

样条子域法

秦 荣

(广西大学)

子域法过去用于流体力学问题为多, 因此常用下列公式:

$$\int_{V_i} R_i dV_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

式中 R_i 是残数方程。对于梁板及弹性力学平面问题, 这需要五次 B 样条函数, 我们在文 [8] 中介绍过这个方法, 并把它加以推广。本文所讲的样条子域法不是从上式出发, 而是从最小势能原理出发, 这对求解固体力学问题比较好些。不仅计算简便, 而且精确度也高。

本文主要介绍样条子域法的基本原理及方法。

(一) 梁的挠度函数

如果将梁 ($0 \leq x \leq a$) 作均匀分划, 取 N 等分, 则梁上任一点的挠度 w 可用下列三次样条函数表示:

$$w = \sum_{i=1}^{N+1} \gamma_i \phi_i(x) \quad (1.1)$$

式 (1.1) 对应于下列分划:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = a,$$

$$(x_{i+1} - x_i) = h = a/N$$

把式 (1.1) 写成矩阵形式:

$$w = [\phi] \{ \gamma \} \quad (1.2)$$

式中 γ_i —— 样条结点参数。

$\phi_i = \phi_i(x)$ 是一组与三次 B 样条有关的基函数, 即

$$\phi(x) = \varphi_3\left(\frac{x}{h} - i\right) \quad (1.3)$$

$$[\phi] = [\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N+1}]$$

$$\{r\} = [r_{-1}, r_0, r_1, \dots, r_{N+1}]^T$$

设 y_i 是梁在 i 点的挠度值, y'_0 是梁左端的转角, y'_N 是梁右端的转角, 由式 (1.1) 可得:

$$\{y\} = [Q] \{r\} \quad (1.4)$$

式中 $\{y\} = [y'_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y'_N, y_N]^T$

$$[Q] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \\ & & & & & \frac{3}{h} & 0 & -\frac{3}{h} \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

(N+3)(N+3)

由式 (1.4) 可得:

$$\{r\} = [Q]^{-1} \{y\} \quad (1.6)$$

把式 (1.6) 代入式 (1.2) 便得:

$$w = [\phi][R]\{y\} \quad (1.7)$$

式 (1.7) 就是梁的挠度函数。式中 $[R] = [Q]^{-1}$ 。式 (1.7)

处理边界条件很方便。例如，如果 $x=0$ 端固定，则 $y_0 = y'_0 = 0$ 。

(二) 样条子域法

图 2.1 是一个阶形弹性地基梁，我们以此来说明样条子域法的原理及方法。

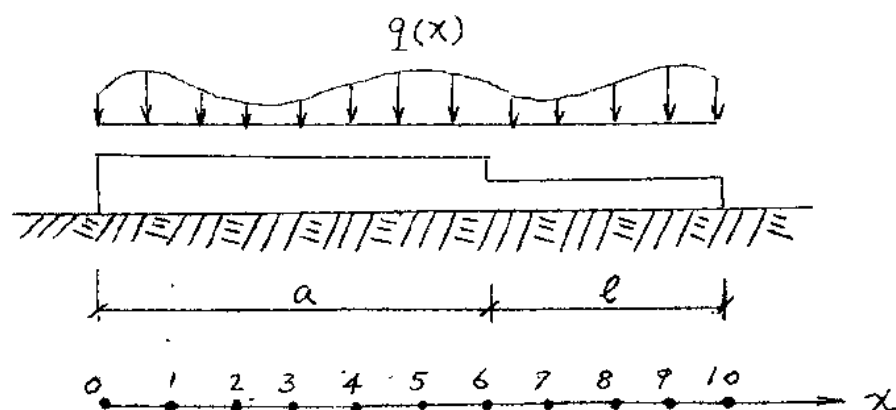


图 2.1

我们把梁分为几个子域，先作子域分析，然后对梁作整体分析。

(1) 子域分析

设某个子域的挠度函数为

$$w = [\Phi][R]\{y\} \quad (2.1)$$

由此可知，只要想办法求出 $\{y\}$ ，则子域的挠度就确定了。 $\{y\}$ 可以利用最小势能原理求出来。由最小势能原理可知：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{y\}} = \{0\} \quad (2.2)$$

$$\text{式中 } \Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \varepsilon^T D \varepsilon dx + \frac{1}{2} \int_0^a w^T k_0 w dx - \int_0^a w^T q dx \quad (2.3)$$

k —— 温克尔地基系数, $D = EI$,

$$\varepsilon = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -[\phi][R]\{y\} \quad (2.4)$$

