专题参考资料（二）

计算流体力学译文集

武汉水运工程学院科研科

前　言

计算流体力学在国外书刊中使用很多名词：Computational Fluid Dynamics（计算流体力学）；Numerical Fluid Dynamics(数值流体力学)；Numerical Mothods in Fluid Dynamics（流体动力学中数值方法）；Numerical Simulation of Fluid Mechamics（流体力学的数值模拟）等等。总的意思都是用电子计算机为手段求解流体力学中的各种各样问题。

虽然电子计算机的应用已有廿多年历史，但它对流体动力学发展的影响仅仅到现在才缓慢地显现，这也可以从流体力学方面发表的论文中，有关数值计算的论文比例的增长看到其迅速发展的趋势。

由于计算流体力学蓬勃发展，各种专门期刊和专门会议都相继出现。“Computers & Fluids”（流体和计算机）是一本关于计算流体力学的专门杂志；“International Journal For Numerical Methods In Engineering”（国际工程数值方法杂志）每期都有计算流体力学方面文章；“Journal of Computional Physics”（计算物理杂志）；“AIAA Journa（美国宇航学会杂志）；“Trans of The ASME Ser.I”（美国机械工程学会会报）；“Journal of Ship Research”（船舶研究杂志）和 Motortechnisch Zeitschrift（西德发动机技术杂志）……等等期刊都有计算流体力学方面文章。

流体动力学数值方法的国际会议已召开六次，其中有限元法的应用在七十年代初期亦有迅速发展，自1974年起，每隔二年召开流体问题有限元法的国际会议。这也说明计算流体力学已形成一门独立的学科，发挥了它的巨大作用。计算流体力学的发展，同样影响着船舶流体力学的研究。1976年召开了第一次国际数值船舶流体力学会议；接着在1978年又召开第二次。一些复杂的船舶流体力学问题正在通过数值计算方法加以解决。

为了学习和研究计算流体力学，在1977年我们曾出版“专题参考资料一。压力波计算译文集.”。现在我们又翻译了本译文集（专题参考资料二。计算流体力学译文集.”。计有综论方面的文章五篇；内燃机流场计算二篇；叶轮机械流场计算三篇；油膜流场计算三篇；一元不定常流动压力波计算三篇；船舶流体力学数值计算五篇；数学基础知识二篇；计算流体力学讲座一篇。

全部译文二十四篇，早在1979年9月前已完成交付刊印，但一直拖延至今，还不得不再分两册出版。本期先刊出前十五篇，请关心的同志给予原谅。

由于译者水平有限，文中错误（包括印刷错误）难免以及不妥之处望指正。

编译者1980年12月

目　　录

数值流体动力学展望

D.A.FRITH

墨尔本航空研究室机械工程部首席研究员

摘要 以数值方法采用计算机来计算流体流动的努力在与日俱坛。关于这方面进展的回顾，特别应着重于一般应用的领域而不是那些为着特殊理由而加以特殊处理的领域。我们在这里略述计算流体流动的主要方法同时还讨论一些有关的问题。可以推断，当存在某些计算方面的问题需要研究时，需要在建立流动的物理模型方面作出最大的努力。

表I 按计算的复杂性分类

项 目		复杂性 ⟶
流动的种类		二元或轴对称流动 基本二元流动 三元流动
型 式		附着的流动 从锐缘分离的流动 分离的边界层
稳定性		稳定流动 周期性的非稳定流动 随机的非稳定流动
尺度	层 流	低雷诺数 适度的雷诺数
尺度	湍 流	高雷诺数 适度的雷诺数
压缩流		不可压缩流 超音速流 亚音速或跨音速流
相		单相 两相分界 多相
热效应		可忽略的 壁面加热或冷却

1. 引 言

普遍认为数字计算机的出现，在流体动力学这样一些领域的数字计算方面，引起了一场革命。然而，赖以改进我们获得解答的能力有时是成问题的。自从人类出现以来，这种与大多数科学思想进程中意义深远的革命有关的悲现主义，看来总是短暂的现象。

Argyris和Thwaites*在展望未来的时候，显示出了相反的乐观主义，但是必须记住，他们涉及的是宇宙空间这一特殊的应用领域。

在电子计算机应用的二十年间，它对流体动力学发展的影响仅到现在才缓慢地显示出来。这一点是由发表研究论文数量的趋势指出来的，见图1。即使长期研究，趋势还是不那么清楚，甚至对这个领域的工作者也是如此，这是因为只把注意力放在解决这些复杂计算中的数值问题，而没有检查这些结果的意义。这个技术上而不是结果上的集中，可由出现于近年来这方面大量的参考文献中的文章的种类得到说明（见参考资料）。例如，1976年元月，在Monash大学举行的为期一周的“流体动力学系统的数值模拟”专题讨论会上，所有的文章都是用来考虑这类问题，即获得被检验的方程的高效的和证明过的数值方法，很少讨论用这些特殊方程来描述物理过程的

