

# 微分几何讲义

胡房李 宗正让 慎祥利 合 编

汉 中 师 范 学 院

## 编者说明

我们根据高等师范院校《微分几何教学大纲》（供数学专业用），本着加强基础，加强实践，注意突出重点，注意知识之间的相互联系的精神，编写了《微分几何讲义》初稿，初稿经过试讲和修改，才形成了这本《微分几何讲义》教材，其内容包含了经典微分几何的主要内容——曲线论和曲面论，以及外微分形式和活动标架法及其应用的介绍，同时，末尾加了《附录》，以作为某些正文的补充。

这份教材可作为高等师范院校数学专业《微分几何》基础课试用，也可供工科院校选用。由于附在每小节后的题目，个数和类型较多，且附有难题提示，所以适合自学者试用。使用中遇有\*号的内容都可以略去，并不影响以后的学习。由于编者水平所限，教材中的缺点和错误在所难免，诚恳希望使用本教材的同志们批评指正。

在这份教材编写和铅印过程中，我院教务处和教学科领导给予大力支持，数学系蒲义书付教授、蔡秉衡同志、彭仕章同志、物理系李泽民同志，以及西安矿院刘荣均付教授都给予了大力支持和帮助，我们谨在此表示衷心的感谢。此外，编写中使用过的教科书和文章，都不一一列举了，我们谨向作者表示谢意。

编者

# 目 录

## 第一章 曲线论

§ 1	向量代数复习	1
§ 2	向量函数	6
2.1	向量函数的极限	6
2.2	向量函数的连续性	9
2.3	向量函数的微商	10
2.4	定长向量	15
2.5	向量函数的积分	16
§ 3	曲线的概念	17
3.1	曲线的概念	17
3.2	曲线的切向量 曲线的正则点	20
3.3	曲线的弧长 弧长参数	23
§ 4	空间曲线	29
4.1	密切平面	29
4.2	基本三面形	30
4.3	曲率和挠率	32
4.4	Frenet 公式	4 <sup>0</sup>
4.5	曲线在一点邻近的结构	42
4.6	空间曲线论基本定理 曲线的自然方程	51
§ 5	特殊曲线	60
5.1	平面曲线	60

5.2 渐伸线和渐缩线	70
5.3* Bertrand 曲线	75

## 第二章 曲面论

§ 1 曲面的概念	81
1.1 曲面的参数表示	81
1.2 曲面的切平面和法线	83
§ 2 曲面的第一基本形式	91
2.1 第一基本形式	91
2.2 曲面上曲线的弧长	92
2.3 曲面上两相交曲线的夹角	92
2.4 曲面域的面积	94
2.5 等距对应	99
2.6 保形对应	103
2.7 曲面上的正交参数曲线网	109
§ 3 曲面的第二基本形式	111
3.1 第二基本形式	111
3.2 曲面上曲线的曲率	115
3.3 杜班(Dupin)指标线 Euler公式	116
3.4 渐近方向和共轭方向	120
3.5 曲面的主方向和曲率线	124
3.6 曲面的主曲率	132
3.7 Gauss 曲率与平均曲率	133
3.8 曲面在一点邻近的结构	141
§ 4 直纹面 可展曲面与单参数曲面族的包络面	145

4.1	直纹面	145
4.2	可展曲面	147
4.3	单参数曲面族(平面族)的包络面	150
4.4	可展曲面的重要特征	155
§ 5	<b>曲面论的基本定理</b>	160
5.1	曲面的基本公式Christoffel符号	160
5.2	曲面的基本方程	197
5.3	Riemann曲率张量	171
5.4	曲面论的基本定理	176
§ 6	<b>曲面上的测地线</b>	190
6.1	曲面上曲线的测地曲率	190
6.2	曲面上的测地线	196
6.3*	可展曲面上测地线的一种算法	203
6.4	曲面上的半测地坐标系和极坐标系*	207
6.5	Gauss—Bonnet公式	213
§ 7	<b>特殊曲面</b>	218
7.1	常Gauss曲率的曲面…伪球面、罗氏几何、常Gauss曲率的旋转曲面*	218
7.2*	极小曲面	231
§ 8	<b>曲面上向量的平行动移</b>	236
8.1	Levi—Civita平移	236
8.2	Gauss曲率的一项几何意义	238

