.2.	讨论	124
第五章	强度理论	136
第一节	许用应力、安全系数	137
第二节	应力状态理论简介	140
2.1.	应力状态的概念	140
2.2.	单向应力状态下斜截面上的应力	141
2.3.	二向应力状态下斜截面上的应力	143
2.4.	广义胡克定律	152
2.5.	变形比能	155

第三节 强度理论简介-----	158
3.1 强度理论的概念-----	158
3.2 两个强度理论-----	158
3.3 受扭与弯曲联合作用的杆的强度校核--	165
第六章 实验应力分析简介-----	172
第一节 在桁架架的贴片实验-----	173
第二节 在桁架架立杆的应变实验-----	178

# 第一章 外力的分析和简化

农机结构由于外力的作用产生了内力和变形，要进行强度校核必须计算结构的内力和变形，为此，首先必须对作用于农机结构上的外力进行分析和简化。

作用于农机结构上的外力，可分为二类：一类是荷载，例如结构的自重、牵引力、工作阻力等；一类是约束反作用力（或称约束反力）。荷载是主动作用于结构上的外力，约束反力是被动的未知力，它起着约束结构的作用，使结构与机身和地面保持一定的相对位置关系。

本章先对这两类外力进行分析和简化，然后运用平衡方程式求未知外力。外力求出后，再简化到机架上。

## 第一节 荷 载

荷载的确定是结构设计中极为重要的工作。荷载如果估计过大，则设计的结构过于笨重，造成浪费。荷载如果估计过小，则设计的结构不够安全，易于损坏。因此，确定荷载需要深入现场，作周密的谨慎的调查研究工作，向有实践经验的工人、贫下中农请教，并参考总结了设计经验和科学研究成果的荷载规范，才能对荷载作出合理的决定。

本节仅讨论荷载的分类和简化的原则。

### 1.1. 荷载的分类

荷载可以按不同的特征进行分类。

荷载可分为体积力和表面力两种。作用于机具任何体积上的荷载叫做体积力，作用于机具表面上的荷载叫做表面力。

体积力一般只有结构的自重和运动中的惯性力两种。体积力以单位体积承受的重量计算，单位是公斤/毫米<sup>3</sup> ( $\text{kg}/\text{mm}^3$ )，表面

力如拖拉机的牵引力，土壤对机具部分（如犁体、耙组）的工作阻力等。表面力有分佈在某块面积上，以单位面积上之单位力计称（公斤/毫米<sup>2</sup>），也有分佈在某一线段上，以单位长度上之单位力计称（公斤/毫米），还有可以看作集中在一点上的集中力，以单位力计称（公斤、或吨）。

荷载还可以按作用时间的久暂分类。经常不变地作用于结构上的荷载叫做恒定荷载，随时间变化的荷载叫做活动荷载。荷载也可以按作用在结构上的位置固定或不固定而分为固定荷载和移动荷载。荷载又可以按照作用力的性质分为静力荷载和动力荷载。荷载作用的方向，大小，位置不随时间变化或变化极为缓慢，因而使结构不产生显著加速度的，叫做静力荷载；反之，叫做动力荷载。

农机结构除了自重是恒定荷载和静力荷载外；其他荷载，严格来说，都是活动荷载，移动荷载和动力荷载。例如农机架有时工作有时不工作；有时牵引力大些，有时牵引力小些；有些土壤压力大些，有些小些；耕深时深时浅；耕作速度时快时慢，甚至有时受到冲击。因此，荷载实际上是随时间（活动）、地点（移动）、加速度（动力）而不同。

### 1.2 荷载的简化和确定

如果我们都严格地完全如实地确定荷载是不可能的，也是不必要的。我们必须按照抓住主要矛盾，略去次要因素的原则，对荷载进行简化。

我们确定荷载的目的是为了对农机结构进行强度和刚度校核，因此要选择最不利的工作条件来确定荷载。例如牵引力要选择配套拖拉机的最大牵引力，土壤要选择最不利的条件。

其次，为了使计称不致过于复杂化，需要略去次要因素。例如农机在工作过程中一般速度变化不大，可以看成等速直线运动，不致遗忘外力冲击，这样可以忽略惯性力。其他荷载也都可以看