* 见本文末尾参考文献。

正确性：其正确性认为是不言而喻的。甚至在Argyris和Thwaites的回顾文章中这个问题也是肤浅地一带而过，即使后者仍然承认这个固有的问题，特别是关于湍流。

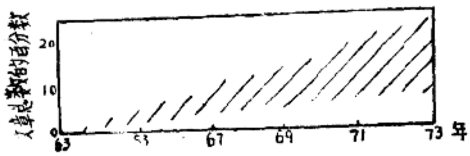

图 1　数值方法论文的坛加（Krause）

尽管，或许因为当前较为另碎的研究能够作为研究工作者一个了解整个领域的有用的训练，用以展望当前的趋向。这就是本文的目的。

流体动力学问题广阔的范围，至少可以分七大类，列表于表I，其中计算的复杂性自左向右增加。

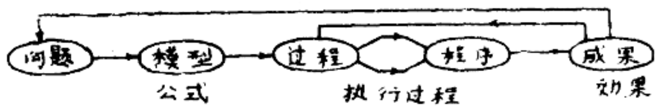

图 2　一个流动模型计算的过程

表Ⅱ　某些过去、现在和将来可能的流动计算方法

	均匀二元流绕机翼流动	通过涡轮机叶片的流动
过　去	非粘性不可压缩流动问题通过用源、汇和涡的分析方法求解	有激动盘的非粘性不可压缩轴对称流，分析解
现　在	非粘性可压缩流动问题用松弛或时间推移数值方法求解	有着叶片力和损耗的非粘性可压缩流，数值解
将　来	非粘性可压缩流动　　边界层予测，用时间推移法求数值解	有着叶片力、损失和拟切应力的可压缩轴对称流，时间推移解

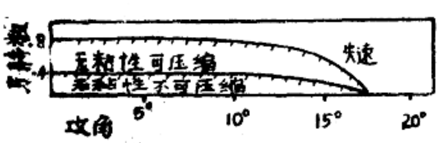

图 3　关于两个机翼流动模 型 正确性的典型范围

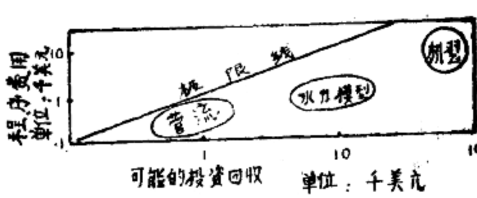

图 4　不同应用的相对费用

那么什么是计算流体动力学在这个广阔领域的展望呢？为了试图提供一个答案，必需指出一个时间标尺，计算流体动力学是在长期酝酿之后于二十年前诞生的而现在正进入它的青

春期。问题是十来年之后以什么成熟的姿态出现呢？

在讲这个问题的时候需要检查一下这个领域内两个方面的发展情况。其中之一是确定程序以及指导工作人员产生一个计算机程序用以解决有兴趣的特殊问题的技术。另一个问题关系到已证明的程序来解这些问题的有效性。

在计算流体力学的发展中的这两个不同目标的问题之间的平衡，对研究的普遍用途有着重要影响。

然而，从这些计算获得的结果的具体的用途也是同样地重要的。为了作出有关的流体动力学系统性能的估价，如果它们与有关的试验程序相偶合，则在计算中所必需的自信程度通常大于单独应用它们所取得的结果。

2. 模型公式，执行过程

在详细阐述这个问题之前，回顾一下用电子计算机处理流动模型并从而得出解答所必需的过程是恰当的，图 2。

有两个不同的学派经常对这个过程进行研究。一方面是流体力学家和工程师，他们关心的是流动的性质，他们的兴趣集中于这样一些方面，如层流到湍的转变，湍流的表示，分离的予报，非稳定流的机构特别着重于它对边界层发展的影响，非粘性（压力）流与粘性流影响之间的偶合等。另一方面，还有一些数值分析家，他们关心的是指定的数值过程的相容性，稳定性和收敛性；以及有关的这样一些问题，诸如加速过程收敛的方法，在空间一时间网格系统中数值误差传播的机理，对于一个特定的问题适当地选择边界条件等。他们感兴趣于得到结果的方法而不是结果本身。

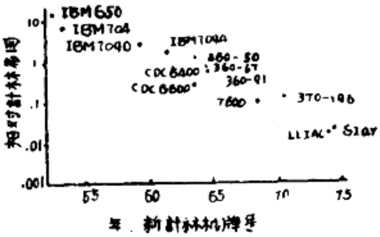

图 5　流动模拟计算费用的趋势图形取自Ames研究中心

2.1 公式

公式化的基本目的是选择一组描述流动物理现象的方程式，用以得出与解出方程的可能性的符合一致的详细内容。这些方程式就构成了此特定流动模型的基础。

当这个模型选好了，可以对这个模型的应用范围作一估价，在此范围内，模型和实际情况之间的误差是小的，同引起这些误差的原因很大程度是知道的，所以任何引起这些误差坛加的不寻常的因素将被认识到。

这一段说明最好用一个例子来讲清楚。绕翼型的二元势流通常用来模拟绕飞机翅膀的流动。这儿机翼仅有适度的后掠而展弦比又适度地高，经验告诉我们在这种情况下把流动看成是二元流是有道理的。关于这个模型的应用的进一步的限制描绘于图 3 中。如果冲角充分大以致流动分离而机翼失速或者速度充分大以致于压缩性的影响变得显著，则这个模型成为不适当的。

在上述限制范围内，如所熟知，对于一个给定的冲角，势流模型对机翼升力估计过高，这是因为边界层的位移效应和尾迹未计入。还可知道，如果流动有着非常低的雷诺数，则这个模型

