

中西算学大成

中西算學大成

中西算學大成卷六十四

嘉善陳維祺纂

代數術七

論求實根之法

第一百四十四款

前于一百款中曾言無論何次之式其末項必等于各根反號連乘之積所以無論何次式其各根若為實數者實數謂整數及分數也另有一法解之法將式之諸項盡聚于左邊又求其末項之諸約數可約末項之諸數也以諸約數一一代其原式中之未知數如某約數代之能令各項之總數為〇者則此數即為原式之一箇整根

一式設有

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 25 = 0$

欲求其整根之數 此式之末項為一則以一、二、五、一皆可度之而

此四可度之數可為正亦可為負則以其或正或負之諸數一一代其原式中之天

如今

天=1-

則

$$-|四七|-0=0.$$

如今

天二下

則

$$I - \frac{1}{4}k - 0 = \frac{1}{2}$$

如今

天二上

則

八-六-四-〇-二

如今

天 = 下。

則

下下六一四一〇〇〇。

如今

天=五

則

$$-25 - 00 \overline{35} - 0 = 0$$

由此可見凡能令原式變為○者其數為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 所以知此三數必為原式之
三箇整根

第一百四十五款

若可度末項之數甚多。不能盡試。則以法變其原式。使末項之可度數較少。此變式之根比原式之根較大。較小。能恒等于所設之式。

二式設有

八地 三二二〇。

則末項之數為三。可度之數為或正或負之一二四六。各數因

地四地

其數甚多。故須變其原式。法以 $\frac{1}{2}$ 代其地。則

$$\begin{aligned} \text{地} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} \text{地} &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \text{地} &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} &= \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \end{aligned}$$

故得 $\frac{1}{2}$ 代其末項

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

二之可度數為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ 以此諸數一一代其天而試之。試得 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$ 之兩數為 $\frac{1}{2}$ 式之兩箇整根。則其餘兩根易知其必為虛式。惟其兩虛式亦易求

得因

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{3840}$$

甲能以 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$ 兩箇乘數約之。所以能變為二次式

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{3840}$$

以常法解之。得

兩箇虛根式為

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{10}$$

惟因

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{10}$$

所以知原式之四箇根。其式為

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{3840}$$

$$\begin{aligned} \text{地} &= \frac{1}{2} \\ \text{地} &= \frac{1}{4} \\ \text{地} &= \frac{1}{6} \\ \text{地} &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

若設原式為

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙} \quad \text{天} = \text{丁}$

則依上法求之。其根為

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙}$

第一百四十六款

以可度末項之數屢試而得其根。此事甚繁。茲欲設一省事之法。令其可度之數有一最小之根。設有欲解之式為

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙} \quad \text{天} = \text{丁}$

則先令

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙}$

而變其式。則變式之根比原式之根減一。而其末

項為

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙} \quad \text{天} = \text{丁}$

別令

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙}$

而變其式。則變式之根比原式之根加一。而其末項為

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙} \quad \text{天} = \text{丁}$

則可見兩箇變式之末項

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙}$

與

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙}$

皆從

$\text{天} = \text{甲} \quad \text{天} = \text{乙} \quad \text{天} = \text{丙} \quad \text{天} = \text{丁}$

原式而生。惟天之各同數必在可度

未之諸數中。而地地之各同數。必在可度。
上及_下之諸數中。然未者乃_天時所

餘之項也。
上者乃_天所得之數也。
上者乃_天所得之數也。所以地天地之各同

數。必在可度。
_天所得之諸數中。其地天地之諸同數。能相與為遞加遞減

之級數。其公較數恒為一。又因_天亦俱在級數之列。故易見無論何次之
式。其理必通。所以有公法如左。

求實根之公法曰。取。及其遞加減一數之級數。或三級。或五級。或多級。如一。
一等類之數。一一代其原式中未知數之元。取其所得之數列為表。又取可度
各得數之諸數。亦橫列為表。乃于可度數中。擇其上下皆遞差一數者為級數。
亦齊其行列記于表末。則天之各同數。必在對_天之級數橫行中。如其級數為
加級。則其數為正。若為減級。則其數為負。

一式有則依法列表如下。

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

代	得	度	級
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

此表中之可度數。只能成一箇級數四三。

而其與相對之數為三因其級為遞減之級故其數當為負。試以三代其原式中之天則各項之數能相消適盡故知三必為其原式之一箇根。

若欲求其餘各根則將原式以三約之又將其約得之式依二次之常法

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

解之則又得兩根

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

級	
七〇	一 二 五 七
一二	二 三 四 六
一〇	三 四 三 五
二〇	四 五 二 四
一五	五 六 一 三

二式有

則依法列表如下

天 二 九 天 一 八 〇 二 〇

代	得	度									
二	七〇	一	二	五	七	一	〇	一	四	三	五
一	一四四	一	二	三	四	六	八	九	九	九	九
〇	一八〇	一	二	三	四	五	八	一	〇	一	六
一	一六〇	一	二	三	四	五	六	九	一	〇	〇
二	九〇	一	二	三	五	六	九	一	〇	〇	〇