把式(2.1)及(2.4)代入式(2.3)使得:

$$\Pi = \frac{1}{2}\{y\}^T [G] \{y\} - \{y\}^T \{f\} \quad (2.5)$$

把式(2.5)代入式(2.3)使得:

$$[G]_e \{y\}_e = \{f\}_e \quad (2.6)$$

$$\text{式中 } \{f\} = \int_0^a [R]^T [\phi]^T q dx \quad (2.7)$$

$$[G]_e = D[R]^T A_x [R] + k_0 [R]^T F_x [R] \quad (2.8)$$

$$A_x = \int_0^a [\phi_i'' \phi_k''] dx, \quad F_x = \int_0^a [\phi_i \phi_k] dx \quad (2.9)$$

足标 $i, k = -1, 0, 1, 2, \dots, N+1$. $e = 1, 2, \dots, n$

式(2.8)中的 $[R]$, A_x 及 F_x 都是 $(N+3)(N+3)$ 阶的带状矩阵。 $[R]$ 的带宽为 3, A_x 及 F_x 的半带宽为 4。因此 $[G]_e$ 也是一个带状矩阵, 半带宽也为 4。加上边界条件, $[G]_e$ 是一个正定的对称矩阵。 A_x , F_x 及 $[R]$ 的具体形式已经算出, 引载在附录。 $[G]_e$ 对固体力学来说可以称为子域刚度。

(2) 梁的整体分析

图 2.1 所示的梁两段不同, 分为两段进行分析。每段叫做一个子域, 因此, 这条梁可分为两个子域。第一个子域有

$$[G]_{9 \times 9} \{y\}_{9 \times 1} = \{f\}_{9 \times 1} \quad (2.10)_a$$

第二个子域有

$$[G]_{7 \times 7} \{y\}_{7 \times 1} = \{f\}_{7 \times 1} \quad (2.10)_b$$

式中 $\{y\}_{9 \times 1} = [y'_0, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y'_6, y_6]^T$

$\{y\}_{7 \times 1} = [y'_6, y_6, y_7, y_8, y_9, y'_{10}, y_{10}]^T$

利用装配的办法很容易建立梁的刚度方程：

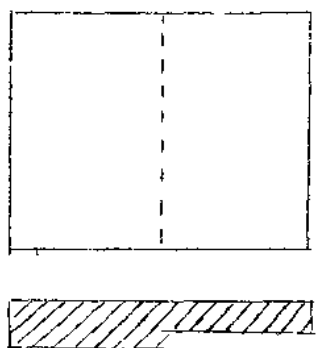
$$\begin{bmatrix} [G]_{9 \times 9} & & \\ & \ddots & \\ & & [G]_{7 \times 7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y'_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ y'_6 \\ y_6 \\ \vdots \\ y_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{9 \times 1} \\ \vdots \\ f_{7 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

即 $[G] \{y\} = \{f\} \quad (2.12)$

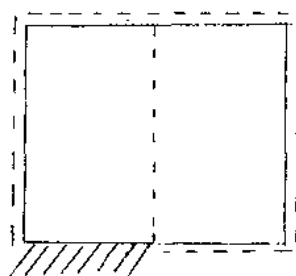
$[G]$ 是梁的总刚度矩阵，也是一个带状矩阵，半带宽为4。利用式(2.12)求出 $\{y\}$ 后，就可以确定梁的挠度和内力。这个方法我们称为样条子域法。

(三) 薄板弯曲问题

对于图3.1所示的板，利用样条子域法计算是很方便的。图3.1a变厚度板，图3.1b板的边界条件在同一边有变化。



(a)



