微分几何讲义

胡宗慎
房正祥 合编
李让利

汉中师范学院

编者说明

我们根据高等师范院校《微分几何教学大纲》（供数学专业用），本着加强基础，加强实践，注意突出重点，注意知识之间的相互联系的精神，编写了《微分几何讲义》初稿，初稿经过试讲和修改，才形成了这本《微分几何讲义》教材，其内容包含了经典微分几何的主要内容——曲线论和曲面论，以及外微分形式和活动标架法及其应用的介绍，同时，末尾加了《附录》，以作为某些正文的补充。

这份教材可作为高等师范院校数学专业《微分几何》基础课试用，也可供工科院校选用。由于附在每小节后的题目，个数和类型较多，且附有难题提示，所以适合自学者试用。使用中遇有*号的内容都可以略去，并不影响以后的学习。由于编者水平所限，教材中的缺点和错误在所难免，诚恳希望使用本教材的同志们批评指正。

在这份教材编写和铅印过程中，我院教务处和教学科领导给予大力支持，数学系蒲义书付教授、蔡秉衡同志、彭仕章同志、物理系李泽民同志，以及西安矿院刘荣均付教授都给予了大力支持和帮助，我们谨在此表示衷心的感谢。此外，编写中使用过的教科书和文章，都不一一列举了，我们谨向作者表示谢意。

编者

目　录

第一章　曲线论

第二章 曲面论

第三章 外微分形式和活动标架法

第一章　曲线论

§1* 向量代数复习

关于向量的定义及运算已在解析几何学里讲过，为了今后使用方便，特作以下概括性的复习。

在三维欧氏空间E^3中，当取定右旋直交坐标系$\{0;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$后，既可用向量的分量表示向量，又可用一个相应的点，使得E^3中的点与其位置向量等同，于是$\vec{r}$可表示为

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x, y, z)$$

它的长是

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

若$|\vec{r}|\neq0$，则$\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$是和$\vec{r}$同向的单位向量。

1.1 向量的运算

1.1)$_1$ 向量与数量的乘法

$$\lambda\vec{r}=(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

其中λ为实数

1.1)$_2$ 加法与减法

若 $\vec{r}_i=(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2)$，则

$$\vec{r}_1\pm\vec{r}_2=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2)$$

1.1) 内积

向量$\vec{r}_i$(i=1,2) 的内积（或称数量积）定义为：

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cos(\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2})$$

若 $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 则

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

于是

$$\cos(\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

其中 $0 \leqslant (\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2}) \leqslant \pi$

理定1 二向量$\vec{r}_i$垂直的充要条件是$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$

1.1)$_4$ 外积

向量 $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ i=1,2的 外积(或称向 量积)是

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

可知：

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \sin(\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2}) \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$$

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \leqslant |\vec{r}_1| |\vec{r}_2|$$

且知，$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$构成右旋系

定理2 二向量$\vec{r}_i$平行的充要条件是

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0$$

1.2 向量的运算规律

设λ,μ为实数,$\vec{r}_i$ ($i=1, 2, 3$) 表向量，则有：

1.2)$_1$ 结合律

$$\lambda(\mu\vec{r}) = (\lambda\mu)\vec{r}$$

$$(\vec{r}_1+\vec{r}_2)+\vec{r}_3 = \vec{r}_1+(\vec{r}_2+\vec{r}_3)$$

$$(\lambda\vec{r}_1)\cdot\vec{r}_2 = \lambda(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)$$

$$(\lambda\vec{r}_1)\times(\mu\vec{r}_2) = \lambda\mu(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)$$

1.2)$_2$ 交换律

$$\vec{r}_1+\vec{r}_2 = \vec{r}_2+\vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = \vec{r}_2\cdot\vec{r}_1$$

但应注意：外积满足反交换律，即

$$\vec{r}_1\times\vec{r}_2 = -(\vec{r}_2\times\vec{r}_1)$$

1.2)$_3$ 分配律

$$(\lambda+\mu)\vec{r} = \lambda\vec{r}+\mu\vec{r}$$

$$\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2+\vec{r}_3) = \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3$$

$$\vec{r}_1\times(\vec{r}_2+\vec{r}_3) = \vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\vec{r}_3$$

1.3 混合积Lagrange恒等式　双重向量积

1.3)$_1$ 混合积　　Lagrange恒等式

向量 $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2, 3$)作成的混合积为：

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

易知 $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_3 = \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)$

$$= \vec{r}_2 \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1)$$

定理3 三个向量$\vec{r}_i$，（$i=1, 2, 3$）共面的充要条件是：

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

而 $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) > 0$，（$<0$）则是$\vec{r}_i$构成右（左）旋系的充要条件。