成恒定的，固定的，静力的荷载。除了结构的自重外，其他荷载都是表面力。

根据以上原则，确定了荷载的性质和类型之后，还需要对每个荷载的大小，方向，位置进行合乎实际情况的简化工作。

同机身联结的荷载是牵引力，牵引力的大小可按照配套的拖拉机的最大牵引力确定，合力方向朝机具的前进方向，其分力由各个铧犁来承担，而分力是未知的待定量，必须由机具的平衡确定之。

土壤加于结构的荷载（工作阻力）一般很复杂。我们所说的必须作周密谨慎决定的荷载主要指的就是工作阻力。它是由结构的特性和土壤的力学性质确定的，往往需要经过多次反复试验、测另才能确定。因此，农机机具的基础试验工作是极为重要的（如犁体的六分力电测、水田犁、耙机组动力测试工作等）。有时基础试验赶不上，为了进行计算，往往就根据实践和前人所作的科研成果，资料，作出一些假设。如对水田犁来说犁体在工作过程中，受力情况复杂，由于过去基础试验工作做得少，犁体工作阻力未有较精确的测试和可靠的依据。因此，为了进行计算，我们就参考一些资料并与有实践经验的工人、科技人员讨论，初步选定每个犁头的工作阻力的合力作用点在犁体曲面上距沟边  $\frac{1}{3}b$ （ $b$ 为单个犁头的耕宽）距沟底  $0.4a$ （ $a$ 为设计最大的耕深）处等等。

此外，机具的自重，它是作用于机具整个体积上，为了计算简便起见，可以将自重逐段化成几个集中力来处理。（譬如水田犁犁架、水田耙耙架）。

## 第二节 约束和约束反力，物体系统的自由度

### 2.1. 约束与约束反作用力



有些物体可以在空间任何方向运动，这些物体称自由体。如果事先对物体（或结构）的位置、速度加以限制，这些所加的限制称约束。仅与限制位置的约束称几何约束。受约束的物体（或结构）运动时在某些方向就要受到限制而不可能沿这些方向有位移。将这些阻碍物体（或结构）运动所加的限制用数学方程式来表示，则称为约束方程式。例如在水平道路上行驶的拖拉机，路面是个约束，因为它限制了拖拉机的向下运动，如果用  $w$  表示拖拉机的向下位移，则  $w = 0$  是它的约束方程式。约束方程式中不包含时间  $t$ ，称为稳定约束。以下所讨论的约束都是指稳定的几何约束。

受有约束的物体称为非自由体。约束既然阻止物体上某处沿某些方向的运动，于是可知，在该处沿着约束所能阻止的方向，物体运动受到限制，是由于约束对它作用一定的力的缘故。约束对物体作用的这种力称为约束反作用力（或约束反力）简称反力。它是由约束阻碍物体运动而引起的，是属于被动力。因而约束反力事先是不能独立确定的，是未知的。而使物体运动或使物体有运动趋势的力称为主动力。主动力往往是已知或者可以测出。如地球引力、拖拉机对农具的施力等是主动力。约束反力既是阻止物体运动的，因此它的作用点在约束与被约束物体相互接触之处，它的方向总是与约束所能阻止的运动方向相反。这是我们确定约束反力方向的准则。

由于机械结构是在受约束的情况下进行工作的，能否正确表示出约束作用于物体的约束反力是研究问题的先决条件。下面介绍时常遇到的几种基本类型的约束并根据各种约束的特性分别说明其约束反力的表示方法。

(1) 完全柔软不会伸长的绳索、绳、链条（不计自重）所造成的约束。

只有在被拉直时才起着约束的作用，它只能阻止物体上与绳

索连结的一头沿着绳索中心线离开绳索，而不能阻止这一头向绳索运动，也不能阻止这一头沿其他方向运动，所以绳索对物体的约束反作用力一定通过这一头，沿绳索中心线作用，并且指向物体的外部（拉力），如 图 1.1 所示，是一悬梯在一根绳索上 A 头的物体及其所受的约束反作用力  $T_A$ 。

(2) 完全光滑接触面所造成的约束。

当物体与光滑的支承面相接触时，不管物体及支承面的形状如何，支承面只能阻止接触头沿着经过该头的公共法线而朝向支承面的运动，但不能阻止该头离开支承面或沿其他方向的运动，所以约束反作用力经过接触头而沿接触处的公共法线（垂直于公共面）作用于物体，并指向物体内部（图 1.2），例如光滑路面对轮子的约束是这类型的。

