

几何学辞典

问题解法

问题解法 几何学辞典

问 题 解 法
几 何 学 辞 典

〔日〕笹部貞市郎 编

高清仁 舒玉兴 胡广春 陈传理
陈秉跃 方福昌 浅見苜久世 译

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 30.5 插页 4 字数 1,632,000

1984 年 8 月第 1 版 1984 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—60,800 本

统一书号: 17150·7 定价: (精) 5 60 元

旧版序言

作者不揣冒昧，早在十一年前，即大正十四年期间，就打算编纂几何学辞典。

当时，并没有什么特别周详的计划，只是自己在遇到难解的几何问题时，没有合适的辞典查阅，感到很不方便。我想与我同感的人也是不少的。因此，如果编纂一本大而全的几何学辞典，也许能给读者带来些方便。但是，当与前辈和朋友一起谈论此事时，总是带着担忧的心情。因为对这些极为千变万化且种类繁多的几何学问题，要想把它们系统地归纳整理，看来是十分困难的，纵然能够做到，但出版所需的经费必然很多，究竟采取什么办法合适，也实在难于预料。因此，计划的付诸实施就完全处于无可奈何的状况之中。

这样一来，一时甚至想将计划编纂的念头打消。但是，一想到古人说的“有志者事竟成”的名言，又几次重作新的计划，梦寐以求完成。昭和四年春，适逢我迁居东京，这样，得到了搜集问题和研究解法的极好机会，促使我最后下定决心，排除万难，去完成很久以来的宿愿。当时搜集问题主要参考下列各书：

- (1) 现行中等学校几何学教科书十余种。
- (2) 大正十年以后的高等学校入学试题。
- (3) 文部省对教员甄别考试的试题。
- (4) 康布罗斯(コンアルス)、尼希逊(ニキソン)、肖伯里(ジョビネー)、凯基(ケージー)、威尔逊(ウイルソン)的几何学以及彼德逊(ペテルセン)、亚历山大罗夫(アレキサンドロフ)的作图问题。
- (5) 其他各种杂志以及图书中的少见的问题。

然而这些问题，不仅种类的数量十分可观，而且难易程度的差别也非常悬殊。因此，为了方便起见，将收集的问题分为两部分。上面(3)、(4)中的反演、非调和比，对合及其他如近世几何学中的有关问题，与中学教科书关系不大的问题，属于一些特殊难题以及立体几何学的问题，汇集起来，收录于另卷，作为续编。本书是以中学生、各高等专科学校入学的考生、文部省考查的受试者等为读者对象，主要搜集与中学教科书有关的问题，加进了一部分反演、极和极线、非调和比等方面的问题。本书汇集问题的总数达三千

六百余题。

其次，在编纂中最大的困难是问题的分类方法。具有同一内容的问题，在甲的书中归于证明问题，可是，在乙的教科书中却归于轨迹问题，而在丙的考试问题中，则又归于作图问题或计算问题。若要将其一一列举出来，则需要很庞大的版面。因此，为了方便起见，把其中的大部分归于证明问题。轨迹问题，只选择有代表性的，并限制其数量。这个分类法和目录的形式是仿效现有的几何学书按一般易于理解的类别安排的。只要看出问题的大体系统，就一定能容易地查到解答。对特殊的问题，为了查找方便，以总结式分类方法，决定在卷末附上问题的索引表。

以上是编纂本书的动机和过程及其内容概要。

虽然现在本书已付印问世，而我却深感能力很低，书中未达到预期目的的地方甚多，内心很是惭愧。编者衷心希望各位学者、读者不吝指教，以利于不断加以修订，使本书能逐步趋于完善，成为学习上一本较好的工具书。

最后，谨向恩师笹川临风先生、挚友森本清吾博士、柳元吉次教授等诸位先生对本书所写的序文和忠言，深表感谢。同时，有关本书的缺点，渴望大家给予斧正。

笹部貞市郎

昭和十二年一月(1937年)