### 第三章 外微分形式和活动标架法

§ 1	<b>外微分形式</b>	243
1.1	格拉斯曼(Grassmann)代数	243

1.2	外微分形式	246
1.3	Frobenius条件	257
§ 2	活动标架	278
2.1	活动标架和结构方程	278
2.2	活动标架法	284
§ 3	用活动标架法研究曲面	291
3.1	曲面论的基本定理	291
3.2	曲面的第一、第二基本形式	292
3.3	曲面上的曲率	293
3.4	曲面上的Levi—Civita平行移动	298
附录		306
(一)	关于曲线微分几何的一点注记	306
(二)	关于零Gauss曲率的曲面	310
§ 1	一个 $k = 0$ 的非可展曲面	310
§ 2	零Gauss曲率的曲面	312
(三)	关于微分方程组的几个定理	318
§ 1	一阶齐线性常微分方程组	318
§ 2	一阶正规形微分方程组	322

# 第一章 曲线论

## § 1 \* 向量代数复习

关于向量的定义及运算已在解析几何学里讲过，为了今后使用方便，特作以下概括性的复习。

在三维欧氏空间 $E^3$ 中，当取定右旋直交坐标系 $\{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 后，既可用向量的分量表示向量，又可用一个相应的点，使得 $E^3$ 中的点与其位置向量等同，于是 $\vec{r}$ 可表示为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

它的长是

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

若 $|\vec{r}| \neq 0$ ，则 $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ 是和 $\vec{r}$ 同向的单位向量。

### 1.1 向量的运算

#### 1.1)<sub>1</sub> 向量与数量的乘法

$$\lambda\vec{r} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

其中 $\lambda$ 为实数

#### 1.1)<sub>2</sub> 加法与减法

若 $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  ( $i=1, 2$ )，则

$$\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$$

### 1.1 $\widehat{\phantom{x}}$ 内积

向量  $\vec{r}_i (i=1,2)$  的内积 (或称数量积) 定义为:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cos(\widehat{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)})$$

若  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  则

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

于是

$$\cos(\widehat{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

其中  $0 \leq \widehat{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} \leq \pi$

**定理1** 二向量  $\vec{r}_i$  垂直的充要条件是  $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$

### 1.1)4 外积

向量  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) i=1,2$  的外积 (或称向量积) 是

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

可知:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \sin(\widehat{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}) \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$$

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \leq |\vec{r}_1| |\vec{r}_2|$$

且知,  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$  构成右旋系

**定理2** 二向量  $\vec{r}_i$  平行的充要条件是



$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0$$

## 1.2 向量的运算规律

设 $\lambda, \mu$ 为实数,  $\vec{r}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 表向量, 则有:

### 1.2)<sub>1</sub> 结合律

$$\begin{aligned} \lambda(\mu \vec{r}) &= (\lambda\mu) \vec{r} \\ (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \vec{r}_3 &= \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) \\ (\lambda \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_2 &= \lambda (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) \\ (\lambda \vec{r}_1) \times (\mu \vec{r}_2) &= \lambda\mu (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \end{aligned}$$

### 1.2)<sub>2</sub> 交换律

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 &= \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \\ \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 &= \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 \end{aligned}$$

但应注意: 外积满足反交换律, 即

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = -(\vec{r}_2 \times \vec{r}_1)$$

### 1.2)<sub>3</sub> 分配律

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \vec{r} &= \lambda \vec{r} + \mu \vec{r} \\ \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) &= \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 \\ \vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) &= \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 \end{aligned}$$

## 1.3 混合积Lagrange恒等式 双重向量积

### 1.3)<sub>1</sub> 混合积 Lagrange恒等式

向量  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  ( $i=1, 2, 3$ ) 作成的混合积为:

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

易知  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_3 = \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)$   
 $= \vec{r}_2 \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1)$

**定理3** 三个向量 $\vec{r}_i$ , ( $i=1, 2, 3$ ) 共面的充要条件是:

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

而  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) > 0$ , ( $< 0$ ) 则是 $\vec{r}_i$  构成右(左)旋系的充要条件。

四个向量 $\vec{r}_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 可作出如下混合积:

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) = (\vec{r}_1, \vec{r}_3, \vec{r}_4) + (\vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4)$$

及Lagrange恒等式:

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{r}_4) &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_4 & x_4 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 & x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 \\ x_1 x_4 + y_1 y_4 + z_1 z_4 & x_2 x_4 + y_2 y_4 + z_2 z_4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{r}_1 \vec{r}_3 & \vec{r}_2 \vec{r}_3 \\ \vec{r}_1 \vec{r}_4 & \vec{r}_2 \vec{r}_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3)(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_4) - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_4)(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3)$$

### 1.3)<sub>2</sub> 双重向量积

几个向量的连乘外积的有关等式的证明，都比较麻烦，多采用较简的 $\omega$ 恒等式法， $\omega$ 恒等式的原理是：一个向量 $\vec{r} = (x, y, z)$ 与任意向量 $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 之内积恒为0时，则 $\vec{r}$ 必是一个0向量。事实上，若

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{\omega} = x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 = 0$$

对任意向量 $\vec{\omega}$ 都成立的话，势必对于基向量 $\vec{i}$ ， $\vec{j}$ ， $\vec{k}$ 都成立，因而可知 $\vec{r}$ 是零向量，进一步可知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 相等的充要条件是对于任意向量 $\vec{\omega}$ 恒有

$$\vec{a} \cdot \vec{\omega} = \vec{b} \cdot \vec{\omega}$$

现在求双重向量积与任意向量 $\vec{\omega}$ 的数量积

$$\begin{aligned} ((\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \times \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega} &= (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{\omega}) \\ &= (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{\omega}) \\ &= (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3)(\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}) - (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3)(\vec{r}_1 \cdot \vec{\omega}) \\ &= [(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3)\vec{r}_2 - (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3)\vec{r}_1] \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

故知  $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \times \vec{r}_3 = (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3)\vec{r}_2 - (\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3)\vec{r}_1$

因而可知：

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{r}_4) = (\vec{r}_1, \vec{r}_3, \vec{r}_4)\vec{r}_2 -$$

$$\begin{aligned}
 &= (\vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4)\vec{r}_1 \\
 &= (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_4)\vec{r}_3 - (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)\vec{r}_4
 \end{aligned}$$

## §2 向量函数

今后将常用向量分析的知识，但由于和数学分析中相应的实函数命题及其论述在原则上无大的差别，因而在此对向量分析的基础知识只作简要的介绍。

若对应于点集  $G$  中的每一个点  $x$ ，有一个确定的向量  $\vec{r}$ ，则  $\vec{r}$  称为  $x$  的一个**向量函数**。

记作

$$\vec{r} = \vec{r}(x), \quad x \in G$$

点集  $G$  的取设不同，则有不同的向量函数，当  $G$  是实数轴上一区间时，则得一元向量函数。

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

如  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $(a \leq t \leq b)$

设  $G$  是一平面域，则得二元向量函数

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad (u, v) \in G$$

如  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  
 $(u, v) \in G$

### 2.1 向量函数的极限

设  $\vec{r}(t)$  是已知向量函数， $\vec{r}_0$  是常向量，若对于任意给定

的正数 $\varepsilon$ , 都存在数 $\delta > 0$ , 使当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| < \varepsilon$$

成立, 则称当 $t \rightarrow t_0$ 时,  $\vec{r}(t)$  趋于极限 $\vec{r}_0$  记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$$