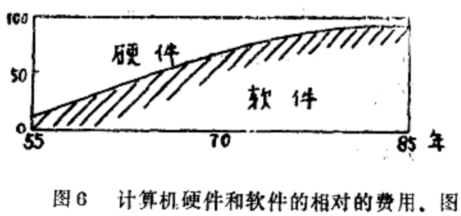

图 6　计算机硬件和软件的相对的费用．图来源，Stamd ford学院

的应用是有问题的。

过去，为了能够获得分析解对列式作强加的约束，以建立确定模型的方程组。此方法叫“定向解”。

在上面的例子中，粘性与压缩性的忽略，来流无旋性的假设，通过采用势函数发展起来的强有力的分析技术，使方程得到解答。

今天这些方法总是被一些数值方法所取代，其结果是约束条件得到放宽。例如在支配方程中现在压缩性影响是被保留的，而以前它们是被忽略或用局部线性化的技巧而近似处理。

现在课题就变成满足某些边界条件，在一个空间连续区和可能的时间上解偏微分方程组的问题。

众所周知，即使问题是解出一个稳定流动，也可以通过时间推移法来解非稳 定 流 方 程式。假定问题已很好地提出来，则计算值将渐近于需要的稳定流解。

这个问题能够通过选择一个适当的离散化方法，转换成一个在计算机上执行的数值过程而加以解决。那就是在所研究的在时间和空间区间上连续的可微分的描述流动的物理量，可通过选择的网格点上的值来近似，求解所得的代数方程可以用许多方法，事实上常用的是迭代法。

有三个基本途经达到这个离散化：

有限差分法

有限元法

级数解法

在界限以内，这些解法形式上可归纳为同一方法，也就是广义的伽略金法，但它们出现于计算机时在这样一些方面有差异，如数值过程的稳定性和收敛性。数值方法的选择乃问题的定向，而当前努力研究的主流是选择适当的方法便于拟定程序。Monash大学最近的专 题论文集就着重这个主题。

过程的选择需要详细考虑这样一些方面，如是用前差、中心差或后差，边界条件适当的表示，隐法和显法的比较功效，网格适当的尺寸，数值误差的传播和诸如此类的题目。问题定向是非常广泛的，但还有更一般的趋向迹象出现。

2.2 执行过程

通常，承担一个数值过程的任务，把它编成程序，上机，检验它并且提供必需的辅助文件都是由专业程序员进行。还有一些场合，特别是在研究中，流体力学家和数值分析家将要参加这项工作。

不管谁拟订一个程序，这项工作的重要性是经常被低估的。虽然绝对检验一个程序的难事对计算结果的自信心有着关键性的作用，甚至当这些结果已由这个领域一部分的适当的试验数据所证实。

2.3 应用

应用经过检验的程序，通常有两种情况，一种情况是程序的产生者同时又是它的应用者之一，或者至少是进行与后者紧密相关的工作。另一种情况是应用者所运行的程序是另外的

地方产生的。

其差别在于一个程序需要的检验和文件的程度不同。

在前一情形（即程序编排者同时又是应用者）中，文件可以是极少的（见计算机程序指南）而且检验可以被包含以及在生产进行中通过由程序检查其结果的办法而不断加以改进。在应用者不是程序编制者的情形中，对文件有更大的要求，而在程序由他人充当应用时，必需完成广泛的验证。特别，必需在程序以及文件中，由误差信息指出正确性范围。

当打算将程序用于程序应用者不是程序编排者的情形，将出现两个特殊的因素，对于取用程序要进入到的具有充分速度和容量的计算机的问题以及本机与产生程序的计算机之间的语言互换性程度。

在这些因素中将来的趋势，正如上述其他的讨论一样，将影响正确的已检验的程序的有效利用率。

3. 模型概念的发展

计算流体力学的飞速发展使得流动问题的广泛领域能够更适合采用更精确的表达式来进行计算。但是这并不意味着这个领域目前是包罗无遗了，或者用过的模型的精确度是很好了。这个趋势列表说明于表Ⅱ中，其中对各个方面都作了说明。这些将来的模型的形成和应用很大程度上可由考察可能用到的约束而认识到。

3.1 模拟的模型

看来长期趋势得朝着计算完备的方程组，而不是解简化的流动模型。

过去，简化基本方程以获取解答是需要的。随后这些简化模型已被证实是违反能够证实这简化为合理的观察的，但是正如下面所指出的那样，这些证明为合理并不包括流动性质的所有方面。

对方程有分析解的简化模型的应用过去常常作为主要趋向，多少容易看出与模拟的比较是可能的，因为后者总是获得变量之间的函数关系，而具有试验一样的模拟仅给出数值关系。

Thwaites论述，这些简化模型是由近似产生的，而这些近似可能使得某些流动基本特征失效。这方面的一个例子是达朗贝尔背理，它并不真是一个背理，它是意味着势流仅是实际流的一个近似，而由此得到的关于物体阻力的结论是不能用的。

使避免简化模型的危险而流行的一般趋势是可以通过应用将来的计算机的大量储存和高速输出设备很好地得到解决。数值模拟的解答能够储存于机器中。然后这些结果能够被重复地扫描以获得需要的流动特征，而不再需要在模拟方面坛加大量外界出版物。