初版序言

拙著几何学辞典，最初发行于昭和十二年春。根本没想到为世人认可，也从未想到销售得这样快。当初由于没有别的同类书，学习几何学的人，为寻求难题的解法，费尽了许多心血。所以，从我的恳切愿望出发，不管怎样，为给同行爱好者提供一点方便而把拙著出版了。没料到它会受到广大读者的欢迎，一再重版，到昭和十七年冬，共印刷了三十九次。但因当时大战，出版机构全部瘫痪，以至在一段时间里不得不停止发行。由于战事日趋激烈，以致纸型连同出售的书店全部烧毁，再版已是不可想了。因此，到了完全绝望的地步。后承蒙同行朋友，一再嘱咐将本书重排，才下决心作出本书再出版的计划。

然而，旧版自发行以来，业已经历了二十年的光景，各方面都有了很大变化，今日的学校体制也起了根本变化，考虑到依照旧版原样付印不能适合当前的情况。因此，有必要对全书作新的设想加以修订。除旧版的平面几何内容外，要增加解析几何和立体几何的主要问题，吸收最近大学入学考试的试题和现行高级中学教科书中具有代表性的问题，总计收录五千余题，并将它们一一作出解答。

这样一来，总的修订轮廓虽然作出来了，但是当着手解答时，遇到了意想不到的一些费工夫的事情，困难也接踵而来，修订的进度缓慢。正在焦急之时，又于去年二月突然患脑溢血，半身不遂，卧于床上，与病魔作斗争达二百余天，让手稿白白地埋在尘埃之中，修订工作完全处于无望的深渊。但是，想不到病势幸有好转，逐渐能够重新执笔，再次鼓起勇气，将旧稿整理，渐渐地迎来了完成它的日期，这对我来讲，实在是感慨万分的。

现将本书的内容略述如下：

- (1) 为了使查阅方便，问题的分类大部分依照旧的分类方法。
- (2) 解析几何，虽以现行教科书和大学入学试题为基准，但为了便利读者，也吸收了部分难度稍大的题目，并了解答。
- (3) 立体几何的问题很多，解法大多数是相当困难的，但因版面有限，所以只能收进主要问题，不必要的，全部删略。
- (4) 虽然依据目录，能够容易判别大部分问题的分类，为了慎重起见，在卷末，以总结的方式，列举了问题的分类表，以便查阅。

最后，由于我的精力不足，在本书内容方面考虑不周之处和种种谬误、误排都是有的，这会给诸位读者带来很多的麻烦，不胜畏惧。恳切地希望读者把觉察到的地方，都能提出批评指正。

笹部貞市郎

昭和三十一年九月(1956年)

第二版 序 言

如在旧版序言中所述，笹部贞市郎先生于大正末年，就有了编纂几何学辞典的想法，他以平时研究几何学的笔记为基础，经过十多年的艰苦努力，于昭和十二年，出版了《新编几何学辞典》。在战后，先生又以手边存有的原版本作基础，准备进行修订出版，并且决定增加当时数学教育变化的内容，这就是在昭和三十一年，我们所见到的修订本，《几何学辞典——问题解法》（初版）问世了。这期间，先生身患重病，既要与疾病作斗争，同时又要完成修订辞典这项艰难工作。先生的坚韧意志，真是令人敬佩。尽管如此，修订本仍顺利地出版，到昭和四十七年，共印二十次之多。这时候，先生本想将辞典再次修订，但因年事已高，病魔缠身，竭自己的力量进行工作已是不可能了。因而就筹划下述诸点，授意作为先生旧友（前弟子）的我，着手进行修订。我欣然受命这一信托。

- (1) 随着战后数学教育的变化，大学入学考试中代数几何的综合性问题增多。这些虽曾有所收录，但很难做到十分完整，对不足之处应予增补。对一些形式上看来似乎不同，但内容上却是相同的问题，也应作调整。
- (2) 最近，特别是向量和复数方面的有关问题正在出现，希望增添这方面的基本内容。
- (3) 为了加深读者的理解，以前解答显得稍微冗长的地方还不少，如有简洁解答，应该更换。
- (4) 因为别解多（先生很爱别解，凡是他所知道的不列入书中，就感到内疚），所以在原题的解和别解中，应该选出简明的发表。
- (5) 在几何问题中，使用另一题的结果来解答的很多，象这样的有联系的问题，若在解答中指出参照某题，将对读者有所帮助，所以希望增加这样的提示。
- (6) 附录的几何学史^①，由于原版本是再录于杂志上发表的文章的片断，所以要全面地改写，使其内容上连贯一气。

