河南省中学试用课本

数学第八册
教学参考资料

新乡师范学院数学系编

河南人民出版社

第四章　曲线与方程

一、解析几何的研究对象：

恩格斯说："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。"这就是说，数学是从形与数这两个侧面去研究现实世界的。几何是从"形"这个侧面去研究客观事物的，代数是从"数"这个侧面去研究客观事物的。但是客观事物都是既有形又有数，是形与数的对立统一物。形与数（图形与方程）是同一事物两个矛盾着的侧面，是反映同一客观规律的不同表达方式。

毛主席指出："一切矛盾着的东西，互相联系着，不但在一定条件之下共处于一个统一体中，而且在一定条件之下互相转化，这就是矛盾的同一性的全部意义。"形与数（图形与方程）是矛盾的两个方面，在引进坐标系的基础上使它们统一起来，并且通过坐标系使图形与方程可以互相转化。对于确定的坐标系，由给定的方程可以画出相应的图形，反过来，对于客观存在的图形（一般都是按照一定规律运动的点的轨迹），在建立坐标系以后，这个规律（图形上点的共同性质）就转化为动点的坐标所应满足的方程（图形的方程）。解析几何就是在坐标系的基础上，用代数的方法研究几何图形的性质，具体地说，也就是根据图形的几何特性求

出图形上点的坐标所应满足的方程，然后又从方程求出图形更普遍、更复杂的性质。这样通过形与数（图形与方程）的相互转化来认识客观事物的规律性，更好地解决实际问题，为三大革命运动服务。

二、本章先讨论有关线段的几个基本问题的坐标表示法（有向线段的数量、线段的长度、两点间的距离，线段的定比分点）。在这些知识的基础上研究曲线和方程的关系。

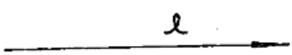
第一节　有关线段的几个问题

本节教材的理论基础是有向线段。教材的重点是两点间的距离。线段的定比分点是教材的难点。下面我们谈一下有向线段及线段的定比分点。

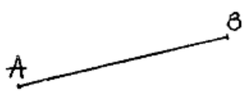
一、有向线段

1.有向直线与有向线段：

一条直线具有两个相反的方向，如果选定其中一个方向作为正向，那么相反的方向就是负向。图 4 — 1 的直线 l，箭头所指的方向是它的正向。像这样规定好了正方向的直线叫做有向直线。



（图4—1）



（图4—2）

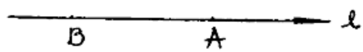
一条线段也有两个相反的方向，如图 4 — 2 的线段，如

果以A为起点，B为终点，那么从A到B是一个方向；如果以B为起点，A为终点，那么从B到A是另一个方向。像这样规定好了起点和终点的线段叫做有向线段。（它的方向就是从起点到终点的那个方向）。在表示有向线段时，我们规定把表示起点的字母写在前面，把表示终点的字母写在后面，像上面说的两个有向线段，如果A是起点B是终点，我们记作AB；如果B是起点，A是终点，就记作BA。（注意：有向线段AB和有向线段BA，虽然它们的长度是相等的，但是它们的方向是相反的，它们是两个不同的有方向的线段）。

2.有向直线上的有向线段：

在一条有向直线上的有向线段，如果有向线段的方向和有向直线的方向相同，那么它就是正方向的线段；如果有向线段的方向和有向直线的方向相反，那么它就是负方向的线段。

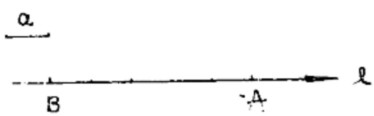
例如图4—3中，有向线段BA的方向是正的，而有向线段AB的方向是负的。



（图4—3）

3.有向线段的数量：

选定一条线段作为长度单位。我们可以量得一条有向线段的长度，如图4—4中，有向线段BA和有向线段AB的长度都是5。



（图4—4）

一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫

做这条有向线段的数量。例如图4—4中的有向线段BA，它的长度是5，它的方向是正的，所以它的数量是+5；而有向线段AB的方向是负的，所以它的数量是-5。为了简便，我们把有向线段AB的数量也记作AB。在图4—4中，