易知上式等价于

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$$

**定理4** 设  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

则  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$  成立的充要条件是

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0$$

**证明:** 因为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0|$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} |(x(t), y(t), z(t)) - (x_0, y_0, z_0)|$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} |(x(t) - x_0, y(t) - y_0, z(t) - z_0)|$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}$$

故当  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$  时, 则有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0$$

反之, 也是真的, 得证。

由此可见:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (x(t), y(t), z(t)) = (\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t))$$

现在指出向量函数的极限运算的一些性质, 设向量函数  $\vec{r}(t)$  和  $\vec{r}_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 以及数量函数  $\lambda(t)$ , 当  $t \rightarrow t_0$  时, 都存在着极限, 则有

第一 两个向量函数之和 (差) 的极限等于该二函数的极限之和 (差)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t),$$

第二 数乘向量的极限等于它们各自极限的乘积。

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$$

第三 数量积的极限等于它们各自极限的数量积。

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t)$$

第四 向量积的极限等于它们各自极限的向量积。

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t)$$

这些命题的证明，虽然原则上和数学分析中关于实函数所相应的命题的证明无什差别，但为读者方便，仅就第四款给以证明。

设  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_i(t) = \vec{r}_{i0}$

$$\begin{aligned} \text{因 } & |\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) - \vec{r}_{10} \times \vec{r}_{20}| \\ &= |\vec{r}_1(t) \times (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_{20}) + (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_{10}) \times \vec{r}_{20}| \\ &\leq |\vec{r}_1(t) \times (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_{20})| \\ &\quad + |(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_{10}) \times \vec{r}_{20}| \\ &\leq |\vec{r}_2(t) - \vec{r}_{20}| |\vec{r}_1(t)| + |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_{10}| |\vec{r}_{20}| \end{aligned}$$

则当  $t \rightarrow t_0$  时，由已知条件可得

$$|\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) - \vec{r}_{10} \times \vec{r}_{20}| < \epsilon$$

故原式成立。

## 2.2 向量函数的连续性

有了向量函数极限的概念，我们就可以引进向量函数连续性的概念，若  $[a, b]$  上的函数  $\vec{r}(t)$ ，对于  $t_0 \in (a, b)$ ，具有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

则称函数  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  连续。不难知道，当  $\vec{r}(t)$  的诸分量函数是连续函数时，则该向量函数  $\vec{r}(t)$  是连续的向量函数。

如果在区间  $[a, b]$  的每一点都连续，则称  $\vec{r}(t)$  在该区间上连续（在端点， $t=a, t=b$  处只要求右连续和左连续）

利用极限运算法则，又可知，若向量函数  $\vec{r}(t), \vec{r}_i(t)$  ( $i=1, 2$ ) 和数量函数  $\lambda(t)$  都在  $t_0$  点连续时，则函数  $\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)$ ,  $\lambda(t)\vec{r}(t)$ ,  $\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$  和  $\vec{r}(t) \times \vec{r}_2(t)$  也都在  $t_0$  点连续

## 2.3 向量函数的微分

### 2.3)<sub>1</sub> 导向量

设  $\vec{r}(t)$  是  $[a, b]$  上的连续函数，且  $t, t_0 \in (a, b)$ ，若果极限

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$

存在，则称  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  处是可微分的，这个极限称为  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  点的导向量（或微商），用  $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0}$  或  $\vec{r}'(t_0)$  表示，

即

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0} = \vec{r}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$



**定理5** 向量函数  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  在  $t_0$  点可微的充要条件是其诸分量函数在  $t_0$  处可微。

**证明:** 由定理4可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right) \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right) \end{aligned}$$

因而证得

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t), y(t), z(t)) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

### 2.3)₂ 微分公式

设  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{r}_i(t)$  ( $i=1, 2$ ) 都是可微的向量函数,  $\lambda(t)$  是可微的实函数, 则  $\lambda(t)\vec{r}(t)$ ,  $\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)$ ,  $\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$ ,  $\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)$  及  $(\vec{r}(t), \vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t))$  都是可微的, 且有

$$\text{第一} \quad (\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \pm \vec{r}_2'(t)$$