中西算学大成

中西算学大成

中西算學大成卷七十二

代數術十五

平三角數理

嘉善陳維祺纂

三角形邊角相求以代數之式馭之。恒用呷吆呐代其角。以甲乙丙代其對角之各邊。若直三角形則恒以呐代其正角。而以丙代其弦。茲將邊角相關之理詳釋於後。

第一款

凡直角三角形。銳角所對之邊。等于弦與本角正弦相乘之數。銳角所倚之邊等于弦與本角餘弦相乘之數。

如圖。呷吆呐直三角形。呐為正角。呷為銳角之一。又一銳角為吆。甲為所對之邊。乙為所倚之邊。丙邊為弦。因

$正弦呷 = \frac{丙}{甲}$

$餘弦呷 = \frac{丙}{乙}$

所以

$甲 = 丙正弦呷$

$乙 = 丙餘弦呷$

凡直三角形。銳角所對之邊。等于所倚之邊與本角正切相乘之數。銳角所倚之邊。等于本角餘切與對邊相乘之數。因

$正切呷 = \frac{乙}{甲}$

$餘切呷 = \frac{甲}{乙}$

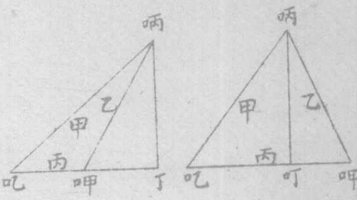
所以

$甲 = 乙正切呷$

$乙 = 甲餘切呷$

第二款

凡三角形各角正弦相比。如其對邊相比。



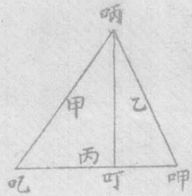
如圖呷吃呐為任何三角形。呷吃為其任兩角。因呷吃二角內至少必有一角為銳。則令其吃角恒為銳。乃從呐點作呐叮線與吃呷為垂線。或與吃呷引長之線為垂線。因呷角之或為銳或為鈍而異。　垂線若在三角形之內。則從其分得之兩箇直三角形。呷呐叮與吃呐叮。得 $\text{呐叮}=\text{乙正弦呷}$　$\text{呐叮}=\text{甲正弦吃}$　所以 $\text{乙正弦呷}=\text{甲正弦吃}$　則 $\frac{\text{正弦吃}}{\text{正弦呷}}=\frac{\text{乙}}{\text{甲}}$

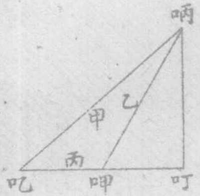
垂線若在三角形之外。因呐呷叮為呐呷吃之外角。則從其補出之直三角形呷呐叮。得 $\text{呐叮}=\text{乙正弦呐呷叮}=\text{乙正弦呐呷吃}=\text{乙正弦呷}$　又從其補成之吃呐叮直三角形。得 $\text{呐叮}=\text{甲正弦吃}$　所以鈍角形亦能得 $\text{乙正弦呷}=\text{甲正弦吃}$　則 $\frac{\text{正弦吃}}{\text{正弦呷}}=\frac{\text{乙}}{\text{甲}}$　若 $\text{呷}=九〇$　則依理當得 $\text{正弦吃}=\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$

第三款

凡三角形之任兩邊。各借其餘一邊所成角之餘弦相乘而并之。與餘一邊必等。

如圖。呷叱叮為任何三角形。呷哂與叱哂為其任兩邊。此兩邊中。至少必有一邊對銳角。如恒令呷哂邊所對之角為銳。則從哂點作哂叮線。與叱呷為垂線。或與叱呷引長之線為垂線。因叱哂邊所對之呷角或為銳或為鈍而異。垂線若在三角形之內。則從其分得之兩箇直三角形。呷哂叮與叱哂叮。