(b)

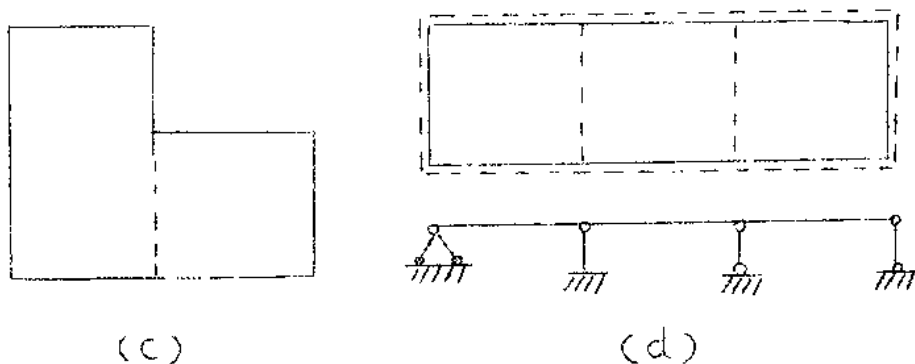


图 3.1

(1) 子域分析

设有块正交异性的弹性矩阵薄板，等厚度，受横向荷载 $q = q(x, y)$ ，坐标轴 x, y 布置在板的中性平面内，原点任板的顶角上，即 $0 \leq x \leq a$ ， $0 \leq y \leq b$ 。 a —— 板块 x 方向的宽度， b —— 板块 y 方向的宽度。

设板的挠度函数为

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{i=-1}^{N+1} r_{im} \phi_i(x) Y_m(y) \quad (3.1)$$

式中 r_{im} —— 样条结点参数，

$\phi_i(x)$ 是一组三次 B 样条函数， $Y_m(y)$ 是正交函数，例如梁的振型函数，三角函数^{[8], [9]}。把式 (3.1) 写成矩阵形式

$$w = [Y] \otimes [\phi] \{r\} \quad (3.2)$$

式中 $[Y] = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M]$

$$\{r\} = [\{r\}_0^T, \{r\}_1^T, \{r\}_2^T, \dots, \{r\}_{N+1}^T]^T$$

$$\{r\}_m = [r_{-1}, r_0, r_1, \dots, r_{N+1}]_m^T$$

$[Y] \otimes [\phi]$ 表示矩阵 $[Y]$ 与 $[\phi]$ 的 Kronecker 乘积，
即 $[N] = [Y] \otimes [\phi] = [Y_m [\phi]]$ (3.3)

它有下列性质：

$$([Y] \otimes [\phi])^T = [Y]^T \otimes [\phi]^T \quad (3.4)$$

$$([Y] \otimes [\phi])^T ([Y] \otimes [\phi]) = [Y]^T [Y] \otimes [\phi]^T [\phi] \quad (3.5)$$

设第 m 项时，板在 i 点的挠度为 w_{im} ，转角为 w'_{im} 。由式 (3.1) 及 (3.2) 可得：

$$w = [Y] \otimes [\phi] [R]_x \{w\} \quad (3.6)$$

式中 $[R]_x = [Q]_x^{-1}$ (3.7)

$$\{w\} = [\{w\}_1^T \quad \{w\}_2^T \quad \dots \quad \{w\}_m^T]^T$$

$$\{w\}_m = [w'_0 \quad w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_N \quad w'_N]^T_m$$

这时板块的总势能泛函为

$$\Pi = \frac{1}{2} \{w\}^T [G] \{w\} - \{w\}^T \{f\} \quad (3.8)$$

式中 $\{f\} = \int_0^a \int_0^b ([Y] \otimes [\phi] [R])^T q dx dy$ (3.9)

$$[G] = [G_{mn}] \quad (3.10)$$

$$G_{mn} = [R]^T (D_x F_y A_x + D_1 (B_x B_y^T + B_x^T B_y) + D_y F_x A_y + 4 D_y (C_x C_y)) [R] \quad (3.11)$$