正当按先生筹划的各点专心进行修订的过程中，先生不幸逝世，终于未

^① 几何学小史没有译出。——译者注

看到这一工作的完成，深感遗憾。我虽学识水平不高，又无所成就，然而值得告慰先生的，尽管我做得不够完善，但总算完成了先生的遗愿，这是托先生的福。

最后，向执笔“几何学小史”的岩田至康先生、归纳整理“重要定理、公式”的内田虎雄先生以及有关编辑工作的，特别是以仓本熊雄先生为首的诸位先生所给予的大力帮助，深表谢意。

小出一郎

昭和五十一年九月(1976年)

旧版序文

人们常常可以听到一种说法，初等几何问题最难解了。这大概是由于它的解法比较零散，因此比较难于找到门道。我自己也是在动手做了许多题目之后，才较为纯熟的。我想，如果只想解那些不费力就能解决的简单问题作用不大，所以解题需要用比较多的时间就不奇怪了。此种劳动对学生来说，也许是一种练习，但如果把它当作每天必需的课题，对人们来说完全是无意义的浪费。因此，为了弥补这一点，编出一本完整的几何问题的辞典，实属必要。这大概也是得到很多人重视的问题所在。有那么多的人重视它，或寄希望于它，可是对于从事编纂它的作者的困难，恐怕人们一点也不了解。我们可以想象到，那些原来一个个分散的、变化繁多的初等几何问题，仅把它们逐一分类，也就相当困难了，几乎是难于完成的，再加上出版的困难，一般人连着手的勇气都没有了。

笹部先生设想作这番事业是很早的事了。他和我最初从接受甄别考试时就相识为朋友，特别是同住东京，我们的工作相同，所以更是亲密无间。他弃职去东京的主要目的，就是为了完成编写辞典的工作。后来，他虽有很多方面的活动，但无论何时，都不忘这个最初的打算，一有空闲，就孜孜不倦地按原计划进行工作，持之以恒十余年，终于完成了现在所见到的这个本子。我除了对他的热情和坚强毅力表示敬佩之外，又对他终于实现了最初夙愿表示衷心的祝贺。

本书当然不能讲是完美无缺了。然而，敢于去从事别人都犹豫的事，而且不顾多年的劳苦是否有效，决心去达到目的，仅就这种勇气，也不得不使人敬佩。如果要进一步苛求的话，那是无止境的，只能是愿望。无论何时，如果踌躇不决，这样的事情，永远也是无法开头的。现在，我们不仅看到他的工作完成了，书的体系又安排得这样好，而且又将看到这本书能被充分的利用。这是他十余年来苦心的结晶，也是必然的结果。作为最初的尝试，可以说是非常成功的。

我欣然作此序文，以祝贺他的成功。

理学博士 森本清吾

昭和十二年一月(1937年)

初 版 序 文

初等几何学，从其发展史来看，是数学诸分支中最古老的，也是已经成熟的学科。然而，不仅由于问题种类繁多，而且解法也很多样，所以，初学者往往把它看作很难的学科，常常有敬而远之之感。

有一种说法，只要把基本定理大致了解了，那么一切问题就能够解决。事实绝不是如此，如作辅助线、寻找特殊点、图形的变换等都需要有相当的技巧。谁也别想一见到几何题就会解出或能将它全部谳记。因此，把这些问题作出系统的分类，并一一给出解答要领，编纂成一部查阅方便的辞典，对于读者，将提供极大的方便，这也是所有关心本门学科的人的希望。

本书编者笹部先生，是位热心研究初等几何学难得的一位笃学之士。以前的《新编几何学辞典》曾博得大家的好评，这次进行修订增补，给我看了校样，确实象他的序文所述，不仅保存旧版中的平面几何，而且增补了立体几何、解析几何、投影画法，还增加了几何学发展史部分，总数达五千余题，并且给出了解答，是一部庞大的著作。我由于无暇一一拜读每个解法是否恰当，纵然不能保证都很完善，但对于他独立完成这部巨著，我不吝用美好的语言来表示衷心的赞赏。