四个向量$\vec{r}_i$（$i=1, 2, 3, 4$）可作出如下混合积：

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) = (\vec{r}_1, \vec{r}_3, \vec{r}_4) + (\vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4)$$

及Lagrange恒等式：

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_3 \times \vec{r}_4) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_4 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 & x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 \\ x_1x_4 + y_1y_4 + z_1z_4 & x_4x_2 + y_4y_2 + z_4z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{r}_1\vec{r}_3 & \vec{r}_2\vec{r}_3 \\ \vec{r}_1\vec{r}_4 & \vec{r}_2\vec{r}_4 \end{vmatrix}$$

$$= (\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3)(\vec{r}_2\cdot\vec{r}_4) - (\vec{r}_1\cdot\vec{r}_4)(\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3)$$

1.3)$_2$ 双重向量积

几个向量的连乘外积的有关等式的证明，都比较麻烦，多采用较简的ω恒等式法，ω恒等式的原理是：一个向量$\vec{r}=(x,y,z)$与任意向量$\vec{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$之内积恒为0时，则$\vec{r}$必是一个0向量。事实上，若

$$\vec{r}_1\cdot\vec{\omega} = x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 = 0$$

对任意向量$\vec{\omega}$都成立的话，势必对于基向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$都成立，因而可知$\vec{r}$是零向量，进一步可知$\vec{a}$，$\vec{b}$相等的充要条件是对于任意向量$\vec{\omega}$恒有

$$\vec{a}\cdot\vec{\omega} = \vec{b}\cdot\vec{\omega}$$

现在求双重向量积与任意向量$\vec{\omega}$的数量积

$$([\vec{r}_1\times\vec{r}_2)\times\vec{r}_3]\cdot\vec{\omega} = (\vec{r}_1\times\vec{r}_2,\ \vec{r}_3,\ \vec{\omega})$$

$$= (\vec{r}_1\times\vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_3\times\vec{\omega})$$

$$= (\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3)(\vec{r}_2\cdot\vec{\omega}) - (\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3)(\vec{r}_1\cdot\vec{\omega})$$

$$= [(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3)\vec{r}_2 - (\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3)\vec{r}_1]\cdot\vec{\omega}$$

故知 $(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)\times\vec{r}_3 = (\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3)\vec{r}_2 - (\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3)\vec{r}_1$

因而可知：

$$(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_3\times\vec{r}_4) = (\vec{r}_1,\ \vec{r}_3,\ \vec{r}_4)\vec{r}_2 -$$

$$- (\vec{r}_2,\ \vec{r}_3,\ \vec{r}_4)\vec{r}_1$$

$$= (\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{r}_4)\vec{r}_3 - (\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{r}_3)\vec{r}_4$$

§2 向量函数

今后将常用向量分析的知识，但由于和数学分析中相应的实函数命题及其论述在原则上无大的差别，因而在此对向量分析的基础知识只作简要的介绍。

若对应于点集G中的每一个点x，有一个确定的向量$\vec{r}$，则$\vec{r}$称为x的一个**向量函数**。
记作

$$\vec{r} = \vec{r}(x), \qquad x \in G$$

点集G的取设不同，则有不同的向量函数，当G是实数轴上一区间时，则得一元向量函数。

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

如 $\vec{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)),\quad (a \leqslant t \leqslant b)$

设G是一平面域，则得二元向量函数

$$\vec{r} = \vec{r}(u,\ v) \qquad (u,\ v) \in G$$

如 $\vec{r}(u,\ v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,\ v)),$

$$(u,\ v) \in G$$

2.1 向量函数的极限

设$\vec{r}(t)$ 是已知向量函数，$\vec{r}_0$是常向量，若对于任意给定

的正数ε，都存在数$\delta>0$，使当$0<|t-t_0|<\delta$时

$$|\vec{r}(t)-\vec{r_0}|<\varepsilon$$

成立，则称当$t\to t_0$时，$\vec{r}(t)$趋于极限$\vec{r_0}$记作

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r_0}$$

易知上式等价于

$$\lim_{t\to t_0}|\vec{r}(t)-\vec{r_0}|=0$$

定理4 设$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

$$\vec{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$$

则 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r_0}$成立的充要条件是

$$\lim_{t\to t_1}x(t)=x_0,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0$$

证明：因为

$$\lim_{t\to t_0}|\vec{r}(t)-\vec{r_0}|$$

$$=\lim_{t\to t_0}|(x(t),y(t),z(t))-(x_0,y_0,z_0)|$$

$$=\lim_{t\to t_0}|(x(t)-x_0,y(t)-y_0,z(t)-z_0)|$$

$$=\lim_{t\to t_0}\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2+z(t)-z_0)^2}$$

故当 $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$时，则有

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0$$

反之，也是真的，得证。

由此可见：

$$\lim_{t \to t_0} (x(t), y(t), z(t)) = (\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t))$$