$$BA=5, \qquad AB=-5。$$

对于任何两条有向线段AB和BA，它们的数量总有如下的关系：

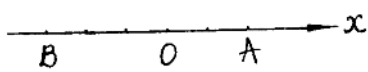
$$AB=-BA$$

或
$$AB+BA=0$$

有向线段AB的长度记作$|AB|$，也叫做有向线段AB的绝对值。因而有 $|AB|=|BA|$

在代数里，我们用一条有向直线，在它上面规定了原点，并且规定了长度单位，作为数轴（任意一个实数就可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的任意一点，也就代表一个实数。就是说，数轴上的点和实数是一一对应的。和数轴上一点相对应的实数叫做这个点的坐标。）现在用有向线段的数量概念来观察数轴上点的坐标，那么坐标为x的点，x就是以原点为起点，这个点为终点的有向线段的数量。在图4—5中，点A坐标是2。就有$OA=2$；点B的坐标是-3，就有

$$OB=-3。$$



（图4—5）

定理：设A、B是数轴上的两个点，它们的坐标为x_1和x_2。

则有：　　$$AB=OB-OA.$$

或　　$$AB=x_2-x_1.$$

$$|AB|=|BA|=|x_2-x_1|=|x_1-x_2|$$

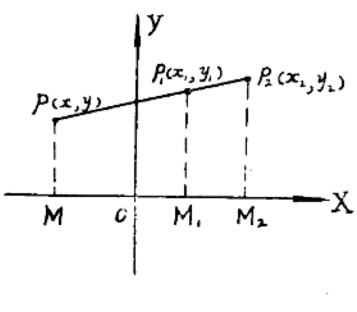
这个定理是用穷举法证明的，教本上讲的很清楚，这里就不再说了。这个定理是解析几何的一个基本定理，它是本小段教材的重点，务使学生能够理解它并能熟练地应用它。

二、线段的定比分点。

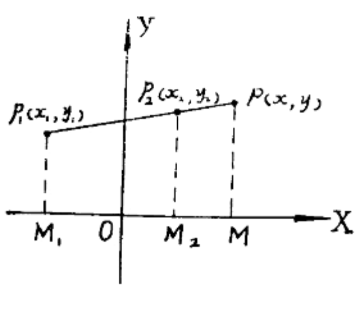
本小段教材是建立在有向线段的数量的基础上，求线段内分点和外分点的坐标。

对于求线段内分点的坐标，教本写的很清楚，而对求线段外分点的坐标教本写的较简略，现补充于下。

设$P_1(x_1、y_1)$和$P_2(x_2、y_2)$是两个已知点，$P(x、y)$是以P_1、P_2为端点的线段的外分点（图 4—6 或图 4—7）



（图4—6）



（图4—7）

已知有向线段P_1P与有向线段PP_2的数量之比为λ．即

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$$

这里λ为一定值，求点P的坐标。

（注意：有向线段P_1P和有向线段PP_2有相反的方向；我们取其中的一个的方向为正方向，那么另一个方向就是负方向，既然有向线段P_1P和有向线段PP_2有相反的方向，那么它们的数量P_1P和PP_2有相反的符号，所以λ为一负值）。

我们取有向线段P_1P_2的方向为正方向，来研竟这个问题，

根据平形线截得比例线段的定理仍有：

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$$

在图 4—6 中，P_1P为负向，PP_2为正向，所以

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{-P_1P}{PP_2}=-\frac{P_1P}{PP_2}$$

而M_1M为负向，MM_2为正向，从而

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\frac{-M_1M}{MM_2}=-\frac{M_1M}{MM_2}$$

故有：

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}\qquad(A)$$

关系式(A)在图 4—7 中，同样也是成立的，就不再证明了。

另外要注意的是 $\lambda \neq -1$。 P点为线段的外分点，不外图4—6或图4—7的两种情形。在图4—6中，$|P_1P|<|PP_2|$。

所以
$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=|\lambda|<1 \qquad (-1<\lambda<0)$$

而在图 4—7中，$|P_1P|>|PP_2|$ 所以
$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=|\lambda|>1 \qquad (\lambda<-1)$$

由此知， $|\lambda|\neq 1$。 故 $\lambda\neq -1$。

三、习题一提示

第 7 题：因为P点在y轴上，故P点的坐标为（O、y）

$$\sqrt{(O-4)^2+(y+6)^2}=5$$

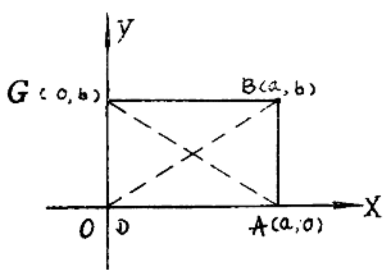
第 9 题： $\because$ $|PA|=|PB$ 所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-7)^2}.$$