事实上，不难设想，象这样的大部头学术书籍，仅靠一人编写，要求达到完满的境地是没有道理的。我想，无论如何，只要众多同行好友，不惜时间，通力合作，补其弱点，改正其错误，一定能使它达到完善的地步。

理学博士 小倉 金之助
昭和三十一年九月(1956年)

目 录

旧版序言	1	旧版序文	7
初版序言	3	初版序文	8
第二版序言	5		

第一编 绪 论

第二编 证 明 题

第一章 直 线 形

1. 角, 平行线	5
2. 三角形	8
(1) 全等三角形	8
(2) 边、角的大小	11
(3) 两底角的和与差	13
(4) 垂线	15
(5) 角平分线	17
(6) 边的中点、中线、重心	21
(7) 直角三角形	26
(8) 等腰三角形	30
(9) 正三角形	33
(10) 三角形杂题	36
3. 四边形、多边形	39
(1) 四边形	39
(2) 平行四边形	43
(3) 长方形、菱形	46
(4) 正方形	47
(5) 梯形	53
(6) 多边形	54

第二章 圆

1. 圆的基本性质	58
2. 圆心角、圆周角	61
3. 弧、弦	64
4. 切线	75
5. 三角形的内心、旁心、内切圆、	

旁切圆	87
6. 高、垂心	99
7. 三角形的外接圆	106
8. 圆内接、外切四边形	113
9. 相交圆、相切圆	120
10. 西摩松线、九点圆	135
11. 圆内接、外切多边形	140
12. 杂题	143

第三章 面 积

1. 基本性质	150
2. 三角形的面积	151
3. 平行四边形的面积	160
4. 梯形、矩形、正方形的面积	166
5. 任意四边形的面积	169
6. 平方关系	173
(1) 勾股定理及其应用	173
(2) 三角形的中线、重心, a^2+b^2 型	178
(3) 三角形的垂线, a^2-b^2 型	183
(4) 四边形	186
(5) 圆	190
7. 根轴、根心及其应用	196
8. 海伦公式及其应用	198
9. 多边形的面积	200
10. 杂题	203

第四章 比 例

1. 基本性质	207
---------------	-----

2. 平行线的比例线段	208	12. 三角形的内切圆、旁切圆的比例线段	280
3. 角平分线的比例线段	216	13. 圆内接、外切四边形及其他多边形的比例线段	286
4. 相似三角形、相似多边形、位似中心	224	14. 两个(或多个)圆的比例线段	292
5. 正三角形、等腰三角形的比例线段	240	15. 面积的比例线段	303
6. 任意三角形的比例线段	243	16. 调和点列	310
7. 平行四边形的比例线段	251	17. 托勒密定理及其应用	315
8. 正方形、矩形及其他四边形的比例线段	254	18. 中外比(黄金分割)	317
9. 切线、割线的比例线段	259	19. 梅涅劳定理、乔巴定理	318
10. 直径、弦的比例线段	268	20. 圆、正多边形的比例线段	325
11. 圆内接三角形的比例线段	273	21. 杂题	337

第三编 轨 迹

1. 基本轨迹	347	垂心的轨迹	339
2. 线段(或弦)的中点或其定比分点的轨迹	348	11. 直线形面积的轨迹	395
3. 两直线交点的轨迹	359	12. 到两定点(或三定点)距离的平方和或平方差为一定的点的轨迹	399
4. 定长线段一端的轨迹	370	13. 到两定点(或两定直线)的距离的比为一定的点的轨迹	404
5. 两线段的和与差为一定的点的轨迹	373	14. 相似三角形的第三顶点的轨迹	407
6. 垂足的轨迹	375	15. 以分成的线段为边矩形的面积一定时分点的轨迹	410
7. 圆心的轨迹	378	16. 调和点列的轨迹	414
8. 两圆的交点(或切点)的轨迹	382	17. 杂题	417
9. 三角形(或四边形)的顶点的轨迹	385		
10. 三角形的外心、内心、旁心、重心、			

第四编 作 图 题

第一章 求点的位置

1. 在已知线段上求适合条件的点	423
2. 到已知点(或已知直线)的距离	425
3. 求构成定角(或者等角)的点	428
4. 线段的和、差为定值	432
5. 求已知三角形(或已知多边形)内的点	436
6. 求已知圆或已知圆弧上的点	439

