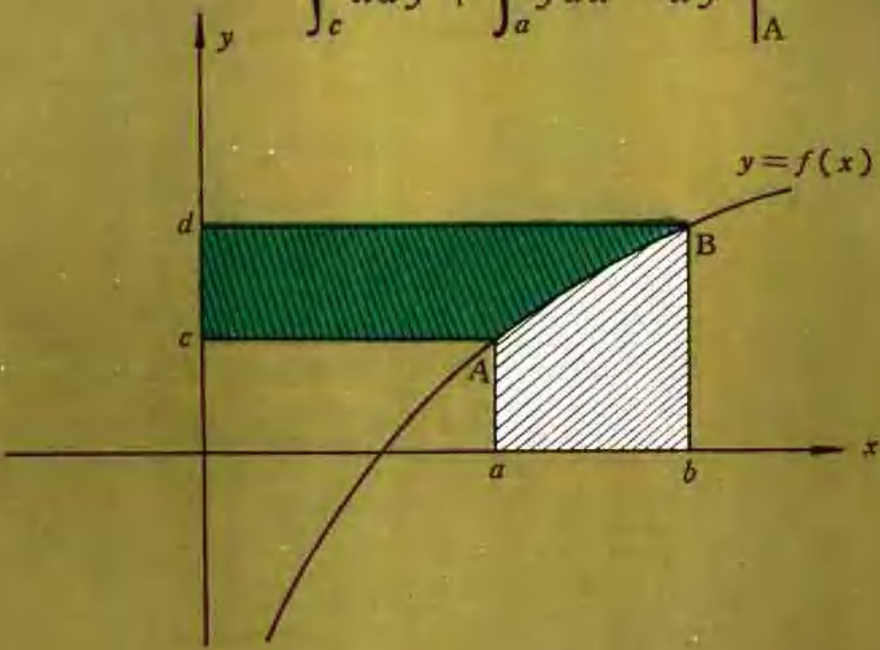
微積分1200題

THE CALCULUS PROBLEM SOLVER

(下)

李曦文 譯

$$\int_c^d x\,dy + \int_a^b y\,dx = xy \Big|_A^B$$



• 凡異出版社 •

微積分1200題

THE CALCULUS PROBLEM SOLVER

（下）

李曦文　譯

凡異出版社

微積分1200題

THE CALCULUS PROBLEM SOLVER

(下)

定價：300元

發　行	凡異出版社
郵　撥	0114221～5
電　話	035－712255
門　市	六藝圖書中心
地　址	新竹市光復路二段460號
電　話	035－716753
總經銷	學英文化事業有限公司

中華民國77年1月　一版

譯者序

所謂"熟能生巧"，這點對於所有的基礎性的科目而言可說是不變的眞理吧！尤其微積分這一門課是所有理工科學生必備的技術；而這一本書裏收集了一千多題的各型題目；更難得的是，其中包含了許多與實際應用有關的問題（諸如：體積、圖心、轉矩、誤差估計、電學上的應用），幾已涵蓋了大一物理中所用到的微積分問題。所以，研讀本書，既可學得"微積分是什麼"，還可學得"什麼時候用""該如何用"。

或許，定理的推導好像嫌少了些；但是這也是本書的特色之一。將注意力集中於解題上，而理論的推衍可以由坊間其它書籍參考之，這也是一個相當不錯的學習方法。

全書共分46章，1～28章（上册），29～46章（下册）。

最後，希望諸讀者能不吝指正書中錯誤，漏譯之處；更希望，凡是有志於挿班、考研究所，有志於把微積分學好的同學們能藉本書達到理想，這也是我們出版這本書的目的。

李 曦 文 謹識

於76年12月 新竹

這本書的目的

自從微積分發展出來，一直爲學生很難了解和學習的科目。雖然在這領域中已出版了好幾百種教科書，而且每一本出版的，在內容編排和教法都有所改良，但是學生仍然存有不少窘困，而且內容的選擇往往是遷就學校系上的要求而訂。

問題經過分析後，研究教育學會發現學生在學校中學習微積分的困難有下列的基本原因。

（a）沒有系統性分析的原則，可以讓學生按步就班去解決他們經常遇到的問題。這種情況使得許多不同的可視爲一個問題的條件和原理（principles），有許多可能的不同的解法。如果要爲了規定一組原則來解決每一可能的變化，這會牽引出一大堆原則和步驟，完全由學生自己根據那些原則來尋找解決方法，然而這項工作會比直接地使用猜錯法（trial - and - error）來找出正確解答程序來得煩重。