得

呷叮＝乙餘弦呷

叱叮＝甲餘弦叱

又因

呷叱＝叱叮丄呷叮

所以

丙＝甲餘弦叱丄乙餘弦呷

垂線若在三角形之外。因哂呷叮為哂呷叱之外角。則從其補出之呷哂叮直三角形。得

呷叮＝餘弦乙哂呷叮

＝丅餘弦乙哂呷叱

＝丅餘弦乙呷

又從其補成之叱哂叮直三角形。得

叱叮＝甲餘弦叱

因

叱呷＝叱叮丅呷叮

所以

丙＝甲餘弦叱
　　丄乙餘弦呷

若

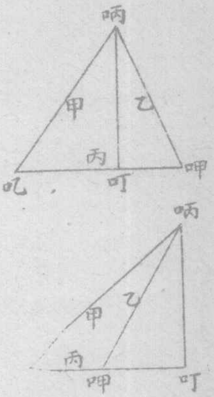
呷＝九〇。

則依理當得

丙＝甲餘弦叱

第四欵

凡三角形。任取一邊為本邊。其所對之角為本角。則本邊之平方。恒等于餘兩邊平方之和數內。減去本角餘弦與餘兩邊連乘積兩倍之數。



如圖。呷吃呐為任何三角形。因其呷吃兩角。至少必有一為銳角。令其銳角為吃。從呐點作呐叮線。與吃呷。或吃呷引長之線為垂線。因呷角之為銳為鈍。故其垂線。或在三角形之內。或在三角形之外。

若呷角為銳。則依幾何原本篇二第十三題得

$$\text{吃呐}^2=\text{呷呐}^2+\text{呷吃}^2-\text{二呷吃}\times\text{呷叮}$$

即

$$\text{甲}^2=\text{乙}^2+\text{丙}^2-\text{二丙}\times\text{呷叮}$$

又從呷呐叮直三角形。得

$$\text{呷叮}=\text{乙餘弦呷}$$

所以

$$\text{甲}^2=\text{乙}^2+\text{丙}^2-\text{二丙乙餘弦呷}$$

若呷為鈍角。則依幾何原本十二篇第十二題得式

$$\text{吃呐}^2=\text{呷呐}^2+\text{呷吃}^2+\text{二呷吃}\times\text{呷叮}$$

即

$$\text{甲}^2=\text{乙}^2+\text{丙}^2+\text{二丙}\times\text{呷叮}$$

又從呐呷叮直三角形得

$$\text{呷叮}=\text{乙餘弦呐呷叮}$$

$$=-\text{乙餘弦呐呷吃}$$

$$=-\text{乙餘弦呷}$$

因呐呷叮為呐呷吃

第九十四款九十五款併

外角故所以亦得

$甲^{二}=乙^{二}丄丙^{二}丅二乙丙餘弦呷$

若

$呷=九〇$

則依理當得

$甲^{二}=乙^{二}丄丙^{二}$

第五款

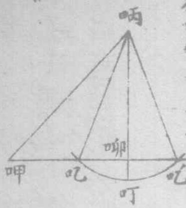
凡三角形邊角不相應者。其數為不能成三角形之數。共有三種。

一為所知之兩角。其和大于一百八十度。則不能成三角形。

二為所知之三邊中。有一邊大于他兩邊之和者。亦不能成三角形。

三為有兩邊。又有其兩邊內任一邊所對之角。而此角之正弦與角旁之邊相乘。大于其所對之邊者。亦不能成三角形。

以上第一第二種。所以不能成三角形之故。易從幾何原本之理知之。　其第三種所以不能成三角形之故。特解之如下。



如圖。于呷叿無定長之直線內。任取一點。如呷。作叿呷哂角等于所設之角。又作呷哂線。等于其角旁之一邊。作哂唧線。為呷叿之垂線。則哂唧線之長。必等于呷哂正弦呷所以不可大于其又一邊、

呐吃或呐吃。否則以呐為心。以 $\frac{呐}{叮}=\frac{呐}{吃}=\frac{呐}{吃'}$ 為半徑所成之平圓。不與呷吃線相遇。而不能成三角形矣。

以上諸理已明。又依第四款之理。作 餘弦吃　餘弦呐 之式。與 餘弦甲 之式相配。又從第二款得 $\frac{正弦吃}{正弦呷}=\frac{乙}{甲}$　$\frac{正弦吃}{正弦呐}=\frac{乙}{丙}$ 有此各式及 $呷+吃+呐=一八〇$ 之式。則可將三角內已知之三事。求其未知之三事。

