全国各类成人高等学校招生考试教材

专科起点升本科

高等数学(二)

(全国统考科目)

本书编委会 编


全国各类成人高等学校招生

复习考试大纲

——专科起点升本科

哲学、文学、历史学、医学(仅限中医学类)

教育部高校学生司
教育部考试中心 制订

中央民族大学出版社

全国各类成人高等学校招生考试教材

(专科起点升本科)

高等数学(二)

本书编委会 编

中央民族大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 2 /《全国各类成人高校招生考试教材》编委会编. —北京：中央民族大学出版社，2000.10

全国各类成人高校招生考试教材. 专升本

ISBN 7-81056-468-4

Ⅰ.高… Ⅱ.全… Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-人学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 51602 号

书　　名	全国各类成人高等学校招生考试教材(高等数学二)
编　　著	本书编委会
责任编辑	孙　冲
出 版 者	中央民族大学出版社
印 刷 者	北京市朝阳区科普印刷厂
发 行 者	全国新华书店
开　　本	787×1092(毫米)　1/16
印　　张	13.50
字　　数	312 千字
版　　次	2000 年 10 月第 1 版　　2000 年 12 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 7-81056-468-4/G·69
总 定 价	182.00 元(全 7 册)
单册定价	26.00 元

出版说明

2000年国家教育部颁布修订了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》(简称《大纲》,修订后的《大纲》适用期限为2001—2002年)。

鉴于重新修订并颁布的新《大纲》在考试科目设置方案、内容、要求、试卷结构和标准样卷等方面都与旧大纲有大幅度的调整,考虑到考生在使用新《大纲》进行复习备考时,因缺少统一教材而面临诸多困难,我们及时组织具有丰富教学、命题经验的专家和学者编写了这套专科起点升本科教材。

本套教材共分7册,包括政治、英语、大学语文、教育理论、高等数学(一)、高等数学(二)、民法。

本套教材具有三大特点:

1. 新:本套教材完全遵照教育部2000年颁布修订的新《大纲》的基本精神和要求,突出了新大纲新的命题趋势。

2. 精:本套教材内容精炼,习题精典,重点突出,使考生易于学习掌握。

3. 全:本套教材注重实用性和针对性,内容全面,层次分明,又兼顾学科的系统性和知识的连贯性,考生学习起来,一气呵成。

本套教材适宜指导专科起点升本科考生系统复习文化知识,满足各类成人高等学校选拔新生的最基本要求,帮助专科起点升本科考生掌握知识,提高应试能力。**书后附有新《大纲》及标准样卷。**

本套教材由清华大学、北京师范大学、北京外国语大学、首都师范大学、北京理工大学等院校部分老师编写。《高等数学(二)》由乔雪峰编写。

由于编写时间仓促,难免有不当之处,望读者提出宝贵意见,以便再版时改正。

中央民族大学出版社

2000年10月

2001～2002年成人高考专升本考试科目调整说明

今年教育部对师范类专升本考试科目设置进行了重大改革，改革后专业类别由原来的十三个减为四个，分别为文史、艺术、理工类(一)、理工类(二)四大类。

无论是非师范类考生还是师范考生，均须参加四门课的考试：两门公共课、一门专业基础课、一门专业课。公共课和专业基础课由国家统一命题，专业课由省招办或招生学校自行组织命题。考试时间均为150分钟，各科总分均为150分，四门科总分为600分。考试一般安排在每年五月份第二个周末进行。

教育部考试中心和学生司组织专家对政治、英语、大学语文、高等数学(一)、高等数学(二)、教育理论、民法等7科《复习考试大纲》进行了修订和审定，艺术概论是新增加的考试科目，其《复习考试大纲》是新制定的。

专科起点升本科考生用书一览表

书目	适用招生专业范围 (按学科门类划分)	统考科目 师范类考生	 非师范类考生
第一册	哲学　文学　历史学 医学(仅限中医学类)	英语　教育理论 大学语文(艺术概论)*①	政治　英语 大学语文(艺术概论)*①
第二册	理学*②　工学　医学(除中医学类外)	英语　教育理论 高等数学(一)	政治　英语 高等数学(一)
第三册	经济学　教育学*③　农学　管理学	英语　教育理论 高等数学(二)	政治　英语 高等数学(二)
第四册	法学		政治　英语 民法

备注 *①第一册书中，报考艺术类专业的考生考艺术概论，不考大学语文。

*②报考生物科学(专业代码070401)、地理科学(专业代码070701)、环境科学(专业代码071401)及心理学(专业代码071501)的师范类考生，使用第三册书；非师范类考生，使用第二册书。

*③报考教育学门类中教育学专业(专业代码040101)的师范类考生，使用第一册书。

目　　录

第一章　函数、极限和连续

§1.1　函　数

【知识范围】

(1) 函数的概念

函数的定义　函数的表示法　分段函数.