可以予见，在流动区域的某些部分，对于建立模拟模型，是没有合适的简化模型的，而且由于真正的流动特性，也不大能会发展简化模型。分离流就是这种流动区域的例子。

3.2 对模型的公式化极限

在展望数值模拟的进一步发展的趋势时，要考虑那种能包括一切流动区域的数值模拟。所包括的范围将受到强加的一些约束条件的限制，这些约束条件是在给合适的模型公式化以及实现这些模型时必须满足的。

在某种意义上讲，公式化的约束可由湍流的例子指出来，引自Thwaites的一段话：

“现在我们已经确定无疑地认识到流体动力学的纳维—斯铎克斯方程与观察到的湍流特性之间的关系；早期的科学家如G. I. Taylor和Von Karman抱有一种乐观主义，第二次世界大战以后Batchelor和他的同代人也继续抱有就种观点，可是现在已经默认，对任何真正的湍流，并未见到纳持—斯铎克斯方程的直接解答。也没有出现在一般情况上予报湍流开始的任何可能性。”

因此现在模拟层流和模拟湍流有着根本的不同，在层流情况下纳维—斯铎克斯方程是可用的。尽管在这方面开展了有力的工作，但在平均湍流的描述方面尚无突破。

因为湍流构成总的状态的重要方面，看来这个值得注意的部分近来可接近于模拟，也可能还要些时间才能做到。

3.3 对模型的执行极限

在本文的范围内考虑包含的价格是必需的。很明显，一个流动问题，只要降低百分之几的损耗就价值数千美元，必须密切地注意，对于一般的流动问题，宁愿采用比较成熟的数值计算方法。绕机翼的高亚音速流动就是前一类中值得注意的例子：费用参见图4

然而，随着计算机硬件和软件系统的飞速发展，这一情况并非一成不变的。单位计算的费用（图5）是如此急速地降低，以致于十年前不太经济的计算，现在进行起来却是不成问题的事。此外，在如前所述的航空工业的一些领域中，今天存在着发展计算流体动力学的广阔源泉。这些方面将来可以没有更普遍的意义，但是有理由相信，作为主要分支的普遍的应用将继续出现。

这样的分支可以予期具有两种形式：为有效地进行特殊形式的计算的方法的证明，或者更重要地，流动模型范围的扩大。

计算流体力学的最活跃的领域之一，包括特殊流动模型的计算，计算结果与试验值的比较，从而，被确认的流动模型得到应用。

这方面的一个特殊的例子是在加利福尼亚大学（Harlow）进行的工作，在那儿计算了绕非流线体的分离流。在得出这类物体阻力的问题中，对应用试验或大量经验数据而言，这个长而又贵的计算并不能被认为是一个非常可取或者是值得赞美的。但是计算流动与实测流动在相当大的雷诺数范围内符合甚好这一事实，意味着在这类分离流的予报方面已经跨出了重要的一步，这一定会影响到流动的计算能力。但这个研究的全面影响在现阶段尚无法估计。

大家知道，调整和验证计算机程序的过程在解问题到得到结果的总的过程中，是最费时费钱的（Hetzel)。例如，NASA阿波罗项目花的钱，估计大约有80%的钱专用于程序试验（Yourdon）。程序验证原则上与模型合法化问题是完全独立的问题，当由计算产生的数字与观测不符，则将误差归因于模型公式化还是归因于计算机执行此程序还是一个困难的工作。经验告诉我们，要完全证明一个大而复杂的程序几乎是不可能的，Prietrasanta总结道：“可以总是这样说：要是程序是没有误差的程序，则将是永远不会运转的”（Hetzel）

尽管如此，在现阶段它还是一个大大地被忽略的课题，因对这方面的问题，几乎没有什么文献，没有什么研究，也没有什么评价（Yourdon）。

看来这一情况继续下去是不大可能的。由于程序试验费用坛加，很明显采用通过商业协

议更得到的证明过的程序的趋势大为坛强，而不是为着同一目的企图在单位里发展程序。

先进的计算机语言如Fortran语言的发展提供了一种程序化手段，这种手段较之计算机代码及汇编程序语言对人们更为合适，而汇编程序语言是较先就有的而且在规定需要的时候还在应用。正如Thwaites指出的，对于找到更先进、更科学的语言以进一步降低程序误差的可能性从而改进验证过程，存在着一定程度的促进作用。

然而，这样一个意见还必须由于这样的事实而加以推敲：科学的计算仅为计算机总的活动午台的一个小的部分，因而对于创造一个新的特殊目的的语言的昂贵过程，只有相当小的需要。

另一方面，要密切注意到，在计算机工业中，软件（程序化）的费用相对于硬件（机器）的费用而言，有坛加的趋势，如图6所示。这促使大家向着“编程序不用程序员”的目标前进。（Voysey）这是通过产生一种高水平的类别，产生一种能够对流体动力学模拟程序化起重要作用的程序化语言而达到目的的。