两端平方，整理化简得： $8x-18y+53=0$

第11题：设矩形的长为a、宽为b、置矩形的一个顶点于坐标原点，使它的长边与x轴重合。C点坐标(o,b)。

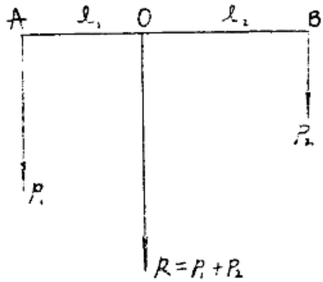
要证：$|AC|=|BD|$



（图4—8）

四、加考资料

1、同向平行力的合力：



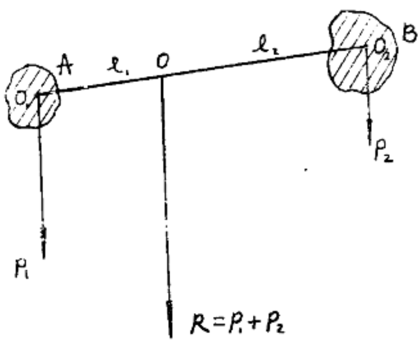
（图4—9）

直杆 AB 的两端分别作用着P_1和 P_2 两个同向平行力（图4—9）、我们要求该二力的合力 $R=P_1+P_2$ 的作点。

设合力的作用点为 O，并设 $|OA|=l_1$、 $|OB|=l_2$、 由力学知识知道，

$$l_1P_1=l_2P_2. \qquad \therefore \quad \frac{l_1}{l_2}=\frac{p_2}{p_1}$$

2、两个物体的重心（质量中心）：



（图 4—10）

设A物体的质量为m_1，其质心为O_1，设B物体的质量为m_2，其质心为 O_2，求 A、B 两物体的共同质量中心。（图 4—10）

这时作用于 O_1 点的重力为 $m_1g=p_1$， 作用于 O_2点的重力为 $m_2g=p_2$ （g 为地球引力加速度，$g=9.8$米／秒^2），这时合力 $R=P_1+P_2$ 的作用点为O。

则有 $$\frac{l_1}{l_2}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{m_2 g}{m_1 g}=\frac{m_2}{m_1}$$

点O叫做A、B两物体的重心，也叫做A、B两物体的质量中心。

第二节 曲线与方程

1、数学命题的四种形式

我们把一个命题的题设和题断相互加以变动（交换位置或加以否定）又成另一个新的命题。因而，由一个命题就可以派生出三种形式的命题，因此命题的形式概括起来基本上有四种，其具体情况与名称如下：