(2) 函数的简单性质

单调性　奇偶性　有界性　周期性.

(3) 反函数

反函数的定义　反函数的图象.

(4) 函数的四则运算与复合运算

(5) 基本初等函数

【主要内容】

(一) 函数的概念

1. 函数的定义

定义：设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，其中 y 随着 x 的改变而变化，D 为一个给定的数集，若对于每个 $x \in D$ 的数值，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为

$$y = f(x).$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量或函数.

通常，为了区别不同的函数，还可以用 $g(x)$、$\varphi(x)$、$F(x)$ 等来表示函数.

定义域：使函数 f 有定义的自变量 x 的取值范围 D，称为函数的定义域，记为 $D(f)$.

值域：对应于自变量在定义域内的变化，函数 y 的取值范围称为值域，记为 $Z(f)$.

正确理解以下几点将有助于对函数定义的把握：

(1) 定义域和对应法则是确定两个变量是否构成函数关系的两个要素，缺一不可；如果两个函数的定义域和对应法则相同，则这两个函数是相同的.

(2) 函数 $y = f(x)$ 中，f 表示的是对应法则；而 $f(x)$ 则是指明函数的自变量为 x. 如 $y = f(x) = 6^x + 2$ 中，若已知自变量 x 的某一取值为 a，则函数 $y = f(a) = 6^a + 2$.

(3) 在函数的定义中，并没有要求当自变量变化时，函数值一定要变，而是要求对于 x 在定义域中的每一个值，函数 y 都有一个确定的值，即函数关系可以为“多对一”（多个自变量取值对应于同一函数值）. 如函数 $f(x) = a(a \in R)$，当自变量 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上取值时，函数 $f(x)$ 恒等于 a.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种:解析法、表格法和图示法.

(1) 解析法(公式法)

对自变量和常数进行四则运算、幂运算、指数运算、对数运算等数学运算所得到的式子称为解析表达式。用解析表达式表示一个函数,就称为函数的解析法.高等数学中讨论的函数,多用解析法表示,因为对解析表达式可以进行各种运算,便于研究函数的性质,如 $y=\log_a x$, $y=\arcsin x$ 等表达式都是解析法表示的.

(2) 表格法

在实际应用中,常把自变量所取的值与所对应函数值列成表,用以表示函数关系,这种表示法称为表格法。如我们经常使用的平方根表、立方根表、对数表、三角函数表等,都是用表格法表示的函数关系.

(3) 图象法

设 $y=f(x)$ 为一确定的函数,定义域已知为 $D(f)$. 可以在平面上建立一个直角坐标系 $x-o-y$,其中 x 轴表示自变量的变化范围;y 轴表示函数变化范围.此时,对应于定义域 $D(f)$ 中任一确定的 x_0 都有一个确定的函数值 $f(x_0)$,而 $(x_0,f(x_0))$ 又确定了直角平面坐标系中的一点 $P(x_0,y_0)$,通过 x 在 $D(f)$ 中的不同取值就可以得到平面上的一条曲线,这种表示法称为图象法.

3. 分段函数

有时我们会碰到这样的函数;对应于定义域中自变量 x 的不同取值,函数无法用一个统一的解析表达式表示,而要用两个或两个以上的公式来表示,这类函数称为分段函数.

例如:$y=|x|$ 就是一个常见的分段函数,它可以写为:

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}\quad(见图1-1);$$

又如

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}\quad(见图1-2).$$

也是一个分段函数,函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

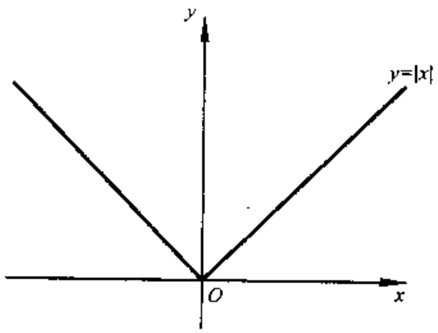

图 1-1

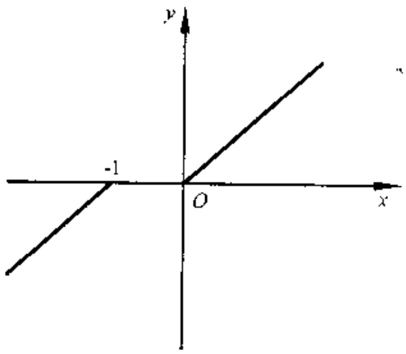

图 1-2

关于分段函数,要注意以下几点:

(1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数.