另外一个发展趋向于简化执行程序的工作，这包括诊断程序和试验程序，通过应用遥控操纵台和高速输入以及便于控制计算过程的显示式输出装置，来改善人与机器的联络。

然而通过在总程序中更多地采用验证过的成分，如旁人发展的辅助程序，将明显地大幅度降低程序验证的所占大比例。

3.4 运算的极限

在某些特殊应用领域的着重努力，由于延伸到其他领域的付产品，由于流动模型范围和其他方面的利益而部分地形成分支。然而还有一些并非不重要的方面尚未得到发展。看来可能这个趋势还会继续，其结果是，总有一天，会有一系列概括主要问题方面的一系列验证好了的程序，而这些程序的少数将可用其他领域；任何人如在这些领域中之一有所需要，将产生和验证所需的程序。

4. 讨　论

无疑，新发现的解描述流动情况的更有代表性的方程组的能力，促进了一些领域内的研究工作，从前这些领域被认为是太难以改无法解决的。可以期待最终一定会导向有分离的，有非稳定效应的有现实意义的湍流流动模型。

然而，还有如此多方面的绕流问题尚无正确的流动模型，这样，是否有宽范围模拟在所讨论的时间范围内成为合用的还是有问题的。

已作出巨大的努力以产生计算机上的数值方法的基本规则，特别要强调那些重点应用领域所需要的方法。某些努力是否有价值还是有疑问的，一旦更先进的模型得到应用，其结果就将被忘记。例如，很难想象非粘性流动模型将与存在不真实的边界条件形式一起继续使用。

尽管如此，很明显，在数年之内，那些涉及求解流体流动的问题将能够从最切合于流动问题的数值技术文献中收集到解答。无论如何，这对于那些感兴趣于应用验证过的程序以求得他们问题的解答的人是一个小小的安慰。存在着一个使得程序能用于一般用途的趋势（例如参

见流体力学中数字计算机程序目录）但是这个过程被程序验证、文件编制和符合商业协议等类问题所抑制。

这些问题或许同发展着的前景有关，将来它们被充分地解决是可能的。程序发展费用将保证供给共用程序或交换程序的合理方法的创造，而且还将鼓励发展被别人采用的标准化合适的程序。

还可以指出是，程序也将更加普遍化，因而它们的应用范围也会增加，而遥控装置和高速数据传输装置应用的继续增加，将增加对大机器的存取，因而也增加程序的应用。然而，重点可能是有待解决的与公害有关的应用问题。

5. 结 论

在十年左右的时间内，对具有解流体力学问题的经过检验的和通用的计算能力的前景还是小的。然而，在一些特殊应用领域内，如果说流动的物理机理被搞清楚了，则上述这种能力还是存在的。

6. 参 考 文 献

ARGYRIS, J·H, The Impact of Digtial Computer on Engineering Sciences, Part1. Twelfth Lanchester Memorial Lecture. The Aeronautical Journal, Vol 74, Jan 1970 PP13—41

CABANNES, Heni et al (Ed) Numerical Methods in Fluid Mechanics, 3rd, 1972 International Conference Proceedings. Engineering Scinces Data Unit, BR29590, 1975

CHAPMAN, Dean Computational NASA/University Conference on Aeronautics, University of Kansas, October 23—24 1974 NASA SP—372

Computer program Documentation Guidline, NASA NHB 2411.1 1971

HETZEL, William C. Program Test Methods. Prentice—Hall Series in Automatic Computation, 1973

HARLOW, Francis H, Numerical Methods for Fluid Dynamics, an Annotated Bibiography. University of California, LA—4281 Dec 1969

KRAUSE, Egon Application of numerical techniques in Fluid mechanics. Aeronautical Journal, Aug 1974 PP 337—354

（译自：热流体国际会议论文选 1978 翻译 马乾初 校对 王献孚）

为何要提出有限元

O.C.Zienkiewicz

1.1 导　言

什么是有限元？为什么在有限差分法应用得很成功的今天要提出有限元法？流体力学家们有理由提出这些问题，因为，在寻求那些适定的微分方程组所制约的复杂问题的数值解时，他们自己已经发展了一种强有力的有限差分法则，而这种法则今天正广泛地应用于实践之中。

为了回答这一无疑是十分重要的问题，在这篇导论中我们将试图：

1）用一种一般的形式定义有限元法；

2）展现这种方法的各个不同侧面，它们今天或多或少地已经得到了应用。

我们将会看到，在一种广泛的定义下，有限差分技术是怎样沦为总的有限元方法论的一种“子集”的。这种方法论甚至还包括了许多其它的经典近似方法。有限元概念的一般化并非出自于它的过分热情的信徒们的标榜，相反地，它只是为了扩大应用的可能性，给解法的多样性提供坚实的基础。

在进入本文的主题以前，读者也可能会提出进一步的疑问：阅读本文叙述，甚至这个会议的文集，使自己熟悉一个崭新的领域，这种努力是否值得呢？它是否真会提供一种强有力的工具而这种工具在所有领域内都优于人们原先所习惯的方法？问题的回答只有靠直觉来判断。然而，也许观察结构力学及固体力学方面的现状能提供一些线索。在那里，有限元的程序已经“接替”了其它可供选择的方法。在许多应力（结构）分析问题中，最近十五年来（自从初次出现“有限元”的名词以来已经过去了十五年）的研究成果已经成为日常的实践活动。由此推论，在流体力学的领域内现在来进行一场类似的革命，多半也会行之有效。