1、若把一个命题叫做原命题。

2、若把原命题的题设（全部或一部）作为题断，而把原命题的题断（全部或一部）作为题设所得的命题叫做原命题的逆命题。

3、若把原命题的题设(全部或一部)与题断（全部或一部)否定后所得的命题叫做原命题的否命题。

4、若把原命题中的题设（全部或一部）作为题断，把原命题的题断（全部或一部）作为题设，然后加以否定所得的新命题叫做原命题的逆否命题。

命题的四种形式，我们可以简单的表示如下：

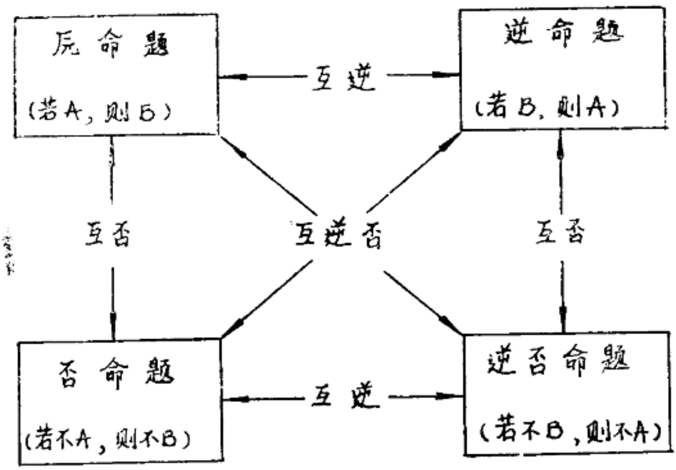
原命题：若A、则B。

逆命题：若B、则A。

否命题：若不A、则不B。

逆否命题：若不B、则不A。

命题的四种形式之间的关系：



“互为逆否的命题，真则都真，假则都假”，这就是说二命题是等价命题。

“互否的命题，可以都真，可以都假，也可以一真一假”，这就是说二命题是不等价命题。

“互逆的命题，可以都真、可以都假，也可以一真一假”，即二命题不是等价命题。

二、平面几何中的轨迹问题

一条曲线（或图形）可以看作是适合于某种条件的点的轨迹。也就是说，如果：

（1）曲线上的点都适合于这个条件；

（2）适合于这个条件的点都在曲线上。

那么这条曲线就叫做适合这个条件的点的轨迹。

“适合于这个条件的点都在曲线上”称谓“完备性”；“曲线上的点都适合于这个条件”称谓“纯粹性”。因此，讨论轨迹问题，既要讨论“完备性”又要讨论“纯粹性”。

“完备性”的等价命题是：

（3）不在曲线上的点不适合于这个条件。

“纯粹性”的等价命题是：

（4）不适合于这个条件的点不在曲线上。

因此，我们证明适合条件点的轨迹有四种方法：即（1），（2）配合；（1）、（3）配合；（2）、（4）配合与（3）、（4）配合。

三、曲线与方程

“一条曲线可以看作是适合于某种条件点的轨迹”。在给定的坐标系里，由于点可以用它的坐标(x、y)来表示，所以当这个点按照某种条件运动形成曲线时，它的坐标(x、y)也随之相应地变化而受一个代数条件的限制，这个代数条件就是一个含x和y的方程。因此，动点所要适合的条件就可以用含有x和y的一个方程来表示。

例如：园心在原点，半经为 r 的园（图4—11），我们讨论园上点的坐标所满足的方程。

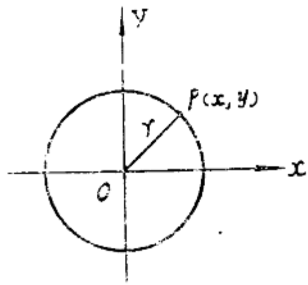
这个园可以看作是到原点的距离等于定长 r 的动点

$P(x、y)$ 的轨迹。由于

$$|OP| = r。$$

且 $$OP=\sqrt{x^2+y^2}$$

所以当 P 点运动时，它的坐标（x、y）始终满足条件 $\sqrt{x^2+y^2}=r$。这个条件就是一个含有 x 与 y 的方程。



（图4—11）

方程两端平方得

$$x^2+y^2=r^2$$

这就是园上的点的坐标所应适合的方程。

（注：由于 $r>0$，$\sqrt{x^2+y^2}\neq -r$ 所以方程 $\sqrt{x^2+y^2}=r$ 与方程 $x^2+y^2=r^2$ 是同解方程。也就是说，条件 $\sqrt{x^2+y^2}=r$ 与条件 $x^2+y^2=r^2$ 是相同的）。

根据轨迹的概念，我们知道："曲线与它所对应的方程"应有如下的关系：

（1）曲线上的点的坐标都适合这个方程。

（2）坐标适合于这个方程的点都在曲线上。

定义：设有一条曲线和一个含有 x 与 y 两个变量的方程、如果：

（1）曲线上的点的坐标都适合于这个方程。

（2）坐标适合于这个方程的点都在曲线上。

那么这个方程叫做曲线的方程；反过来，这条曲线叫做方程

的曲线。

根据“曲线与方程”的定义，我们来讨论园心在原点，半径为 r 的园与方程 $x^2+y^2=r^2$ 的关系。

(1)园上的点的坐标(x、y)都适合方程 $x^2+y^2=r^2$ 这一点前面已经讨论了

(2)我们需要证明坐标满足方程 $x^2+y^2=r^2$ 的点都在圆上。证明这个命题有两种方法：

(i) 直接证明这个命题，对方程 $x^2+y^2=r^2$ 两端开方取算术根有 $\sqrt{x^2+y^2}=r$ $\because$ $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore$ $|OP|=r$。这就是说坐标适合方程 $x^2+y^2=r^2$ 的点到原点的距离为 r，所以它在园上。

(ii)因为“坐标满足方程 $x^2+y^2=r^2$ 的点都在园上”与它的逆否命题“不在园上的点，它的坐标必定不满足方程 $x^2+y^2=r^2$。”是等价命题，所以我们只须证明它的逆否命题成立就行了。(教本上也就是这样证明的)