(2) 因为函数的解析式是分段表示的,所以各段的定义域必须明确标出.

(3) 对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围表达式中去求.

(4) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

（二）函数的简单性质

1. 单调性

定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内是单调增加的；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在(a,b)内是严格单调增加的.

如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内是单调减少的；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内是严格单调减少的.

由定义可知，在(a,b)内严格单调增加的函数 $f(x)$，其图形为沿 x 轴正向逐渐上升的（如图 1－3）；严格单调减少的函数 $f(x)$，其图形为沿 x 轴的正向逐渐下降的（如图 1－4）.

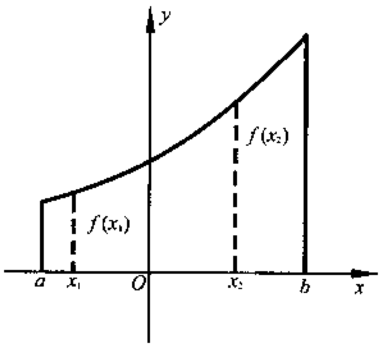

图 1－3

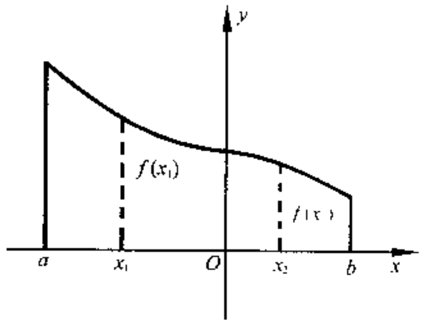

图 1－4

注意：单调性指的是在某一区间内的变化而不是针对某一点的.

2. 奇偶性

定义：设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任一点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任一点 x，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称（如图 1－5），因为 $f(-x)=f(x)$，若点 $P[x,f(x)]$ 为 $y=f(x)$ 曲线上任一点，则关于 y 轴对称点坐标为 $Q[-x,f(x)]$ 也在曲线上.

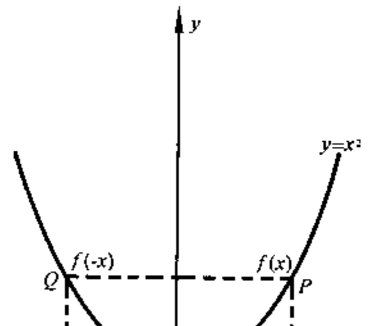

图 1－5

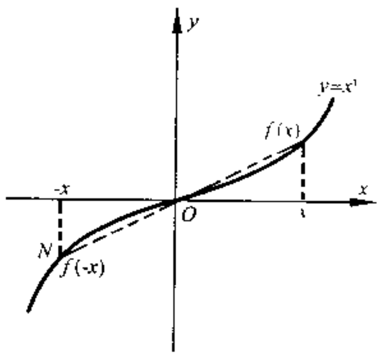

图 1－6

奇函数的图形是对称于原点的（如图 1 － 6），因为 $f(-x) = -f(x)$，若点 $M[x, f(x)]$ 为 $y = f(x)$ 曲线上任一点，则关于原点对称点坐标为 $N[-x, -f(x)]$，也在曲线上.

注意：

(1) 两个奇函数的乘积为偶函数；

奇函数与偶函数的乘积为奇函数；

两个偶函数的和为偶函数；

两个奇函数的和为奇函数.

(2) 很多函数是没有奇偶性的，切不可以认为任何函数都具有奇偶性. 如 $y = \cos x + \arctan x + x^3$ 就没有奇偶性.

(3) 讨论函数奇偶性的前提条件是：函数的定义域关于原点对称.

3. 有界性

定义：设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于 (a,b) 内的任意一点 x，总有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的；否则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

如图 1 － 7，函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内有界的几何意义是：曲线 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在 $y = -M$ 和 $y = M$ 两条水平直线之间的范围中.

例如函数 $y = \cos x$，因为对于任何实数 x，都有 $|\cos x| \leqslant 1$，故 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，它的图形落在 $y = -1$ 和 $y = 1$ 两条水平直线之间.