现在指出向量函数的极限运算的一些性质，设向量函数$\vec{r}(t)$和$\vec{r}_i(t)$（$i=1$，2，）以及数量函数$\lambda(t)$，当$t \to t_0$时，都存在着极限，则有

第一　两个向量函数之和（差）的极限等于该二函数的极限之和（差）

$$\lim_{t \to t_0} [\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)] = \lim_{t \to t_0} \vec{r}_1(t) + \lim_{t \to t_0} \vec{r}_2(t),$$

第二　数乘向量的极限等于它们各自极限的乘积。

$$\lim_{t \to t_0} \lambda(t) \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} \lambda(t) \cdot \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t)$$

第三　数量积的极限等于它们各自极限的数量积。

$$\lim_{t \to t_0} [\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \lim_{t \to t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim_{t \to t_0} \vec{r}_2(t)$$

第四　向量积的极限等于它们各自极限的向量积。

$$\lim_{t\to t_0}[\vec{r_1}(t)\times\vec{r_2}(t)]=\lim_{t\to t_0}\vec{r_1}(t)\times\lim_{t\to t_0}\vec{r_2}(t)$$

这些命题的证明，虽然原则上和数学分析中关于实函数所相应的命题的证明无什差别，但为读者方便，仅就第四款给以证明。

设 $\lim_{t\to t_0}\vec{r_i}(t)=\vec{r_{i0}}$

因 $|\vec{r_1}(t)\times\vec{r_2}(t)-\vec{r_{10}}\times\vec{r_{20}}|$

$$=|\vec{r_1}(t)\times(\vec{r_2}(t)-\vec{r_{20}})+(\vec{r_1}(t)-\vec{r_{10}})\times\vec{r_{20}}|$$

$$\leqslant|\vec{r_1}(t)\times(\vec{r_2}(t)-\vec{r_{20}})|+|(\vec{r_1}(t)-\vec{r_{10}})\times\vec{r_{20}}|$$

$$\leqslant|\vec{r_2}(t)-\vec{r_{20}}||\vec{r_1}(t)|+|\vec{r_1}(t)-\vec{r_{10}}||\vec{r_{20}}|$$

则当 $t\to t_0$时，由已知条件可得

$$|\vec{r_1}(t)\times\vec{r_2}(t)-\vec{r_{10}}\times\vec{r_{20}}|<\varepsilon$$

故原式成立。

2.2 向量函数的连续性

有了向量函数极限的概念，我们就可以引进向量函数连续性的概念，若[a, b]上的函数$\vec{r}(t)$，对于$t_0\in(a, b)$，具有

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$$

则称函数$\vec{r}(t)$在t_0**连续**。不难知道，当$\vec{r}(t)$的诸分量函数是连续函数时，则该向量函数$\vec{r}(t)$是连续的向量函数。

如果在区间[a，b]的每一点都连续，则称$\vec{r}(t)$ 在该**区间上连续**（在端点，$t=a$，$t=b$处只要求右连续和左连续）

利用极限运算法则，又可知，若向量函数$\vec{r}(t)$，$\vec{r}_i(t)$（$i=1$，2）和数量函数$\lambda(t)$都在t_0点连续时，则函数$\vec{r}_1(t)\pm\vec{r}_2(t)$，$\lambda(t)\vec{r}(t)$，$\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)$ 和 $\vec{r}(t)\times\vec{r}_2(t)$也都在$t_0$点连续

2.3　向量函数的微分

2.3)$_1$ 导向量

设$\vec{r}(t)$是[a，b]上的连续函数，且t，$t_0\in(a,b)$，若果极限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$$

存在，则称$\vec{r}(t)$在t_0处是**可微分**的，这个极限称为$\vec{r}(t)$ 在t_0点的**导向量**（或**微商**），用$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0}$ 或$\vec{r}'(t_0)$ 表示，即

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0}=\vec{r}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$$

定理5 向量函数$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$在$t_0$点可微的充要条件是其诸分量函数在$t_0$处可微。

证明：由定理4可得

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$$

$$=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\ \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right)$$

$$=\left(\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\ \lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\ \lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right)$$

因而证得

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(x(t),y(t),z(t))=(x'(t),y'(t),z'(t))$$

2.3)$_2$ 微分公式

设$\vec{r}(t)$，$\vec{r}_i(t)$ $(i=1,2)$都是可微的向量函数，$\lambda(t)$是可微的实函数，则$\lambda(t)\vec{r}(t)$，$\vec{r}_1(t)\pm\vec{r}(t)$，$\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)$，$\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)$及$(\vec{r}(t),\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t))$都是可微的，且有

第一 $(\vec{r}_1(t)\pm\vec{r}_2(t))'=\vec{r}_1{}'(t)\pm\vec{r}_2{}'(t)$