（b）目前市面上的教科書，經常會請一位在某方面有洞察力的專家利用幾頁紙來解釋一條原理，而一般學生都不易了解。同時，那些專家通常以抽象方式來解釋，使得學生對於這原理的應用還是很迷糊。這種解釋方法並不夠詳盡，不能使學生注意到這原理的不同觀點和廣泛應用。原理的多方面可能的變化和它們的應用通常沒有討論到，而留給學生在做習題的時候自己去發現。根據了解，普通的學生都要做這樣的事情。

(c) 範例常常只用簡單的幾行字來解釋，學生根本無法完全掌握這原理。這種解釋沒有提供足夠的基本原理使得學生有能力去解一些經常在功課或考試中遇到的問題。

範例以縮寫形式表達，每一步驟間省去許多資料，學生必須自己把省去的資料導出來。結果，學生發現這些例子都很難了解---與範例的目的相反。

其次，範例中的文字時常混淆不清。他們並不是先敘述問題，然後呈現解決。而是透過一般討論，從不顯示所解的是什麼。

範例常常在沒有適當的情況下加上圖表，使學生無法獲得，繪畫圖表來簡化和組織他們的思想的訓練。

(d) 學生只能夠從做習題和在課堂上複習來學習某問題，把原理應用到問題的不同細節而獲得經驗。

在做習題的時候，學生發現他們需要花時間來計算比花時間來比較問題的重要性要多，這是由於他們對於定理和原理的選擇和應用並是很清楚。學生經常要自己去發現解問題的"妙訣"是在教科書(或在參考書)內找不到的。學生通常要用猜錯法(trial-and-error)來找出那些"妙訣"，結果他們發現有時候要花幾個小時來解一個問題。

(e) 在課堂上複習習題的時候，導師通常要求學生輪流在黑板上寫出解答以及對班上同學講解。學生時常發現很難找出一種引起班上同學興趣的態度來講解。其次，班上其他的同學也忙著抄下黑板上的資料，聆聽口頭上的解釋和集中在問題的解法。

這本書主要是帮助學生在計算上克服困難，提供詳細的解法例證。解答方法由經常會在課堂上作業或考試中遇到的問題中選擇作為例證。為了使學生在依循序複習問題時易於學習和了解一個特定的題

目，問題是按複雜性的依序而編排。問題以一步一步的方式來詳細解釋，這樣可以節省學生許多尋求證明過程的時間。

研究教育協會人員認爲微積分的主題最好由學生親自去觀察分析方法和解決技術。這種學習情況就如在各種科學的實驗室中實習，特別在醫學領域中。

使用這本書，學生可以按照自己的進度來複習和研讀那些例證問題；他們就不會受到在班中黑板上解釋問題的時間所限制。

當學生想要查閱某一特別類型的問題和解答，他們很容易就能夠在書的最後索引中找到那些問題的所在。同時也可以由一撇題目的內容而找出一特殊類型的問題所在。爲了加速尋找問題，我們特別把問題的題目用粗黑線條包圍起來，而且在每一問題的左上邊加上題號。

爲了從這本書中獲取最大的利益，學生應該熟知〃如何使用本書〃那部份。那部份安排在後一頁。

爲了達成這本書的目標，研究教育協會的人員所選擇的問題都是在作業上和考試中經常會碰到的，他們精心而詳盡的編寫每一問題的解答，把學生常常感到難於理解的每一步驟都編寫出來。在此感謝 Abraham Amaha，Renata Bye，Frank Lau 和主編 Dr. H. Weisbecker 他們在這領域中的堅忍工作。Janet Cluna 小姐特別值得稱讚是她謹慎的成果和常有想像的貢獻。

同時也要感謝許多牽涉到這艱巨工作的人員，如打字員和美工人員等。最後，特別向 Helen Kaufmann 致謝，因爲她提供了有關這本書的設計和組織等多方面有建設性的建議。

Max Fogiel，Ph.D.
Program Director

如何使用本書

這本書對於學習微積分的學生來說是很有價值的，它可以作爲他們的教科書以外的輔助物，這書共分爲 46 章，每一章處理一個主題(topic)。編排形式是以大學代數的基本觀念開始，然後慢慢發展微分和積分的計算。爲了配合在科學和工程方面的學生需要，每章還包含有一些高等積分法和微分方程。此外，還含有一些最使學生感到煩惱的微積分應用例證問題。