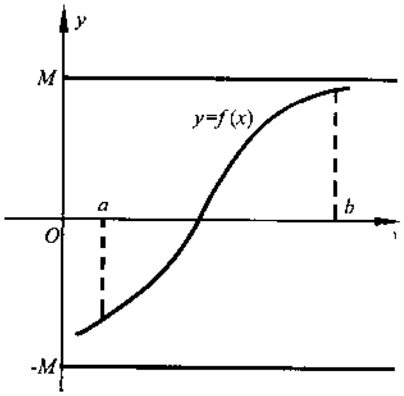

图 1 － 7

对于有界性，要注意以下几点：

(1) 对函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内有界，它的“界”不是唯一的. 原由在于定义函数有界性时正数 M 的不唯一性.

(2) 函数 $y = f(x)$ 有界性的讨论，与所讨论的区间有紧密联系. 如 $y = \dfrac{2}{x}$ 在区间 $(1,3)$ 中是有界的，而在区间 $(0,1)$ 内是无界的；函数 $y = ax^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，但在任何有限区间内都是有限的.

(3) 若函数 $f(x)$ 在其定义域内有界，则在其中的任一区间上必有界.

4. 周期性

定义：对于函数 $y = f(x)$，如果存在不为零的常数 T，使得关系式 $f(x + T) = f(x)$ 对于 $(-\infty, +\infty)$ 内任何 x 都成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，称满足这个等式的最小正数 T 为函数的周期.

例如 $y = \cos x$ 就是一个周期函数，周期 $T = 2\pi$.

(三) 反函数

1. 反函数的定义：

定义：设已知函数为

$$y = f(x), \tag{1}$$

如果由此解出

$$x = \varphi(y) \tag{2}$$

是一个函数，则称它为 $f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$，同时称 $f(x)$ 为直接函数.

习惯上，我们常以字母 x 表示自变量，字母 y 表示函数，故将 (2) 式中自变量 y 改写成 x，而将函数 x 改写成 y，于是 (1) 式的反函数就变为：

$$y = \varphi(x) \tag{3}$$

记为 $y = f^{-1}(x)$.

当然,我们可以说 $y = f(x)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 的反函数,即它们互为反函数.

注意:函数 $x = \varphi(y)$ 与 $y = \varphi(x)$ 表示的是同一函数,虽然表示自变量和函数的字母变了,但是表示函数运算关系的符号 φ 没有变,故二者的实际意义是相同的. 如圆面积与半径的函数关系写成

$$y = \pi x^2 \quad S = \pi r^2$$

是相同的;故当 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 反函数时,$y = \varphi(x)$ 也是 $y = f(x)$ 的反函数.

明确了反函数的定义后,还应了解在什么条件下函数存在反函数.

定理:如果函数

$$y = f(x) \qquad D(f) = X$$
$$Z(f) = Y$$

是严格单调增加(或减少)的,则它必存在反函数

$$x = \varphi(y) \qquad D(\varphi) = Y$$
$$Z(\varphi) = X$$

并且也是严格单调增加(或减少)的.

由图 1-8 我们不难理解上述定理的含义.

求反函数的步骤:

第一步:从直接函数 $y = f(x)$ 中解出 $x = \varphi(y)$,看它是否满足函数的定义.

第二步:如果 $x = \varphi(y)$ 是函数,将字母 x 换成 y,将字母 y 换成 x,得 $y = \varphi(x)$ 这就是 $y = f(x)$ 反函数的解析表达式.

2. 反函数的图象

直接函数 $y = f(x)$ 与其对应的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 图象之间有以下关系:

(1) 直接函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形,必定对称于直线 $y = x$(一般情况下,二者是不相同的函数,其图形是不相同的曲线);

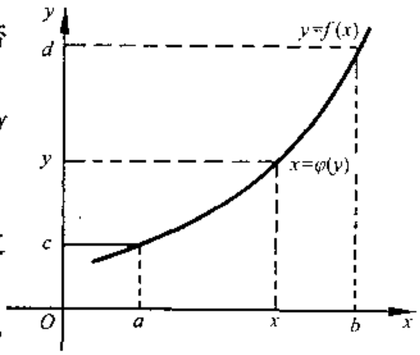

图 1-8

(2) 直接函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是同一条曲线(二者是不同的函数,但是它们的图形是同一条曲线).