則所得之四箇級數兩為加兩為減

其對○代天之四數當為三三四五以此四數一二代其原式中之天而試之則知此四數皆可為原式之根

第一百四十七款

若所設之各次式其倍數有為分數者則依一百十二款之法變之為他式令首項之倍數為一其餘各項俱為整數而後用前款之法求其變式之實根則原式之根易知

設有式如欲求其實根則先依一百十二款之法令

天 二 九 天 一 八 〇 二 〇

天 二 九 天 一 八 〇 二 〇

變其式如左

$$\begin{array}{c} \text{一六} \\ \text{三五六} \end{array} \begin{array}{c} \text{六} \\ \text{三五六} \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{六四} \\ \text{七地} \end{array} \begin{array}{c} \text{六四} \\ \text{七地} \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{六四} \\ \text{七地} \end{array} \begin{array}{c} \text{六四} \\ \text{七地} \end{array} = 0$$

化之得

以此式用前款之法求之則得其一根為

所以乃以

約原式得

此二次之式其根為虛式

第一百四十八款

設有各次式其首項之倍數為一其各項之倍數俱為整數而其各根不能在可度末項之諸數中求得則可知此式無論為正為方為雜方其根必不能以整數及整數之分數明之此例可以下法為證如吧為數根而可度吧吧兩數相乘之積則吧亦必能度吧吧二數中之任一數設吧不能度吧而吧大於吧則令

代吧度之次數而以吧為其度餘之數則得

所以

故可見吧若可

$$\begin{array}{c} \text{吧} \\ \text{吧} \end{array} = \begin{array}{c} \text{吧} \\ \text{吧} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{吧} \\ \text{吧} \end{array} = \begin{array}{c} \text{吧} \\ \text{吧} \end{array}$$

度亦必可度。因吃為吧度吃之餘數。則吃必小于吧。所以不能再以吧度。則轉令吃度吧。令其度得之次為半。而其度餘之數為吃。再以吃度吃。令其度得之次為半。而其度餘之數為吃。如是屢度之。則因吃為數根。故可知其末次之度餘數必為一。因其各分數為每次度餘之數。所以每次度得之數必後次少于前次。其式如左。

惟因

$$\begin{aligned} \text{吧} &= \frac{\text{半}}{\text{吃}} \text{吃} \\ \text{吧} &= \frac{\text{半}}{\text{吃}} \text{吃} \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} \text{吃} &= \frac{\text{半}}{\text{吃}} \text{吃} \\ \text{吃} &= \frac{\text{半}}{\text{吃}} \text{吃} \end{aligned}$$

所以得

$$\text{吃} = \frac{\text{半}}{\text{吃}} \text{吃}$$

又

$$\text{吧} = \frac{\text{吃}}{\text{吃}} = \frac{\text{吃}}{\text{吃}} \text{吃}$$

惟吃若能以吧度之。

則早已言與吃能以吧度之。所以從上之末式可見吃亦必能以吧度之。

再從以上各式得

$$\text{吃} = \frac{\text{半}}{\text{吃}} \text{吃}$$

所以

$$\text{吃} = \frac{\text{半}}{\text{吃}} \text{吃}$$

由此可知吃亦能以吧度之。如是推之。必見

此數屢次減小至末必為一所以可見末次之相乘數必得此數必能以度之此可為上例之證

第一百四十九款

依上款之例若數根本不能度亦不能度者則亦不能度相乘之設甲乙為再不能簡之分數則甲乙二數不能有公約數惟由上款之例若有任何數根非能為甲之約數則亦不能為甲即甲之約數又依同理若有任何數根非乙之約數則亦不能為乙即乙之約數故可見甲與乙無公約數則甲乙為再不能約之分數

所以凡分數之平方必仍為分數斷不能為整數反言之則平方數之根亦斷不能為分數所以凡整數若非正方數則其根不能以整數及分數明之

因有任何數根若非甲之約數則亦非甲之約數則亦必不能為甲即甲之約數則依此例凡任何數根非甲之約數則亦不能為甲之約數凡任何數根非乙之約數則亦不能為乙之約數所以甲乙若為不能再簡之分數則甲乙亦為不能再簡之分數所以任何分數之任何方亦為分數反言之則任何整數之任何根亦不能為分數所以任何整數之根不能以整數及分數明之者必為虛數即無盡之數

第一百五十款

設

$$\frac{\text{卯}}{\text{天}} \mid \frac{\text{辰}}{\text{吧}} \mid \frac{\text{巳}}{\text{天}} \mid \frac{\text{午}}{\text{天}} \mid \dots \mid \frac{\text{酉}}{\text{天}} \mid \text{戌} = 0$$