1.2 有限元概念

有限元法用于解这样一些数学或物理问题，它们通常在一连续域内由一组局部微分方程或者等价的整体表达式定义。正如其它近似过程在实践中所做的那样，为了使问题适于数学处理，这种方法也用有限数目的未知参数来离散或置换系统的无限自由度。

最初的有限元概念是指用一定数目的子域（或称“元素”）来置换连续的域，而这些子域的特性则可用有限数目的自由度来充分地换拟，并可用众所周知的在离散系统分析中所使用的过程来加以集合。在早期阶段，元素特性的模型常常导自于简单的物理常识，而避开其数学表达。尽管有人可以争辩说这种近似正象一个正规的微分表达（它隐含着物质无限可分

的可能性）一样地逼真，我们还是宁愿在这里给出一个包括了广阔范围的更一般的定义。*

我们将有限元过程定义为任一近似过程，在其中

1）整个系统的特性由有限数目（n个）的参数a_i来近似，其中 $i=1\sim n$

2）系统的各个子域将系统分割为可识别的物理实体（彼此间互不重叠或包容）。控制整个系统特性的n组方程

$$F_j(a_i)=0 \qquad j=1\sim n \tag{1—1}$$

可以用所有子域贡献的项的简单加法过程来集合，即有

$$F_j=\Sigma F_j^e \tag{1—2}$$

此处F_j^e指元素对所考察量的贡献。

这一广泛的定义使我们得以包括数学和物理两者的近似过程，如果“元素”是简单而可重复的话，它还使我们得以导出元素对系统方程组的贡献的计算规则，而这些规则一般是可用的。更且，所有这些过程精确地相似于我们在离散系统集内所用的过程。因此，处理离散系统方面的经验及其计算机程序可以直接地加以沿用。

近似的一个实际的重要之点此处已予特别地排除。这一点是与下述事实相关，即元素的贡献常常是高度区域化的，各个元素仅贡献很少的非零项。实际上这种区域化导使了一个稀疏的常常是带状的方程系，因而减少了对计算机存储量的需要。

然而，这一在实践中最理想的特点对定义有限元过程来说却并非是必需的。那末什么是进行有限元近似所依据的方法呢？我们已经提到过——但通过此处的进一步讨论而排除——直接的物理途径，今后将集中讨论这样一类问题，它们在数学上或是可被一组在域Ω内有效的微分方程组

$$D(\phi)=0 \tag{1—3}$$

以及在域的边界Γ上的联立边界方程

$$B(\phi)=0 \tag{1—4}$$

定义，或是被求某些标量泛函Π

$$\Pi=\int_\Omega G(\phi)\,d\Omega+\int_\Gamma g(\phi)\,d\Gamma \tag{1-5}$$

的定常值（极大、极小或鞍点）的变分原理定义。在上述两个表达式央ϕ代表单个或一族未知函数。

为了阐述清楚起见，考虑一多孔介质的渗流流动中出现的特殊问题，此处ϕ即水头（标量）。

对于二维域Ω，这一控制方程可写为：

$$D(\phi)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{1—6}$$

其边界条件为：

$$B(\phi)\equiv\phi-\bar{\phi} \qquad \Gamma_1\text{上}$$

$$B(\phi)\equiv k\frac{\partial\phi}{\partial n}-\bar{q} \quad \Gamma_2\text{上} \tag{1—7}$$

---

*在某些问题中，例如粒状介质的特性，由于一系列的确定的基本关系仍然没有恰当地表述，前一种途径仍然是最有希望的方法之一。

在上述方程中，k（渗透度）以及Q（输入流量）可以是位置的函数（在非线性问题中是ϕ值或其梯度的函数）。

（在上面的叙述中，所有的量均为标量，没有使用矢量专用的粗体符号。）

在ϕ仅满足前一边界条件时的另一种提法（对于线性问题）要求求泛函

$$\Pi=\int_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^{2}+\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^{2}-Q\phi\right\}d\Omega-\int_{\Gamma_2}q\phi d\Gamma \qquad (1-8)$$

的定常值（极小）。

一般说来，如果泛函Π存在，则总可找到一族联立（欧拉）微分方程，但其逆定理则不一定成立。

我们按下述步骤进行以求得方程1—3至1—5定义的一般问题的有限元近似式：

a）将未知函数展开为有限族已知的假设试验函数N_i以及未知的参数a_i，即

$$\hat{\phi}=\Sigma N_i a_i=Na \qquad (1-9)$$

b）近似式必须归结成n组Ω和Γ上积分定义的方程即

$$F_j=\int_{\Omega}E(\hat{\phi})d\Omega+\int_{\Gamma}e(\phi)d\Gamma \qquad (1-10)$$

$j=1-n$。

我们立即注意到前面给出的有限元过程的基本定义得到了应用，因为对于可积函数有

$$\int_{\Omega}(\ )\,d\Omega\equiv\Sigma\int_{\Omega^e}(\ )\,d\Omega \qquad (1-11)$$

以及

$$\int_{\Gamma}(\ )\,d\Gamma\equiv\Sigma\int_{\Gamma^e}(\ )\,d\Gamma \qquad (1-12)$$