根据以上结论,当我们知道了直接函数 $y = f(x)$ 的图形之后,就可利用对称于直线 $y = x$ 的性质作出其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形;若要作反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形,则就是直接函数 $y = f(x)$ 的图形. 如已知 $y = f(x) = 2x - 1$ 则可解出其反函数表达式为:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

二者的图形如图 1-9 所示:

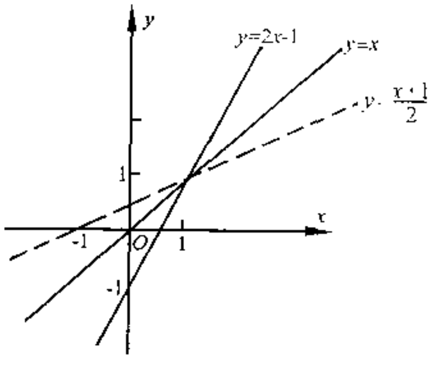

图 1-9

(四) 基本初等函数

基本初等函数是指:

1. 幂函数 $y = x^a$(a 为实数)

其定义域随 a 值的不同而不同,但不管 a 值取多少,它在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加且无界.

当 $a>0$ 时,它的图形如图 1－10,不管 a 取什么值,曲线都通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$,在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的.

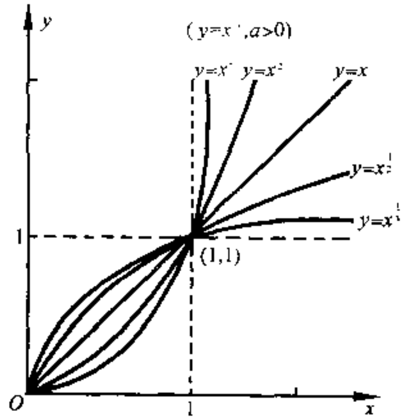

图 1－10

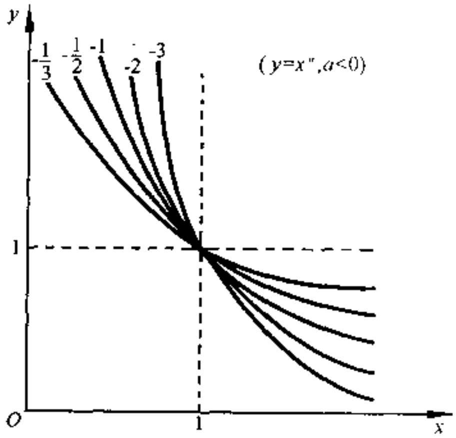

图 1－11

当 $a<0$ 时,它的图形如图 1－11,在 $(0,+\infty)$ 内严格单调减少且无界,恒通过点 $(1,1)$,曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线.

2. 指数函数

$$y=a^x \quad (a>0,a\neq 1)$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,由于不论 x 取何值,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$ 所以它的图形总是在 x 轴的上方,且通过点 $(0,1)$.

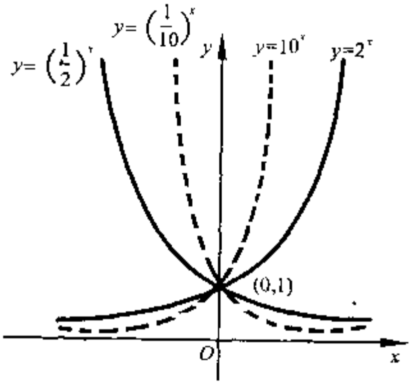

图 1－12

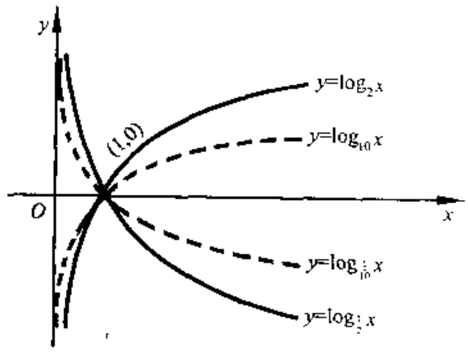

图 1－13

当 $a>1$ 时,函数严格单调增加且无界,曲线以 x 轴的负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数严格单调减少且无界,曲线以 x 轴的正半轴为渐近线,如图 1－12.

3. 对数函数

$$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$$

它的定义域为 $(0,+\infty)$,不论 a 为何值,对数曲线都通过点 $(1,0)$.

当 $a>1$ 时,函数严格单调增加且无界,曲线以 y 轴的负半轴为渐近线;

当 $0 < a < 1$ 时,函数严格单调减小且无界,曲线以 y 轴的正半轴为渐近线,如图 1 - 13.