第二章 直线的作图

1. 作符合已知条件的线段	442
---------------------	-----

2. 代数计算的作图题	444
3. 作与已知各点的距离相等(或为已知比)的直线	448
4. 作角平分线、垂线、平行线	449
5. 作与已知平行线相交的直线	451
6. 作与已知角相交的直线	455
7. 作与已知三角形的两边相交的直线	461
8. 作弦	466
9. 作与弧、圆相交的直线	472
10. 作割线	474
11. 作切线	477

12. 作倍弦481
13. 作按一定条件分割面积的直线483

第三章 三角形的作图

1. 作等腰三角形491
2. 作等边三角形494
3. 作直角三角形497
4. 作相似三角形、全等三角形501
5. 作一般三角形506
 (1) 已知底边与顶角506
 (2) 已知中线510
 (3) 已知高或垂线514
 (4) 已知两边(或两角)516
 (5) 已知两条边(或三条边)之和518
 (6) 已知两条边(或两底角)之差522
 (7) 已知内切圆(或旁切圆)的大小526
 (8) 作三角形内接、外切于定圆(或定多边形)531
 (9) 已知面积的作图题534
 (10) 其他536

第四章 四边形和多边形的作图

1. 平行四边形539
2. 矩形544
3. 正方形548

4. 菱形555
5. 梯形557
6. 一般四边形559
7. 多边形568

第五章 圆的作图

1. 基本作图572
2. 作切于已知直线(或已知多边形)的圆或与已知角相交的圆573
3. 作与已知圆相切的圆577
4. 作与定直线、定圆相切的圆582
5. 作在定直线(或圆)上截取定长线段(或弧)的圆586
6. 杂题592

第六章 最大、最小

1. 线段的最大、最小598
2. 角的最大、最小602
3. 两条(或几条)线段的和、差的最大、最小604
4. 平方和与差的最大、最小611
5. 两条线段的积(或比)的最大、最小613
6. 三角形(或多边形)周长的最大、最小616
7. 面积的最大、最小619

第五编 计算问题

1. 角、对角线627
2. 边数629
3. 线段的长630
4. 三角形的角平分线、中线、高635
5. 三角形的边长637
6. 三角形的面积640
7. 四边形(或其他多边形)的边长和面积645
8. 正多边形650
9. 扇形、弓形、弧、弦656
10. 直径、半径662
11. 其他669

第六编 立体几何学

第一章 直线和平面

1. 直线和平面(1)673

2. 直线和平面(2)682

第二章 二面角, 多面角

第三章 棱锥、棱柱、多面体

第四章 旋转体的表面积和体积

1. 圆柱	712
2. 圆锥、圆台	714
3. 球	721
4. 杂题	730

第五章 曲面体

1. 圆柱、圆锥	738
2. 球、球面三角形	744
(1) 球	744
(2) 球面三角形	760

第六章 投影画法

第七编 近世几何问题

1. 根轴	783	4. 反形	790
2. 调和点列、调和线束	785	5. 十字比、对合	794
3. 极、极直线	786	6. 杂题	796

第八编 解析几何

第一章 直 线

1. 直线的性质	801
2. 绝对值	809
3. 垂直、平行	811
4. 对称	815
5. 轨迹	817
6. 杂题	817

第二章 圆

1. 圆的方程	824
2. 切线	827
3. 轨迹	830
4. 杂题	833

第三章 抛 物 线

1. 图象	837
2. 顶点、轴、焦点、准线	840
3. 抛物线的切线、切点	842
4. 抛物线的方程	845
5. 轨迹	847
6. 无理方程、无理不等式的应用	849
7. 杂题	852

第四章 椭 圆

1. 图象	855
2. 轨迹	856
3. 切线、切点	862
4. 轴、顶点、焦点、离心率	864
5. 杂题	867

第五章 双 曲 线

1. 图象	872
2. 轨迹	876
3. 渐近线、切线	879
4. 准线、焦点、离心率、共轭双曲线、共轭直径	885
5. 不等式和区域	888
6. 杂题	889