徹底的學習和了解一個主題

1. 參考你的教科書，並閱讀有關主題部份。你應該熟悉討論原則的那部份。然而或許你目前還未能很了解那些原則。
2. 然後在這本書前面的目錄表尋找你想要的主題所在。
3. 翻至主題所在頁，在每一主題下，按照給定次序複習各個問題。每一主題，問題是以複雜性依次排列，從簡單開始到最困難。一些問題可能重複出現，但每一問題都用不同的觀點或解法來求解。

爲了要徹底的學習和了解一個主題並掌握它的內容，學生一般都必需要複習問題好幾遍。同時我們必須要認識爲何會使用到這條原理和選擇最好的解答技巧，如要獲得這些經驗，重複複習問題基本上是必需的。

尋找特殊問題

當需要找出一或多項相關的特殊題目，可以參考索引。利用索引，可以找到一個號碼，那號碼是題號而不是頁數。這樣的安排是可以增加尋找問題的速度，因爲在一頁內可能會有二至更多的問題。

如果一條特殊型的問題在索引裏不易找到，建議您翻至最前面的目錄表查閱，然後翻至問題所在。也可以從觀看題目內容來尋找，這不會花很多時間。當問題找出來後，解答能夠詳細的研讀和複習。學生應該熟識這本書的組織，才能減少尋找問題的時間。

在準備考試時，需要尋找主題作爲題目，這本書的目錄表也很有用。學生只要在這些主題下複習幾次就行了。這樣，學生也知道應該準備些什麼來應付考試。

目　錄

第29章
弧長

考慮平面上一條曲綫。我們可以將它切分成許多小節。我們令其中一節之長以$\triangle s$表之，則依畢氏定理可知$(\triangle s)^2=(\triangle x)^2+(\triangle y)^2$。若我們令$\triangle s$趨近於零，則可得如下的式子：

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$$

將上式等號兩邊開根號，並將dx提出根號外，我們便可得到：

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

因此，我們如果能求得y對x的導數的話，便可以得到ds的式子了。而且還可以將ds的式子積分以求得s，即：

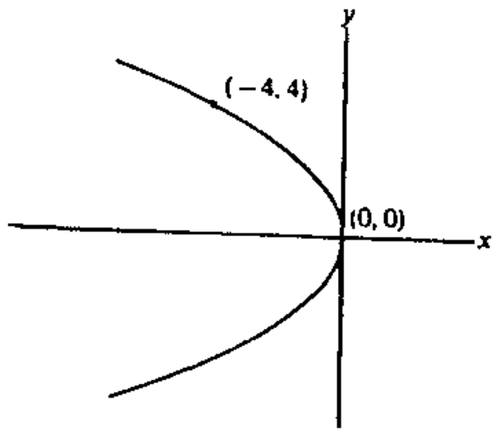
$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

其中a、b爲x在曲綫端點上之值。而s即爲曲綫弧長。

在極座標中之類似式子已被導過。

問題 782.

試求曲綫$y^2=-4x$，由$(-4,4)$至$(0,0)$之弧長。



【解】： $$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy.$$

因爲 $y^2 = -4x$ ，$x = -\frac{y^2}{4}$ ，$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{2}$

故 $$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}\ dy = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4+y^2}\ dy$$

而 $\int_0^4 \sqrt{4+y^2}\cdot dy$ 乃屬於 $\int \sqrt{u^2+a^2}du$ 的題型，且等於：

$$\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right).$$

$$s = \frac{1}{2}\left[\frac{y}{2}\sqrt{4+y^2} + \frac{4}{2}\ln(y+\sqrt{4+y^2})\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{20} + 2\ln(4+\sqrt{20}) - 2\ln 2\right]$$

$$= 2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}).$$

問題 783.

試求曲線 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 由 $x = 0$ 至 $x = 4$ 之長度。

【解】：對 x 軸而言的弧長公式爲： $s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$.

因 $y = x^{\frac{3}{2}}$ ， $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ ，故：

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4+9x}\, dx = \left(\frac{1}{9}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) (4+9x)^{3/2}\Big]_0^4$$

$$= \frac{1}{27}\left(40^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - 1\right).$$

問題 784.

試求曲線 $y = \ln(\cos x)$ 由 $x = 0$ 至 $x = \frac{1}{4}\pi$ 之弧長。

【解】：我們使用弧長之公式： $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\ dx$

$y = \ln(\cos x)$ ， $y' = -\tan x$

$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sec x$

因此，

$$s = \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx = \ln(\sec x + \tan x)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1).$$

問題 785.