式中 $A_x = \int_0^a [\phi_i'' \phi_k''] dx$, $C_x = \int_0^a [\phi_i' \phi_k'] dx$, $B_x = \int_0^a [\phi_i \phi_k''] dx$, $F_x = \int_0^a [\phi_i \phi_k] dx$ (3.12)

足标 $i, k = -1, 0, 1, \dots, N+1$.

$$\left. \begin{aligned} A_y &= \int_0^b Y_m'' Y_n'' dy, & C_y &= \int_0^b Y_m' Y_n' dy \\ B_y &= \int_0^b Y_m Y_n'' dy, & F_y &= \int_0^b Y_m Y_n dy \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

足标 $m, n = 1, 2, 3, \dots, m$ 。式 (3.12) 4 个所示矩阵都是带状矩阵, 而且半带宽为 4, 具体形式已经算出, 见附录。而式 (3.13) 不是矩阵, 已有表可查。由 Y_m 是梁的根型函数, 它正交函数, 则有

$$\left. \begin{aligned} \int_0^b Y_m Y_n dy &= 0 \\ \int_0^b Y_m'' Y_n'' dy &= 0 \end{aligned} \right\} \text{当 } m \neq n \text{ 时} \quad (3.14)$$

利用最小势能原理可得

$$[G] \{w\} = \{f\} \quad (3.15)$$

式 (3.15) 就是子域的基本方程。对于固体力学, 它就是子域的刚度方程。我们在文 [7], [8] 及 [9] 中曾证明过, 由于 Y_m 是梁的振型函数, 可以把式 (3.15) 变为下列形式:

$$G_m \{w\}_m = \{f\}_m, \quad m = 1, 2, \dots, m, \quad (3.16)$$

$$\text{式中 } \{f\}_m = \int_0^a (Y_m[\phi][R])^T dx dy \quad (3.17)$$

$$G_m = [R]^T (D_x F_y + D_1 V_x V_y + D_y F_x A_y + 4 D_{xy} C_x C_y) [R] \quad (3.18)$$

$$V_x = B_x + B_x^T, \quad V_y = \int_0^b Y_m Y_m'' dy \quad (3.19)$$

对于任意支承条件的矩形薄板，可以按级数的每一项分别进行计算，允许不存在偶联问题，使计算大为简化。

G_m 是一个带状矩阵，半带宽等于 4，加上边界条件是一个正确对移的矩阵。

D_x, D_y, D_{xy} 是薄板的弹性常数。

(2) 整体分析

建立子域的基本方程后，利用装配的办法仿照式 (2.11) 很容易建立板的总刚度方程。

如何确定子域问题？例如，图 3.1a 可分为两个子域，图 3.1b 及 c 也可分为两个子域，图 3.1d 可以分为三个子域。一个矩形板，如果边界条件在同一边都是相同的，而且板的厚度和材料都相同，则这个板当做一个子域。当然也可以分为几个子域来计算。

例 3.1，利用本文的方法求四边固定板的最大挠度和内力。把板分为几个子域进行计算的结果与把板当做一个子域来计算的结果是一致的，相差很微小。对于这样的板，当作一个子域计算比较方便，但为了检查本文提出的子域法正确性，特把它分为两个子域计算，每个子域都相同，而且在 X 方向取 5 等分。表 3.1 是把整个板当做两个子域进行计算的结果。

表 3-1

四边固定的方板

$\mu = 0.3$

	均布荷载 q				
	w_{max}	$M_{x_{max}}$	$M_{y_{max}}$	M_{x4}	M_{y3}
$m=1$	0.00132162	0.024928	0.026842	-0.039546	-0.052461
$m=3$	-0.00006441	-0.002345	-0.005784	-0.009735	0.001234
$m=5$	0.00001124	0.0000419	0.001983	-0.002040	0.000067
Σ	0.00126845	0.023002	0.023041	-0.051421	-0.051294
精确解	0.00126532	0.0229051	-0.051334	-0.051334	-0.051334
因子	qa^4/D	qa^2			