第六章 坐标轴的平移和旋转

1. 坐标轴的平移	893
2. 坐标轴的旋转	894

第七章 参 数 方 程

第八章 极 坐 标 方 程

1. 直线的极坐标方程.....	901	2. 直线、平面、球.....	908
2. 二次曲线的极坐标方程.....	902		
3. 极坐标方程的对称性和其他.....	905		
第九章 空间坐标(点、 直线、平面、球面)			
1. 点、方向余弦、两直线的夹角.....	907	第十章 复数、矢量在初等 几何里的应用	
		1. 应用复数的解法.....	913
		2. 应用矢量的解法.....	923

附 录

重要定理、公式汇集

第一编 绪 论

1. 几何学是研究什么的学科。

解 我们周围的物体，都是由一定的物质组成的，并占有空间的一部分。这些物体都具有颜色、重量、硬度和气味等。这样，一切物体都具有构成它的物质的特性，物理学和化学就是研究这些物质特性的。

如果不考虑构成物体的物质，只研究物体的形状、大小和位置，就形成关于物体形状的同和不同、大小相等和不等，或者两个物体距离的远近等等关系。象这样，完全抛开物体的物质特性，只考虑物体的形状、大小和位置，我们称之为物体的空间性质或称为图形性质。几何学就是研究物体的空间性质的学科。

2. 什么是公理。

解 几何学虽是研究图形性质的学科，但学习几何学的目的不仅是为了研究图形性质，而且要培养有条理地处理事物，即培养逻辑思维的能力，所以一定要以正确的推理作为学习几何学的侧重点。

一般来说，对“三角形内角的和等于两直角”或“相似三角形面积的比等于其对应边的平方的比”等等，如果不阐明它的理由，这是谁都不会立即承认的。但对“整体大于部分”、“过两点 A 、 B 只能作一条直线”，这是任何人也不会有异议的。这样，以人们无条件地承认的事实，作为推理的根据，我们称它为公理。

公理有通用于数学各科的一般公理，有仅用于几何学的几何公理两种。

下列十条为欧几里得公理。

一般公理

- (1) 与同一个量相等的两个量相等。
- (2) 等量加等量，其和相等。
- (3) 等量减等量，其差相等。
- (4) 整体大于部分。

几何学公理

- (5) 完全重合的图形相等(合同公理)。
- (6) 过两定点能作且只能作一条直线(直

线公理)。

(7) 线段(有限直线)可以无限延长。

(8) 以任意一点为圆心，可作半径等于任意长的圆(圆公理)。

(9) 直角都相等(角公理)。

(10) 在一个平面内，过直线外一点，有且只有一条直线和已知直线平行(平行线公理)。

以这些公理作基础所建立的几何学，称为欧几里得几何学。

可是，在这里我们要指出一个麻烦的问题，即对上述公理(1)~(9)大家是没有疑义的，但对(10)平行线公理，有些学者却持有异议。

十八世纪初，萨开里认为平行线公理，在我们周围的狭小范围内是正确的，但在广阔的空间、离开直观而进行探讨时，就有疑义了。到了十九世纪初，罗巴切夫斯基和鲍耶两位学者，以“在平面内，过已知直线外一点，能够作无穷多条直线和这条已知直线平行”作为公理，分别建立了非欧几何学。另一方面，几何学大师黎曼，从另一角度提出“过已知直线外任一点的直线都与已知直线相交”作为公理，建立了另一种非欧几里得几何学，这就是黎曼几何学。近代对爱因斯坦所开创的相对论原理的研究中，也完全证实了黎曼几何学。

不过，本书的内容，完全不涉及非欧几何学，因此不去论述非欧几何。我们只用欧几里得公理作为依据来研究几何学。

但是，欧几里得公理除了上面提到的问题外，也还可以指出种种不完备之处。现在，本书所采用的公理，是参考希尔伯特的“几何学基础”中所列举的公理，对它进行认真修饰而成的。我们将以这些公理为根据，推导各个定理。这里的点、直线、平面为不定义的概念。关于平行的定义说成“在同一平面内，如果两条直线不相交，则称它们是互相平行的”。

(1) 关于平面、直线、点的公理

- 1) 过不同的两点，可作而且只能作一条直