試求曲線 $y = x^2$ 由 $x = 2$ 至 $x = 5$ 之長度。

【解】：使用弧長的式子： $s=\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$，

而 $y=x^2$ ，$y'=2x$

因此，$s=\int_2^5\sqrt{1+4x^2}\,dx$

利用分部積分法且記得其公式爲 $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ 。

令 $u=(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}$ ，$du=4x(1+4x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ，$dv=dx$ ，

$v=x$

故，

$$\int_2^5(1+4x^2)^{1/2}dx$$

$$=(1+4x^2)^{1/2}x-\int_2^5\frac{4x^2}{(1+4x^2)^{1/2}}\,dx. \qquad (1)$$

但是，$\int_2^5(1+4x^2)^{1/2}dx=\int_2^5\frac{(1+4x^2)}{(1+4x^2)^{1/2}}\,dx.$

將上式右邊展開後，可得到：

$$\int_2^5(1+4x^2)^{1/2}dx$$

$$=\int_2^5\frac{dx}{(1+4x^2)^{1/2}}+\int_2^5\frac{4x^2dx}{(1+4x^2)^{1/2}} \;. \qquad (2)$$

再將式子(1)與式子(2)相加後，卽可消去 $\int\frac{4x^2dx}{(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}}$ 項。

此時我們得到：

$$2\int_2^5(1+4x^2)^{1/2}dx$$

$$=x(1+4x^2)^{1/2}+\int_2^5\frac{dx}{(1+4x^2)^{1/2}}\;,$$

或者，

$$\int_2^5 (1+4x^2)^{1/2}dx$$

$$= \frac{x}{2}\ (1+4x^2)^{1/2} + \int_2^5 \frac{dx}{\left(\frac{1}{4}+x^2\right)^{1/2}}\ .$$

注意 $\int \dfrac{dx}{(\frac{1}{4}+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ 與 $\int \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \ln(\ x+\sqrt{a^2-x^2}\ )$ 同型。

因此，$$\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{4}+x^2\right)^{1/2}} = \ln\left(x + \sqrt{\tfrac{1}{4}-x^2}\right).$$

而 $\int_2^5 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$ 已簡化為：$\left[\frac{x}{2}\ (1+4x^2)^{1/2} + \ln\left(x+\sqrt{\tfrac{1}{4}+x^2}\right)\right]_2^5$.

上式當 $x=5$ 時其值為 27.43，當 $x=2$ 時，其值為5.52。

問題 786.

試求曲綫 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 由 $x=3$ 至 $x=8$ 之弧長。

【解】：弧長公式為 $s=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2dx}$

而 $y'=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，$1+(y')^2=1+x$

因此，

$$s = \int_3^8 \sqrt{1+x}\ dx$$

$$= \int_3^8 (1+x)^{1/2}dx = \frac{2}{3}\left(1+x\right)^{3/2}\Big|_3^8$$

$$= \frac{2}{3}(9^{3/2}-4^{3/2}) = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}\ .$$

問題 787.

試求一半徑爲 r 的圓其圓周長。

【解】：令 $x^2 + y^2 = r^2$

則 $x\,dx + y\,dy = 0$

或 $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x}{y}$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{y^2}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{r}{y} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

故圓周長 C 爲：
$$C = 4\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$= 4r\left[\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_0^r$$

$$= 2\pi r,$$

此結果衆所皆知。

至於在極座標中，弧長之微分爲：

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2}$$

$$= \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$= \sqrt{1 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}\,d\rho.$$

所以，曲綫的長度爲：

$$s = \int ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta,\ 或,$$

$$s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + \rho^2 \theta'^2}\, d\rho.$$

半徑爲 r 的圓在極座標下的方程式爲：$\rho = r$（一常數）。因此：

$\frac{d\rho}{d\theta} = 0$。而　$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, d\theta = r\theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$

另一方面來說，因爲 $\frac{d\theta}{d\rho}$ 不存在，所以剛剛導出的另一個極座標弧長公式不能用。

> 問題 788.
>
> 試求在 $\theta = 0$ 與 $\theta = 2$ 間的曲綫 $\rho = \varepsilon^{2\theta}$ 其弧長。

【解】：若 $\rho = \varepsilon^{2\theta}$，則：

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 2\varepsilon^{2\theta} = 2\rho。$$

$$s = \int \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^2 \left[\rho^2 + (2\rho)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot d\theta = \int_0^2 \left(5\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot d\theta$$

$$= \sqrt{5} \int_0^2 \rho \cdot d\theta = \sqrt{5} \int_0^2 \varepsilon^{2\theta} \cdot d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^2 \varepsilon^{2\theta} \cdot 2\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\varepsilon^{2\theta}\right]_0^2$$