表中 M_{xA} 是 x 方向两边中点的弯矩 M_x 值, M_{yB} 是 y 方向两边中点的弯矩 M_y 值。

(四) 弹性力学平面问题

图 4.1 是一个墙梁的计算简图, 它是弹性力学平面应力的一个例子。在小变形的情况下, 这个梁任一点的位移可用下列函数表示:

$$u = [Y] \otimes [\phi] [R] \{U\}$$

$$v = [Z] \otimes [\phi] [R] \{U\}$$

(4.1)

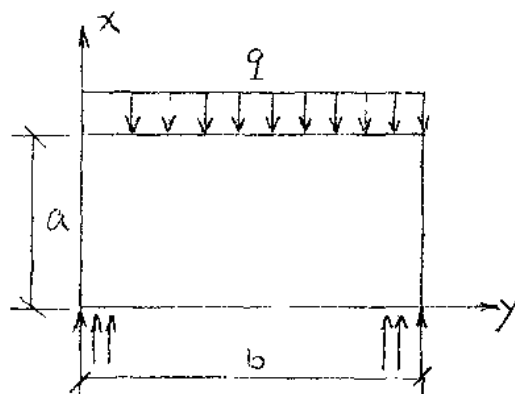


图 4.1

式中 u —— 墙梁上任一点 x 方向的位移,

$$\{u\} = [\{u\}_1^T \cdots \{u\}_m^T]^T$$

v —— 墙梁上任一点 y 方向的位移,

$$\{v\} = [\{v\}_1^T \cdots \{v\}_m^T]^T$$

$$\{u\}_m = [u'_0, u_0, u_1, \cdots, u'_N, u_N]^T_m$$

$$\{v\}_m = [v'_0, v_0, v_1, \cdots, v'_N, v_N]^T_m$$

$$[Y] = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_m]$$

$$[Z] = [Z_1, Z_2, \cdots, Z_m]$$

Y_m 及 Z_m 都是一些使位移满足 $y=0$ 及 $y=b$ 边界条件的正交函数。例如, 当 $y=0$ 及 $y=b$ 的边界条件 $u=v=0$ 时, 则

$$Y_m = \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad Z_m = \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad (4.2)$$

当 $y=0$ 及 $y=b$ 的边界条件 $u=0, v \neq 0$ 时, 则

$$Y_m = \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad Z_m = \cos \frac{m\pi}{b} y, \quad (4.3)$$

利用最小势能原理可得

$$[G]\{\delta\} = \{f\} \quad (4.4)$$

式中 $\{\delta\} = [\{\delta\}_1^T, \{\delta\}_2^T, \cdots, \{\delta\}_m^T]^T$

$$\{\delta\}_m = [\{u\}_m^T, \{v\}_m^T]^T$$

$$\{f\} = \int_0^a \int_0^b [N]^T q dx dy \quad (4.5)$$

$$[N] = [N]_1 \quad [N]_2 \quad \dots \quad [N]_m$$

$$[N]_m = \begin{bmatrix} [\phi][R]Y_m & 0 \\ 0 & [\phi][R]Z_m \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$[G] = [G_{mn}] \quad (4.7)$$

$$G_{mn} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$S_{11} = [R]^T (K_x C_x F_y + K_{xy} F_x C_y) [R] \quad (4.9)$$

$$S_{12} = [R]^T (K_1 H_x^T H_y + K_{xy} H_x \bar{H}_y^T) [R]$$

$$S_{21} = [R]^T (K_1 H_x H_y^T + K_{xy} H_x^T H_y) [R]$$

$$S_{22} = [R]^T (K_y F_x \bar{C}_y + K_{xy} C_x \bar{F}_y) [R]$$

式中 C_x 、 F_x 与式 (3.12) 的形式相同，而 H_x 为

$$H_x = \int_0^a [\phi_i \phi'_k] dx \quad (4.10)$$

它们都是带状矩阵，而且半带宽为 4。

C_y 、 F_y 与式 (3.13) 的形式相同，而其余的为

$$\left. \begin{aligned} H_y &= \int_0^b Y_m Z'_n dy, & H_y^T &= \int_0^b Z'_m Z_n dy \\ \bar{C}_y &= \int_0^b Z'_m Z'_n dy, & \bar{F}_y &= \int_0^b Z_m Z_n dy \\ \bar{H}_y &= \int_0^b Z_m Y'_n dy, & \bar{H}_y^T &= \int_0^b Y'_m Z_m dy \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