由此，将问题归结成有限元型的首要和关键之点在于如何形成近似式的积分。

1.3 近似积分

1.3 1 变分原理

若问题是以定常泛函Π的形式来阵述，则其提法最为简明。我们可以写出泛函的近似形式

$$\Pi=\hat{\Pi}=\Pi(\hat{\phi}) \qquad (1-13)$$

且对其定常值有一组方程

$$F_j\equiv\frac{\alpha\Pi}{\alpha a_j}=0 \qquad (1-14)$$

根据Π的定义，这些方程已经被归结为积分形式。当有物理意义的变分原理存在而且其证明没有困难时，这种构成有限元近似的基本型式一直用得最为普遍。这一点导致了这样一类表述：有限元方法是一种变分过程。然而，把这一点作为定义是太狭窄了，因为还存在着其它

的、常常是更有力的方法，在变分原理并不存在或者不能被证明时。如何直接由微分方程出发这一重要课题仍然有待解决。而答案在于用加权函数或者引入伪变分原理来重新归结问题。

1.3 2　加权积分表达式

显然可用一个在所有方面均与其等价的积分表达式即

$$\int_{\Omega} W^{T} D(\phi) d\Omega + \int \overline{W}^{T} B(\phi) d\Gamma \qquad (1-15)$$

来替换控制方程组。其中W及$\overline{W}$是完全任意的加权函数。于是通过选择特殊的函数W_j及$\overline{W}_j$，近似式可立即成为积分形式，并可写为：

$$F_j = \int_{\Omega} W_j^T D(\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_j^T B(\hat{\phi}) d\Gamma \qquad (1-16)$$

若认为D(ϕ)以及B(ϕ)是剩余数，据此其近似式得不到所需的零值，则这一过程称为加权剩余法。伽辽金方法以及配置法等经典方法可立即识别。在伽辽金方法中加权函数和试验函数是恒等的（$W_j = N_i$）。这种方法在有限元分析中用得最广泛。在本文集的好多篇文章中我们将能看到它的应用。

两种导出积分表达式的方式及其近似方程组都能够而且一直在用于实践之中。然而变分原理具有一个独特的优点。如果函数是 a 的二次式，则近似方程组可写为：

$$ka + p = 0 \qquad (1-17)$$

其中，k恒为对称矩阵（$k_{ij}^T = k_{ji}$）。通过方程1.16，对于线性微分方程，加权过程也能导出相似的方程组，然而一般来说，它们并不是对称的。有限差分方法的使用者们自然对这种非对称性很熟悉，它经常导致计算上的困难。这种对称性实际上证明是变分原理的前提——只要它存在，就可发现伽辽金方法所引出的方程总是和变分原理所导出的方程相恒同。

由于变分提法的这一（以及某些其它的）优点，在建立微分方程所定义的问题的等价泛函以及伪变分泛函方面作了很多理论性工作（见叙述这些泛函的第三和第十二篇）。

1.3 3　伪变分原理、拉格朗日乘子或罚函数、伴随变量及最小二乘法

可以用不同的方法来建立伪变分原理。这包括有限度的变分原理以及籍助于使用伴随函数或者最小二乘法而从这些原理得出的个别情况。有限度的变分原理要求某些泛函Π是定常的，并依从于某种约束，例如象微分关系

$$G(\phi) = 0 \quad 域内 \qquad (1-18)$$

所给出的那种类型的约束。在这类问题中，可以通过两种途径来着手建立一种新的变分原理。首先，我们引入一组附加函数 λ 称为拉格朗日乘子并要求

$$\overline{\Pi} = \overline{\Pi}\left(\begin{Bmatrix}\phi\\ \lambda\end{Bmatrix} = \Pi + \int_{\Omega} \lambda^T G \, d\Omega\right) \qquad (1-19)$$

是定常的。这一泛函的变分引出

$$\delta\overline{\Pi} = \delta\Pi + \int_{\Omega} \delta\lambda^T G d\Omega + \int_{\Omega} \lambda^T \delta G d\Omega \qquad (1-20)$$

它只在下列条件下成立，即Π的驻点是定常的且约束（1—18）得到满足。

由于存在两个缺点使拉格朗日乘子的应用在实践中受到一些限制。首先，附加函数 λ 必须是离散化的，这样在最终的问题中需求大量的未知数。其次，如果Π是二次的，而G 是一线性方程，则总可发现，最终的离散化形式方程（1—17）具有相应于离散 λ 的参数的零对角项（这一点是很明显的，可由观察方程1—20得知）。

为了避开由于应用拉格朗日乘子所带来的困难，可以求基于罚函数而修改的泛函的定常值。因为，在求解时如果要求同时满足Π的定常值以及约束，我们可以近似地最小化

$$\bar{\Pi}=\Pi+\alpha\int_{\Omega}G^{T}G\,d\Omega \tag{1—21}$$

其中 α 为某大（正）数用以补偿不满足约束而引起的误差。没有一种方法不存在弱点。我们注意到这里也存在一种纯粹是数值上的困难：当 α 很大时，离散化方程组趋向于成为病态方程。然而，随着现代计算机和高度精密运算的出现，罚函数运算愈来愈普及，它的应用流传很广。在本文集第二篇中证明了这样一种方法能够有效地用于流体力学之中。