以无理数 e 为底的对数函数 $y = \log_e x$,叫做自然对数函数,简记为 $y = \ln x$,是微积分中常用的一种初等函数.

4. 三角函数

三角函数有以下 6 个:

$y = \sin x \qquad y = \tan x \qquad y = \sec x$

$y = \cos x \qquad y = \cot x \qquad y = \csc x$

在微积分中,三角函数的自变量 x 一律以"弧度"作单位,例如 $x = 1$,就表示 x 等于 $1rad(57°17'44.8'')$.

函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,是奇函数,且周期等于 2π,其图形如图 1 - 14 所示:

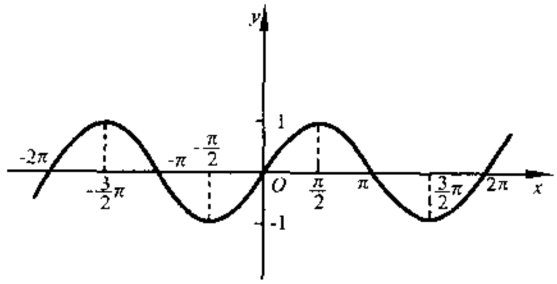

图 1 - 14

函数 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,是偶函数,且周期等于 2π,其图形如图 1 - 15 所示:

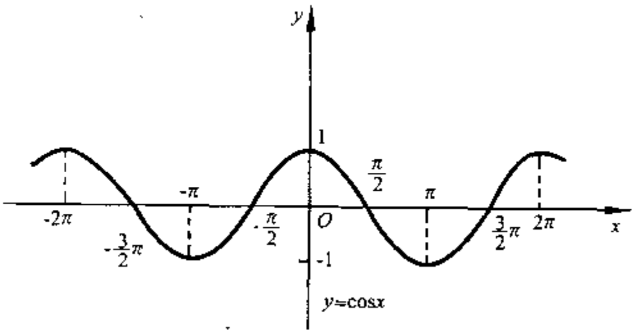

图 1 - 15

因为 $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$,所以它们都是有界函数.

函数 $y = \tan x$ 的定义域是除去点 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 后的其他实数 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 它是奇函数,且是周期为 π 的周期函数,其图形如图 1 - 16 所示.

函数 $y = \cot x$ 的定义域是除去点 $x = k\pi$ 后的其他实数 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 它也是奇函数,且是周期为 π 的周期函数,其图形如图 1 - 17 所示.

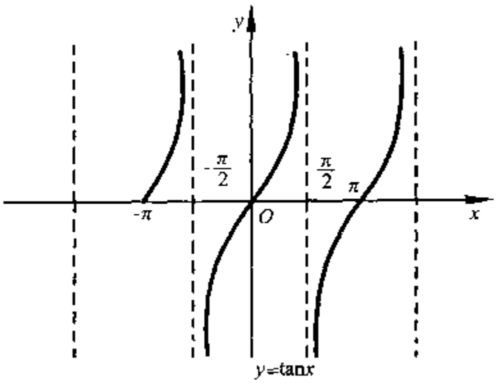

图 1－16

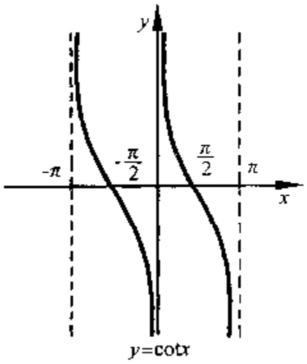

图 1－17

$y=\tan x, y=\cot x$ 都是无界函数.

5. 反三角函数

常用的反三角函数有以下 4 个：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$. 它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的. 由于 $y=\sin x, y=\cos x$ 在定义域内不单调，它们的反函数不唯一，所以对于 $y=\sin x$，只考虑 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，对于 $y=\cos x$，只考虑 $x\in[0,\pi]$，以使它们单调，并使其反函数存在. 此时我们称反正弦和反余弦取主值，即 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，它们的图形分别为图 1－18 和图 1－19 中的实线部分.

$y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的定义域都是 $[-1,1]$.