K_x 、 K_1 、 K_y 及 K_{xy} 都是弹性力学平面问题的弹性常数。

式(4.4)就是弹性力学平面问题子域的刚度方程。由于 Y_m 及 Z_m 具有正交性, 可以把式(4.4)变为

$$G_m \{\delta\}_m = \{f\}_m, \quad m = 1, 2, \dots, m \quad (4.12)$$

式中 $G = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (4.13)$

$$\{f\}_m = \int_0^a \int_0^b [N]_m^T q dx dy \quad (4.14)$$

式中 S_{11} 、 S_{12} 、 S_{21} 及 S_{22} 仍用式(4.9)确定, 但这时 $m = n$ 。

由式(4.12)可得:

$$S_m \{u\}_m = F_m \quad (4.15)$$

$$S_{22} \{v\}_m = \{f_1\}_m - S_{21} \{u\}_m \quad (4.16)$$

式中 $S_m = S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} \quad (4.17)$

$$F_m = \{f_1\}_m - S_{12} S_{22}^{-1} \{f_2\}_m \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f_1\}_m &= \int_0^a \int_0^b ([\Phi][R]Y_m)^T q dx dy \\ \{f_2\}_m &= \int_0^a \int_0^b ([\Phi][R]Z_m)^T q dx dy \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

有了上述子域刚度方程后, 就可以利用子域法作弹性力学平面问题的整体分析了。具体作法与梁板类同, 可以仿照进行。

注意, 上述公式是按平面应力问题推导出来的。对于平面应变问题, 按弹性力学的一般处理就行了。

(五) 结 语

(1) 本文以梁板及弹性力学平面问题介绍了样条子域法的原理及方法, 可以推广到薄壳, 剪力墙, 混合结构, ... 中去。

(2) 本法不仅可以作静力分析, 而且可以作稳定分析和动力分析。

(3) 这个方法不仅计算简便, 精确度也高。

(六) 附 录

(一) A_x, B_x, C_x, F_x 及 H_x 的具体形式

$$A_x = \frac{1}{h_x^3} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & & 0 \\ & \frac{4}{3} & -1 & 0 & \frac{1}{6} & \\ & & \frac{7}{3} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ \text{对} & & & \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ \text{称} & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad (6-1)a$$

$$B_x = \frac{1}{h_x} \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & -\frac{7}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & & 0 \\ & -\frac{5}{3} & -\frac{29}{60} & \frac{1}{5} & \frac{1}{120} & \\ & & -\frac{13}{15} & \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{1}{120} \\ \text{对} & & & -\frac{2}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{1}{120} \\ \text{称} & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad (6-1)b$$

$$C_x = \frac{1}{h_x} \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{7}{120} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{120} & & 0 \\ & \frac{1}{3} & -\frac{11}{60} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{120} & \\ & & \frac{37}{60} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{120} \\ \text{对} & & & \frac{2}{3} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{120} \\ \text{称} & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad (6-1)c$$

$$F_x = h_x \begin{bmatrix} \frac{1}{252} & \frac{43}{1680} & \frac{1}{84} & \frac{1}{5040} & & 0 \\ & \frac{151}{630} & \frac{23}{420} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} & \\ & & \frac{181}{560} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} \\ \text{对} & & & \frac{151}{315} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} \\ \text{称} & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad (6-1)d$$

$$H_x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{72} & \frac{71}{720} & \frac{29}{360} & \frac{1}{720} & & 0 \\ & 0 & \frac{73}{144} & \frac{7}{90} & \frac{1}{120} & \\ & & 0 & \frac{49}{144} & \frac{7}{90} & \frac{1}{720} \\ \text{反} & & & 0 & \frac{49}{144} & \frac{7}{90} & \frac{1}{720} \\ \text{对} & & & & & & \\ \text{称} & & & & & & \end{bmatrix} \quad (6-1)e$$