假如甚至连有限度的变分原里看来也不能被证明又怎么办？很清楚，只要令Π＝0并认为与整个微分方程组的约束得到满足相一致，上面给出的两种方法仍然是适用的。如是，我们可使

$$\bar{\Pi}=\bar{\Pi}\binom{\phi}{\lambda}=\int_{\Omega}\lambda^{T}G\,d\Omega \tag{1—22}$$

定常或者将

$$\bar{\Pi}=\int_{\Omega}G^{T}G\,d\Omega \tag{1—23}$$

极小化。前者相当于应用伴随函数，而后者则是最小二乘逼近方法的直接应用。

伪变分原理在实际上用途很小。它是根据方程1—22建立的，在方程中引入了一个新的伴随函数 λ。定义 ϕ 及入的近似式的参数所得到的离散方程系是完全分离的，并且由于零对角项的贯穿存在，在整个系统引起的对称性方面只有很小的效用。然而，如果对 ϕ 及 λ 应用类似的展开式的话，这种方法将给予伽辽金加权过程以另一种解释。另一方面最小二乘提法引出了良态方程系并且理应在有限元的文献上受到比现在要广泛得多的重视。

1.3 4 直接的积分表达式——虚功

很多物理问题有可能直接用积分形式来表达以避免写出整个控制微分方程组。特别是力学上的虚功原理，用这种方式陈述，比之于由微分方程所得出的会具有更大的普遍性。在这种情况下，方程1—15所给出的加权剩余形式是以一种可用分部积分法从这些方程中导出的形式出现。这种积分由于可积性而降低了加于函数W及N上的连续性要求（这一点下面还将会提到）。这种放宽要求数学上称之为问题的“弱提法”。在这里，顺便说说一种想法是饶有哲学兴味的，即也许这样一种弱提法，正是与那些微分方程相对立的大自然的需要，而这些方程在某些物理间断点上乃是毫无意义的。

在结构力学方面，由于虚功的更广泛的适用性（并且因为它们常常避免了复杂的代数演算）。虚功原理已经几乎代替了直接基于能量陈述的提法。在第二篇中，作者指明了这样一种陈述对于流体来说怎样构成一种简明的而且极其现实可行的方法。

表1.1　　有限元近似

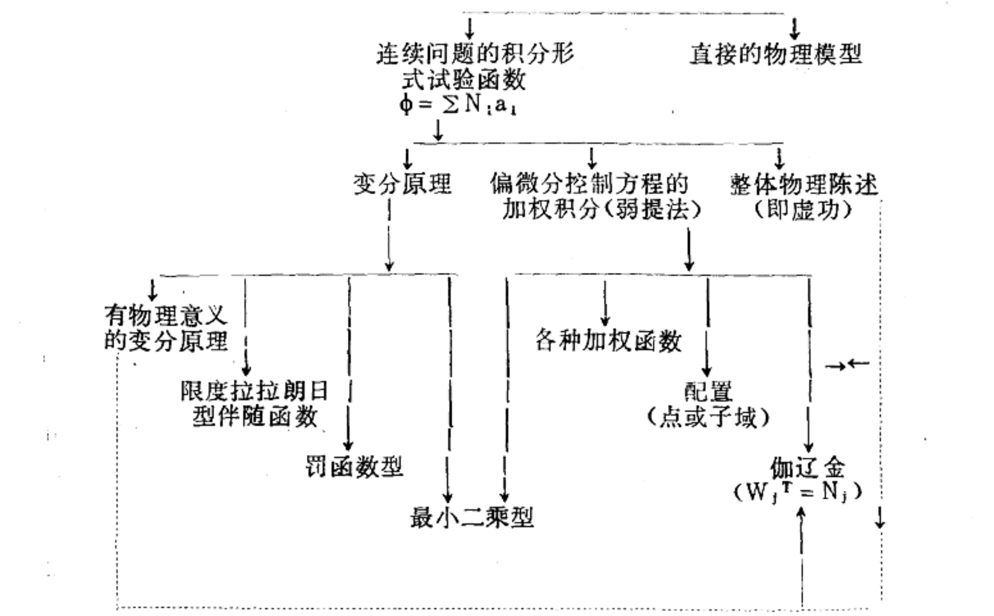

表1.1总结了作为有限元分析第一步的近似积分构成的基本过程。

1.4　　部分离散化

将问题仅仅部分地离散化常常是很方便的。部分离散化是以这样一种方式进行，例如，将具有三个独立变量的微分方程组不是直接简化为数字方程组而是简化为降秩的例如只有一个变量的微分方程组。这样原始的微分方程组有时可用精确方法或者另一种数值解法来更有效地求解。

假如子域的“形状”在一个独立方向上是简单的，则这种部分离散化特别有效。在三维问题中考虑棱或轴对称形状，或者其中一维是时间座标时就会出现这种情形。

将后者考虑为一个具体例子：

将未知函数

$$\phi=\phi(x,y,z,t) \tag{1—24}$$

离散化的试验函数表达式是通过修改式 1 — 9 为

$$\phi=\sum N_i a_i=Na \tag{1—25}$$

而得的。其中，

$$N_i=N_i(x,y,z) \tag{1—26}$$

仅为位置的函数，而 a 则为一组参数，此处是时间的函数：

$$a=a(t) \tag{1—27}$$

据此可以进行变分原理（方程 1 —13）的部分变分或者应用任一与其加权函数不包括时