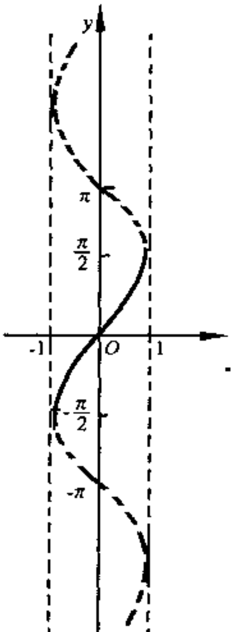

图 1－18

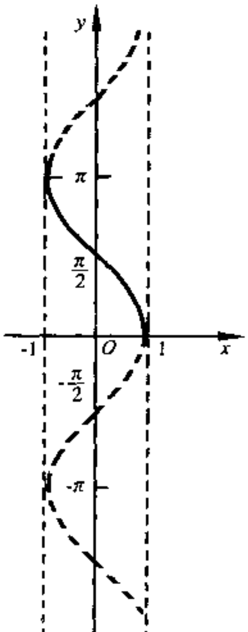

图 1－19

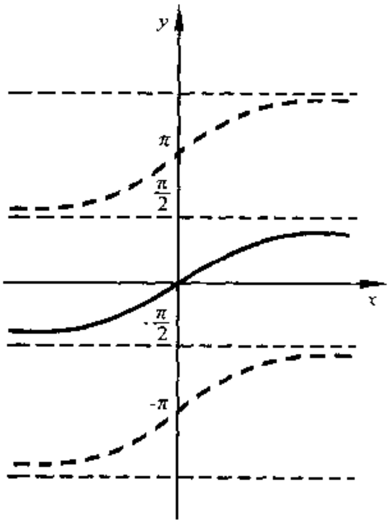

图 1－20

同理，对于反正切函数 $y=\arctan x$，也取主值 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，即 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$，它的定义域

为$(-\infty,+\infty)$，其图形如图 1 - 20 所示.

（六）初等函数

初等函数是指由基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）和复合所构成的函数. 初等函数是能用一个解析式表示的函数.

例如：$y=\cos(3x-5)$，

$y=\sin3(\lg x)$，

$y=\ln(5+\sqrt{x^2+1})$

都是初等函数. 分段函数通常都是非初等函数.

【例题解析】

例1 下列函数为同一个函数的是（　　）

(A) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$.

(B) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$.

(C) $f(x)=x$ 与 $g(x)=x(\cos^2x+\sin^2x)$.

(D) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$.

解 应选(C).

［分析］ 本题考查函数的概念，属于容易题. 在函数的定义中，有两个决定性的要素，这就是"对应法则"和定义域. 两个函数只有当它们的对应法则相同，且定义域也相同时才能把它们看成是同一个函数，以下依次对各选项的两个函数检查是否满足上述两个条件.

选项(A)中的函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，虽然对于 $x\in[0,+\infty)$，$f(x)=g(x)$，但由于它们的定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数.

选项(B)中的函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它们的定义域不同故不是同一个函数.

选项(C)中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，又由于 $\cos^2x+\sin^2x\equiv1$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x)=g(x)$. 所以它们是同一个函数.

选项(D)中的函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，它们定义域不同，故不是同一个函数.

例2 设 $f(x)$ 是奇函数，且 $F(x)=f(x)\cdot\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，其中 a 为不等于 1 的正常数，则 $F(x)$ 是（　　）

(A) 偶函数.　　(B) 奇函数.

(C) 非奇非偶函数.　　(D) 奇偶性与 a 有关的函数.

解 应选(A).

［分析］ 本题考查函数奇偶性的定义，难点是含有指数函数的式子的运算，属于较难题.

因为 $f(x)$ 是奇函数，故对于其定义域内任意 x 有 $f(-x)=-f(x)$. 为判断 $F(x)$ 的奇偶性，计算

$$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -f(x)\left[\frac{1}{\frac{1}{a^x}+1}-\frac{1}{2}\right] \\
&= -f(x)\left(\frac{a^x}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right) \\
&= -f(x)\left(1-\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right) \\
&= f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right) \\
&= F(x).
\end{aligned}
$$

由偶函数的定义知 $F(x)$ 为偶函数,应选择(A).

例3 填空题 设 $f(2x+1)=x^2-x-2$,则 $f(1)=$ ________.

解 应填 -2.

[分析] 这是函数概念和复合函数的概念题,掌握它们之间的联系和区别对于以后的学习会有很大帮助的.

解法1 用换元法求出 $f(x)$ 的表达式

令 $2x+1=t$,得 $x=\frac{t-1}{2}$,

则有 $f(t)=\frac{t^2}{4}-t-\frac{5}{4}$,

$\therefore\ f(x)=\frac{x^2}{4}-x-\frac{5}{4}$, 则 $f(1)=-2$.