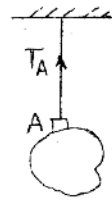


图 1.1

(3) 光滑圆柱形铰链所造成的约束。

图 1.3 所示的是圆柱形铰链，是由一个圆柱形的销子套以圆筒形的套子所组成。假定销子的半径与套子的半径相等。显然，套子只能绕圆柱轴转动。如略去铰链上的摩擦力，它们就构成圆柱形销子和套子间的光滑接触。这种约束阻碍物体在垂直于圆柱轴线的平面内朝任何方向的运动，因此约束反力是在垂直于圆柱轴线的平面上，且通过圆柱轴。但它的方向不能预先确定。象这种方向未知的反力  $\vec{R}$  我们约定用带有波纹的矢表示，如图 1.3 c。  $\vec{R}$  可分解为在垂直于圆柱轴线的平面上的两个分力  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ 。两构件以圆柱形铰链 A 联结时可以用图 1.3 b 所示的简图来表示。

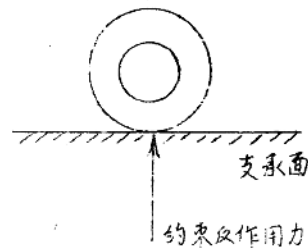


图 1.2

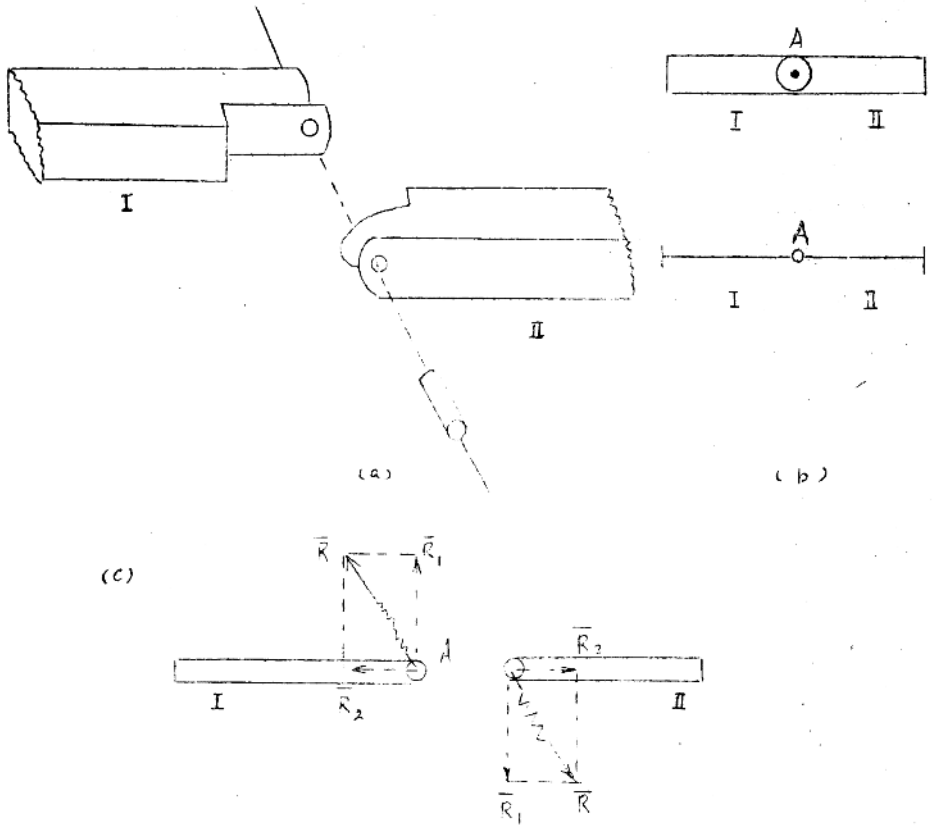


图 1.3

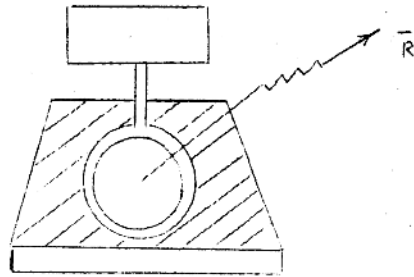
(4) 球铰链:

它由固定于一个物体的球，嵌入另一个物体上的球窝而构成 (参 1.4)，这种约束只容许物体绕球心转动，而限制了从任何方向离开球心的位移，因此约束反力通过球心，方向是任意的。其约束反力  $\bar{R}$  如图 1.4 所示，这反力  $\bar{R}$  可分解为相垂直的三个分力  $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$ ，而  $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$  的指向、大小待定。

(5) 双铰链刚杆 (自重不计) 连接所造成的约束。

这种双铰链刚杆 (简称链杆) 的两端用光滑销钉与物体相连，如参 1.5 所示，这种约束能阻止物体上与链杆连接的一质沿着链

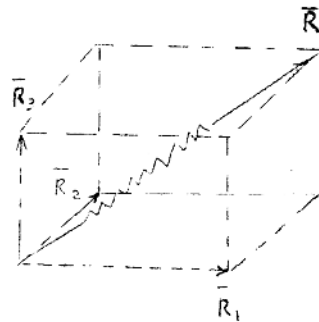
杆中心线趋向或离开铰链，但不能阻止这一铰沿其他方向运动，所以铰链对物体的约束反力一定沿着铰链中心线作用，或指向物体的外部，或指向物体的内部，对于这种双向约束的约束反力，指向不能预先决定，而须决定于主动力的作用，各 1.5 中用虚线力矢表明指向未定的约束反力。



(6) 支座所造成的约束：常见的支座有

① 固定铰支座

设将物体套在圆柱形的光滑销钉上，则销钉能阻止物体与销钉相连的铰 A 沿着垂直于销钉中心线的所有各方向的运动。因此约束对物体作用力（即约束反力）垂直于销钉中心线，方向未定，如各 1.6 所示。带有这样一个销钉的支座，在结构工程上称为固定铰支座，习惯上用各 1.7 所示的简化形式来表示。

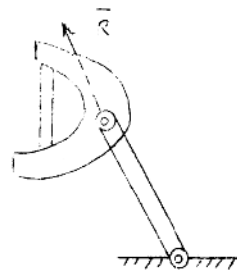


各 1.4

带有这样一个销钉的支座，在结构工程上称为固定铰支座，习惯上用各 1.7 所示的简化形式来表示。

② 可动铰链支座

将铰链支座用几个滚轴支承在平面上，就成可



各 1.5

动的铰链支座。这样的支座不能阻止物体与支座相连的铰 A 沿着支承面的方向运动。它除了能阻止铰 A 向支承面方向运动外，由

于这种支座上通常有特殊装置，也能阻止其A在离开支承面的方向运动，所以约束反力通过A点，并垂直于支承面，但指向未定（图1.8）。

③ 固定支座（见下面例子）。

以上所述各种基本约束类型是把实际约束加以抽象，简化后得到的理想力学模型，实践中遇到的约束往往比理想情形复杂。这时必须分清主次，略去一些次要因素，从而把约束归结为基本的类型。

前已说过，农机结构是在受约束的情况下进行工作而成平衡，但这平衡是处于相互制约，相互联系下平衡。因此，在考虑农机结构某一部分（或某一构件）的平衡时，

必须把所考虑的部分或构件（简称研究对象），从约束或周围的构件中分离开来，约束或周围构件对研究对象的作用以约束反力来代替，这样方法称分离体法。画出研究对象所受的全部力，包括主动力与约束反力，所得到的图形称受力图。画出受力图后，研究对象就从约束或周围构件中分离了，这样可以认为所考虑的研究对象是在主动力和约束反力作用下处于平衡。作受力图是解决问题的第一步工作，不能省略更不能有任何错误。若不画出正确的受力图，则以后的分析计算工作将无从着手，或者导致错误的结果。在没有进行分析计算工作以前，最好再校核一次，以检查是否有错误。