对于园外的点 $M(x、y)$， $|OM|>r$，因此 $x^2+y^2>r^2$。

对于园内的点 $M'(x、y)$、 $|OM'|<r$，因此 $x^2+y^2<r^2$。

这就是说，如果点不在园上，它的坐标必定不满足方程

$$x^2+y^2=r^2。$$

综合上述，我们知道：园心在原点，半径为 r 的园的方程是 $x^2+y^2=r^2$。

根据“曲线与方程”的定义，曲线与方程之间有那样的关系，所以研究曲线的几何问题就转化成研究方程的代数问题了。

例如，判定一个点是不是在所给的曲线上，我们只须看这个点的坐标是不是满足曲线的方程。当这个点的坐标不满足方程时，我们知道这个点不在曲线上（这是根据“曲线上的点的坐标都满足方程”的等价命题“坐标不满足方程的点不在曲线上”）；当这个点的坐标满足方程时，我们知道这个点在曲线上（这是根据“坐标满足方程的点都在曲线上”）。

在解析几何里，“曲线与方程”的研究有两个基本问题：

(1)已知曲线，求它的方程。

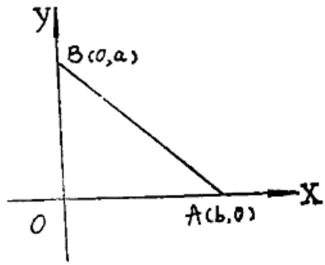
(2)已知方程、画出它的曲线。

这两个问题教本中写的很系统也很清楚，这里就不说了。

四、复习题提示

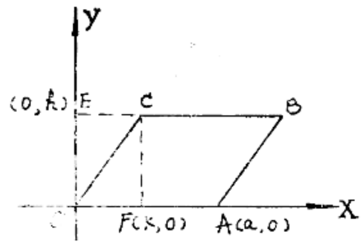
第 2 题：

(i)把直角三角的两个直角边分别放置于 x 轴及 y 轴上(图 4—12)



(图4—12)

(ii) 置平行四边形的一边在 x 轴上，该边上的一个顶点与原点重合。（图 4—13）



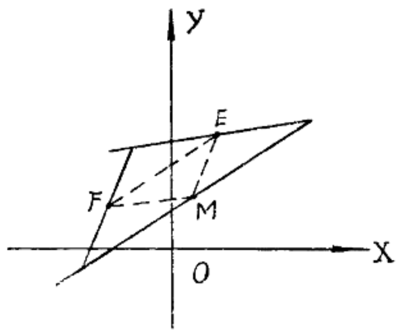
（图 4—13）

第 3 题：（图 4—14）

点 M 所在的边与线段 EF 平行。

点 F 所在的边与线段 ME 平行。

点 E 所在的边与线段 FM 平行。

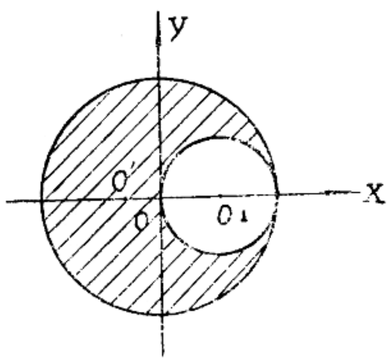


（图 4—14）

第 6 题：（图 4—15）

解：取大园的中心 O 为坐标原点，x 轴通过小园的中心 O_1。

整个大园的重心位于 O 点。小园的重心位于 O_1 点，画有阴影部分的重心在 O'，点其坐标为 $(-a、o)$。由于 O 点是小园与阴影部分两部



（图 4—15）

分的重心。所以有

$$O=\frac{(\pi\cdot 5^2)\cdot 5-[\pi\cdot 10^2-\pi\cdot 5^2]\cdot a}{\pi\cdot 10^2}$$

$$\therefore \quad a=\frac{5}{3}$$

第 9 题：

设A点的坐标为（x_1、O）。 B点的坐标为（O、y_2）

则 线段AB中点P的坐标（x、y）有

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+o}{2}=\dfrac{x_1}{2} \\ y=\dfrac{o+y_2}{2}=\dfrac{y_2}{2} \end{cases}$$

依题意： $\sqrt{x_1{}^2+y_2{}^2}=2a$ 即 $x_1{}^2+y_2{}^2=4a^2$。

$\because$ $x_1=2x$。 $y_2=2y$。 所以有

$4x^2+4y^2=4a^2$ 亦即 $x^2+y^2=a^2$。