解法2 由函数概念得:$2x+1=1$

$\therefore\quad x=0$

则 $\quad f(1)=-2$

例4 已知函数 $f(x)=e^{\sqrt{x-1}}$ 且 $f(\varphi(x))=x^2-2x-3$,求 $\varphi(x)$ 的表达式并求出其定义域.

[分析] 这是已知复合函数表达式,反求中间变量 $\varphi(x)$ 的习题,关键是写出 $f(\varphi(x))$ 的一般式.

解 因为 $f(\varphi(x))=e^{\sqrt{\varphi(x)-1}}=x^2-2x-3$,

$\therefore\quad \varphi(x)=1+\ln^2(x^2-2x-3)$.

由 $x^2-2x-3>0$ 解出:$x<-1$ 或 $x>3$,

$\therefore\quad \varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

例5 函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 在区间 $(0,1)$ 内是(   )

(A) 单调增加有界的. (B) 单调增加无界的.

(C) 单调减少有界的. (D) 单调减少无界的.

解 应选(D).

因为在区间 $(0,1)$ 内,函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的值随 x 的增大而减少,所以是单调减少的. 又因为当 $x>0$ 时,只要 x 的值充分地小,$y=\frac{1}{x^2}$ 的值可以变得充分地大. 也就是说,对于预先给定的任意大的正数

M，只要正数 x 满足关系式 $x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{M}}$，就有 $\dfrac{1}{x^2} \geqslant M$，所以 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的.

例 6　设 $f(x)$ 为奇函数且 $F(x) = f(x)\left(\dfrac{1}{2^2+1} - \dfrac{1}{2}\right)$，则函数 $F(x)$ 是(　　　)

(A) 偶函数.　　　　　　　　(B) 奇函数.

(C) 非奇非偶函数.　　　　　(D) 既是奇函数又是偶函数.

解　应选(B).

[分析]　一般情况下，判断函数的奇偶性应计算 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系来确定. 另外利用：两个奇(偶)函数之和为奇(偶)函数；两个奇(偶)函数之积(或分母不为 0 的商)为偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积(或分母不为 0 的商)为奇函数. 可以简化计算. 另外请考生注意：函数的奇偶性是一个很重要的性质，在后面的学习中要经常用到. 例如在定积分计算中，若 $f(x)$ 为奇函数则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$(其中 $a > 0$)，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$. 本题只需计算 $F(-x)$ 可知选(B).

例 7　函数 $y = \dfrac{3x}{x^2 - 5x + 6}$ 的定义域是________.

[分析]　由于函数 y 是分式函数，故当分母为 0 时，y 无意义，故只需解不等式 $x^2 - 5x + 6 \neq 0$.

解法 1　当分母 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 时，y 无意义，求解方程：$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$，得解为 $x = 2, x = 3$，即在数轴上 $(-\infty, +\infty)$ 将 $x = 2, x = 3$ 两点去掉就是函数的定义域. 故应填入答案 $(-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3, +\infty)$.

解法 2　当分母 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 时，y 无意义，解不等式 $x^2 - 5x + 6 \neq 0$　得 $(-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3, +\infty)$，即函数 y 的定义域是 $(-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3, +\infty)$.

例 8　函数 $y = \log_{x-1}(16 - x^2)$ 的定义域是(　　　)

(A) $(1,2)$.　　　(B) $(2,4)$.　　　(C) $(1,2) \cup (2,4)$.　　　(D) $(1,4)$.

[分析]　求复杂函数的定义域，就是求简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

解　由于对函数 $y = \log_a x$ 要求常数 $a > 0$，且 $a \neq 1$，故有 $x - 1 > 1$，且 $x - 1 \neq 1$. 另一方面要使函数有意义，必须 $16 - x^2 > 0$；于是得不等式组

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases}$$

解之得：$1 < x < 2$ 及 $2 < x < 4$，即 $(1,2) \cup (2,4)$，从而选(C).

例 9　函数 $y = \sin 3x$ 的周期为(　　　)

(A) $\dfrac{\pi}{2}$.　　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$.　　　(C) $\dfrac{2}{3}\pi$.　　　(D) $\dfrac{\pi}{3}$.

解　因为函数 $y = \sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3\left(x + \dfrac{2}{3}\pi\right)$

即：$f\left(x + \dfrac{2}{3}\pi\right) = f(x)$

由周期定义可知，函数 $y = \sin 3x$ 周期为 $T = \dfrac{2}{3}\pi$. 选择答案(C).

例 10　求函数 $y = 2x^2 + 3$ 的单调增减区间.