为了说明分离体法及受力图的绘制，举例如下：

例。如图1.9，把平面结构ABCD的AB杆作为研究对象，

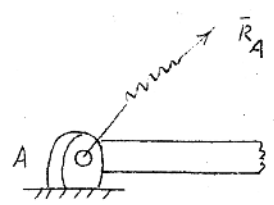


图 1.6



图 1.7

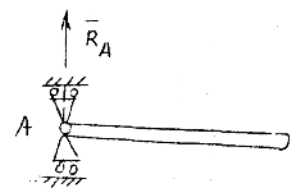


图 1.8

画出它的受力图。

把铰结点  $B, C$  切断，用相应的约束反力  $F_B, F_C$  来代替  $BD, CD$  杆对它的作用，因为  $BD$  和  $CD$  杆是属于双铰链刚杆连接所造成的约束， $F_B, F_C$  沿杆轴方向。在  $A$  端是刚接的支座，它不允许在  $A$  点有水平或者垂直的位移，也不允许有绕  $A$  点的转动。沿  $A$  点切开时，支座对杆  $AB$  的作用就必须用二个力（ $X_A, Y_A$ ）和一个力矩  $M_A$  来代替，因此得到杆  $AB$  的受力图（如图 1.10）。如果结构  $ABCD$  是考虑为空间结构，此时， $A$  点处的约束反力不是三个而是六个（三个力、三个力矩）。如图 1.11 所示。

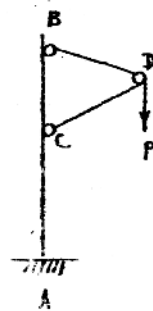


图 1.9

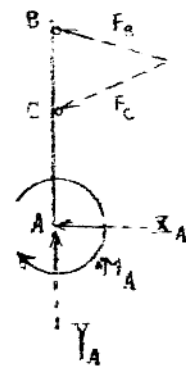


图 1.10

### 2.2. 可能位移、自由度

#### ① 可能位移（虚位移）

所谓质点或刚体的可能位移（或虚位移），在稳定约束的情况下，就是在约束的条件允许下的微小位移。

根据上述定义，应该弄清楚，可能位移是想像中可能产生而实际上并不一定实现的微小位移。可能位移要满足约束方程式。

可能位移与实位移不同，实位移是实际所发生的位移，而可能位移只说明物体的约束条件下运动的可能性，它是一个几何的概念，既不牵涉到系统的实际运动，也不牵涉到力的作用，

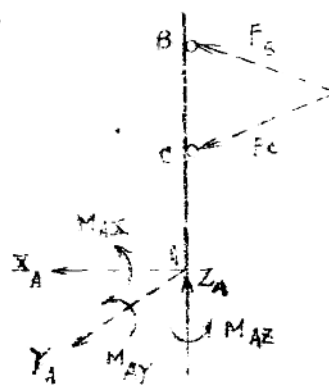


图 1.11

它只是从几何上说明的可能性。例如受约束在曲面上的质点,实位移是在外力作用下,一段时间内,质点在曲面上的一段轨迹,可能位移则是质点沿曲面在各个方向所可能产生的微小移动。

虽然可能位移与实位移是有区别,但是对于受规定几何约束的系统,它的实位移是可能位移中的一个。

### ② 自由度

一个系统如果有几个相互独立的可能位移,我们称这个系统具有  $n$  个自由度。为了决定系统位置所选定的独立参量,称为描写这系统位置的广义坐标。对受几何约束的系统来说,自由度的数目等于广义坐标的数目。

空间任意一物体,如果不受任何约束,它独立的可能位移只有六个(沿三个坐标轴方向的位移,和绕这三个坐标轴转动的角位移),因此具有六个自由度,决定它的位置只需要六个独立参量,也即只要六个广义坐标。如果物体受到约束,它的自由度将减少;减少几个,减少那几个,将由物体所受的约束形式决定。

## 第三节 静力平衡方程式

### 3.1 一些概念的复习

#### 1. 力:

力是物体间的相互作用,这种作用使物体的运动状态发生改变。力是一矢量,以  $F$  表示。它在三个坐标轴的投影以  $F_x, F_y, F_z$  表示。

#### 2. 力对一点的矩:

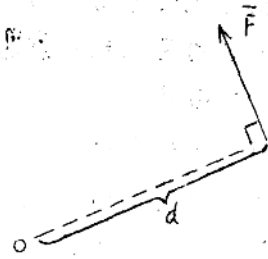
设  $F$  是作用于物体上的力,  $O$  是一点。 $F$  对  $O$  点的矩,以  $M_O(F)$  表示,它是用来表明力  $F$  使物体绕  $O$  点转动的效应。例如,当我们用扳手转动螺帽时,由经验知道,加在扳手上的力的作用线离螺帽中心越远,则转动螺帽越容易。从种之与此