為任何次之式。其吧、午……俱為整數。則其根若非整數。亦不能為實在之分

數。若云其根亦可為實在之分數。設

$$\frac{\text{乙}}{\text{天}} = \frac{\text{甲}}{\text{天}}$$

為再不能簡之分數。則依法可變原

式為

$$\frac{\text{卯}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{辰}}{\text{吧}} \mid \frac{\text{巳}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{午}}{\text{甲}} \mid \dots \mid \frac{\text{酉}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{戌}}{\text{甲}} = 0$$

再化其諸項為同母之分數。得

$$\frac{\text{卯}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{辰}}{\text{吧}} \mid \frac{\text{巳}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{午}}{\text{甲}} \mid \dots \mid \frac{\text{酉}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{戌}}{\text{甲}} = 0$$

此式又可變之為

$$\frac{\text{卯}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{辰}}{\text{吧}} \mid \frac{\text{巳}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{午}}{\text{甲}} \mid \dots \mid \frac{\text{酉}}{\text{甲}} \mid \frac{\text{戌}}{\text{甲}} = 0$$

則此式

代數術卷
十六原款
下同

第一百五十一款

有總項其一項能以乙約之惟初設此題之意甲與乙無公約數所以依一百四十九款之例乙不能約甲則可見此式中之兩項彼此不能以當然之理相減所以其天之同數斷不能為分數
論求畧近之根數

若任何次式之根不能以實數整數及分數也明之者必用法求其與根畧近之任多位數如下二例

一例 以幾箇或整或分之實數遞代原式中之天至得式之號相反則可知其原式之中至少必有一箇根在此二數之間所以亦必為實根

如有式 $x^2 - 5x + 1 = 0$ 若將其正負項各聚于一邊則其式為 $x^2 - 5x = -1$ 若欲求其一根必先求一箇

$x^2 - 5x + 1 = 0$

$x^2 - 5x = -1$

數代其式中之天而能令

$x^2 - 5x + 1 = 0$

設代天之數自

起漸增而大則

$x^2 - 5x + 1 = 0$

與

$x^2 - 5x + 1 = 0$

亦必漸

增而大。惟其增大之遲速不同。觀下表自明。

代天之各數	天之各同數	天之各同數
〇	〇	一五
一	一	二〇
二	二	三五
三	三	四〇
四	四	四五
五	五	五〇
六	六	五五
...	...	六〇
...	...	六五
...	...	七〇
...	...	七五
...	...	八〇
...	...	八五
...	...	九〇
...	...	九五
...	...	...

觀右表。則知代天之數。自〇而增大。其數非過于三。則正項之同數恒小于

負項之同數。所以即其同數必為負。又知代天之數。非少于四。則正

項之同數不能小于負項之同數。所以代天之數。從三增至四之時。其之同

數。已從負號變至正號矣。

由此可見。天必有一箇一定之真同數。在三與四兩數之間。如能用其數以代

天則可令正負兩項之同數彼此相等而可相消盡所以此數必為原式之一箇根數

以上所證之理。無論何次方式。莫不如此。

第一百五十二款

二例 設 ϕ 為任何次式之最大負號之倍數。又從第二項起。每間一項。則反其正負號。又設 ψ 為其改號之後。所有之最大負號之倍數。則原式之各正根。必在 ϕ 與 ψ 之間。而其各負根。必在 ϕ 與 ψ 之間。

設其原式為 $\frac{a}{b}$ 此式可化之為

天巳天午天未天申二?

此式可化之為

天^四($\frac{\text{天}}{\text{巳}}$ $\frac{\text{天}}{\text{午}}$ $\frac{\text{天}}{\text{未}}$ $\frac{\text{天}}{\text{申}}$)=0.

則無論巳午未等各倍數為何數可見其天

之同數。必大至能令天巳_{天午}天未_{天未}各數任何小。所以其和數_{天午}能小于一。

天巳	天午	天未	天申
----	----	----	----

如此數小于一。則

$\begin{matrix} \text{天} & \text{天} & \text{天} & \text{天} \\ \text{申} & \text{未} & \text{午} & \text{巳} \end{matrix}$
即

為正數。而第一項天大于餘項之和。所以各正項

之和必亦大于各負項之和矣。

由此可見。如能有某數代其天。而能令為正數。則大于此數之數。亦必皆能

令原式為正數。所以此數必大于原式最大正號之根。

設令啣為最大負號之倍數。則可見原式中之天若大于即其原式之根。若

為正號。則必大于

$\begin{matrix} \text{天} & \text{天} & \text{天} & \text{天} \\ \text{申} & \text{未} & \text{午} & \text{巳} \end{matrix}$

所以天之同數。如以某數代某數。必能令天大

$\begin{matrix} \text{天} & \text{天} & \text{天} & \text{天} \\ \text{申} & \text{未} & \text{午} & \text{巳} \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{天} & \text{天} & \text{天} & \text{天} \\ \text{申} & \text{未} & \text{午} & \text{巳} \end{matrix}$