式(6-1)所示各矩阵中,末三行三列与前三行三列是对称的,没有写出来,矩阵的虚线表示从起行到倒数第四行止各行形式相同。它们都是 $(N+3)(N+3)$ 阶矩阵。

(2) 双样条函数方法

以薄板为例。设板的挠度为

$$w = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} r_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y) \quad (6-2)$$

$$\text{即} \quad w = [\psi] \otimes [\phi] \{r\} \quad (6-3)$$

由上述可得:

$$\{w\} = [Q]_y \otimes [Q]_x \{r\} \quad (6-4)$$

$$\{w\} = [\{w\}_{-1}^T \quad \{w\}_0^T \quad \{w\}_1^T \cdots \{w\}_{M+1}^T]^T$$

$$\{w\}_j = [w_{-1,j} \quad w_{0,j} \quad w_{1,j} \cdots w_{N+1,j}]^T$$

式中 w_{ij} 当 $i=0, 1, \dots, N$ 及 $j=0, 1, \dots, M$ 时代表板结点 (x_i, y_j) 的挠度; $w_{r,j}$ 当 $r=-1, r=N+1$ 及 $j=0, 1, \dots, M$ 时代表

$$w_{r,j} = \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial x}, \quad (i=0, N)$$

$w_{i,s}$ 当 $s=-1$, 或 $s=M+1$ 及 $i=0, 1, \dots, N$ 时代表

$$w_{i,s} = \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial y}, \quad (j=0, M),$$

$w_{r,s}$ 当 $r=-1, N+1$ 或 $s=-1, M+1$ 时代表

$$w_{r,s} = \frac{\partial^2 w(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}, \quad (i=0, N, j=0, M),$$

$$\text{由上述可得} \quad \{r\} = [R]_y \otimes [R]_x \{w\} \quad (6.5)$$

把式 (6.5) 代入 (6.3) 便得:

$$w = [\psi][R]_y \otimes [\phi][R]_x \{w\} \quad (6.6)$$

利用最小势能原理可得:

$$[G]\{w\} = \{f\} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad [G] = & D_x [F]_y \otimes [A]_x + D_1 ([B]_y^T \otimes [B]_x + [B]_y \otimes [B]_x^T) \\ & + D_y [A]_y \otimes [F]_x + D_{xy} [C]_y \otimes [C]_x \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\{f\} = \int_0^a \int_0^b ([\psi][R]_y \otimes [\phi][R]_x)^T q dx dy \quad (6.9)$$

$$\left. \begin{aligned} [A]_x &= [R]_x^T A_x [R]_x & [C]_x &= [R]_x^T C_x [R]_x \\ [B]_x &= [R]_x^T B_x [R]_x & [F]_x &= [R]_x^T F_x [R]_x \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

$[A]_y, [B]_y, [C]_y$ 及 $[F]_y$ 的形式与式 (6.10) 相同, 只把 x 换 y 就行了。 A_y, B_y 及 C_y 及 A_x, B_x, C_x 及 F_x 相同, 只把 R_x 换成 R_y , N 换成 M 就行了。

利用式 (6.7) 可求出板的结点挠度。如果把板分为几个子域, 式 (6.7) 就是子域的基本方程。

参 考 文 献

- (1) 钱伟长 变分法及有限元 科学出版社 1980年
- (2) 胡海昌 弹性力学的变分原理及其应用, 科技出版社 1981年
- (3) 徐次达 力学与实践 4 (1980) 12—20
- (4) 李岳生 齐东旭 样条函数方法 科学出版社 1979年
- (5) 石钟慈 计算数学 (1979) 50—72
- (6) 秦荣 数值计算与计算机应用 2 (1981) 68—81
- (7) 秦荣 1982年国际工程科学有限元学术会议论文选集
- (8) 秦荣 样条和权残教法 广西力学学会 1981·3