类似的经验中，建立了这样的概念：力 $\vec{F}$ 使物体绕 $O$ 点转动的效应，不仅与 $\vec{F}$ 的大小有关，而且与 $O$ 点至力作用线的距离 $d$ 有关（参 1.12）因此在力学上取乘积 $Fd$ 表示力 $\vec{F}$ 使物体绕 $O$ 点转动的效应，称为力 $\vec{F}$ 对于 $O$ 点的矩，记为

$$M_o(\vec{F}) = \pm Fd$$

这里 $O$ 点称为矩心， $d$ 称为矩臂。

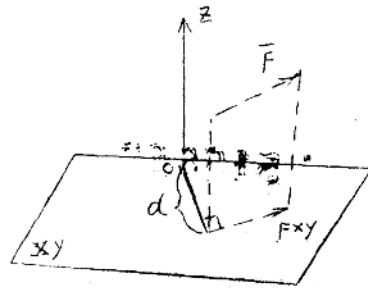
由于力的指向不同或力在矩心的不同一边，都将使物体按不同的方向绕矩心转动，因此通常在力矩前加上正负号，以表示它使物体转动的方向。我们规定：向纸面看去，若力使物体作反时针方向转动，如参 1.12 所示，则力矩取正号；反之取负号。



参 1.12

### 3. 力对于轴的矩

设 $\vec{F}$ 是作用于物体上的力， $OZ$ 是一轴。力 $\vec{F}$ 对 $OZ$ 轴的矩，以 $M_z(\vec{F})$ 表示，它是用来表明力 $\vec{F}$ 使物体绕 $OZ$ 轴转动的效应。在 $OZ$ 轴上任取点 $O$ ，过 $O$ 点作平面 $XY$ 垂直于 $OZ$ 轴并把 $\vec{F}$ 向 $XY$ 平面投影，得投影矢量 $\vec{F}_{xy}$ （参 1.13）。



参 1.13

定义： $M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot d$ 。

这里的正负号按右手螺旋定则选取：把右手沿 $\vec{F}_{xy}$ 方向伸再转向 $O$ 点，若大拇指的指向与 $Z$ 轴正向一致取正号；反之取负号。按此规定，参 1.13 应取正号。

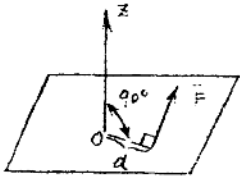


由力对轴的矩的定义可以推知：

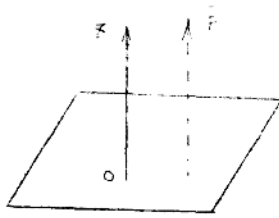
(1) 如果力  $\vec{F}$  位于某一与轴垂直的平面内，计算力对轴的矩时，只需将力的大小乘上离轴的垂直距离即可（参 1.14）。

(2) 若力与轴平行（参 1.15），则此力对该轴的矩等于零。

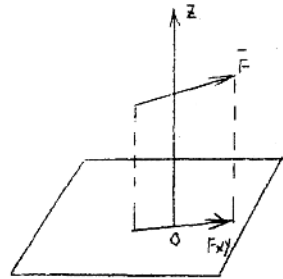
(3) 若力与轴相交（参 1.16），则此力对该轴的矩等于零。



参 1.14



参 1.15



参 1.16

### 3.2. 静力平衡方程式

力系：作用在物体上的一组力称为力系，以  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  表示（参 1.17）。

取坐标系  $Oxyz$ ，由于要使物体平衡，就是要使物体保持静止或等速直线运动，就不允许有任何沿  $x$ （或  $y$  或  $z$ ）方向的运动状态改变。

故

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^n F_{mx} &= 0 \\ \sum_{m=1}^n F_{my} &= 0 \\ \sum_{m=1}^n F_{mz} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

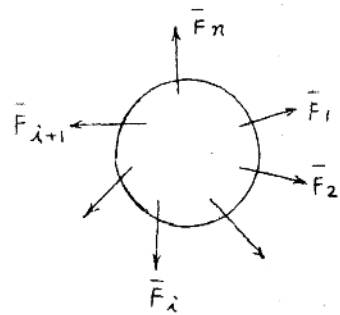


图 1.17