第九十六款

第六款　解直三角形邊角相求之法

凡解直三角形。其正角恒為已知之一事。此外再知其二。即可求得其餘。惟所知之兩事中。至少必有一邊。所以其題祇有四種。

一為已知其對正角之邊與任一銳角。

二為已知其正角旁之任一邊與任一銳角。

三為已知其對正角之邊與正角旁之任一邊。

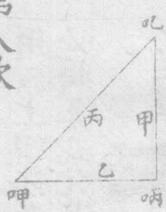
四為已知其正角旁之兩邊。

第九十七款

第七款

有對正角之邊。與任一銳角。求其餘三事。

如圖。呷吃呐為直三角形。已知其弦丙。又知其呷角。欲求其吃角與甲乙兩邊之數。



則先從 $吃=九〇-呷$ 得吃角。又因

$\frac{丙}{甲}=正弦呷$

$\frac{丙}{乙}=餘弦呷$

所以

$甲=丙正弦呷$

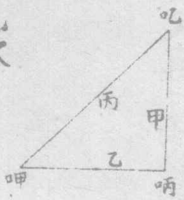
$乙=丙餘弦呷$

第九十八款

第八款

有正角旁之任一邊。與任一銳角。求其餘三事。

如圖。呷吃呐直三角形。已知其正角旁之甲邊。又知其對角呷。欲求其他角吃。他邊乙與丙。



則先從 $吃=九〇-呷$ 得吃角。又因

$\frac{丙}{甲}=正弦呷$

$\frac{乙}{甲}=正切呷$

所以

$丙=\frac{正弦呷}{甲}$

$乙=甲餘切呷$

第九十九款

第九款

有對正角之邊與正角旁之任一邊。求其餘三事。

如前圖。呷吃呐直三角形。已知其弦丙。又知其正角旁之甲邊。欲求其他邊乙。他兩角呷與吃。則先得 $乙^{二}=丙^{二}-甲^{二}$ 所以 $乙=\sqrt{丙^{二}-甲^{二}}$ 又得 $正弦呷=\frac{丙}{甲}$ 則吃角度為 $九〇-呷$

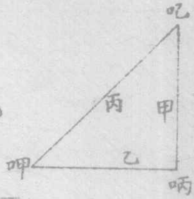
第一百款

第一百一款

若先從其角求起。則可從 乙＝丙餘弦呷 式而得其乙。

第十款

有正角旁之兩邊。求其餘三事。



如圖呷吃丙直三角形。已知其正角旁之甲乙兩邊。欲求其他邊丙。他兩角呷與吃。則先得 正切呷＝$\frac{乙}{甲}$ 故 吃＝九〇丅呷 又從 丙＝$\frac{正弦呷}{甲}$ 或 丙＝甲餘割呷 而得其丙。

又有一法。能從 丙＝$\sqrt{甲^{二}丄乙^{二}}$ 而得其丙。惟因 $甲^{二}丄乙^{二}$ 不能化為相乘之數。故不合于對數之用。不如從已得之呷角同數。而求其丙為最便也。

用以上四法。若其所求之角或為極小。或略近于正角。則不能得其真確之數。故必將其式化為他式。以免其弊。

其法視 正弦呷＝甲 餘弦呷＝甲 等類之式。其甲略等於一。而欲求其呷角者。則換下兩式求之。

上式本第八十五款
下式本第八十七款

$$\text{正弦}(\text{四五}^{\circ}\text{丅呷})=\sqrt{\frac{\text{二}}{\text{一丅餘弦}(\text{九}^{\circ}\text{丅呷})}}$$

$$=\sqrt{\frac{\text{二}}{\text{一丅正弦呷}}}=\sqrt{\frac{\text{二}}{\text{一丅甲}}}$$

$$\text{正弦}\frac{\text{二}}{\text{呷}}=\sqrt{\frac{\text{二}}{\text{一丅餘弦呷}}}=\sqrt{\frac{\text{二}}{\text{一丅甲}}}$$

其 $\text{正切呷}=\text{甲}$

式甲為大數。呷略近於九十度者。則改用下式

$$\text{正切}(\text{呷丅四五}^{\circ})=\frac{\text{正切呷丄一}}{\text{正切呷丅一}}$$

$$=\frac{\text{甲丄一}}{\text{甲丅一}}$$

第一百二款

求之方為密合。或用第十五欵之法定之亦密。

第十一欵 解銳鈍各角三角形

因三角形之六事中。必有三事已知。而其所知之三事中至少必有一為邊。所以此種三角形。其題亦祇有四種。

一為已知其任兩角及對所知任一角之邊。

二為已知其任兩邊及對所知任一邊之角。

三為已知其任兩邊及兩邊所夾之角。

四為已知其三邊。

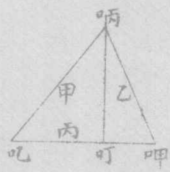
第一百三款

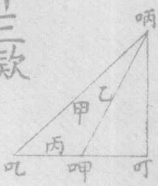
第十二欵

有兩角及對其所知任一角之邊。求其餘之一角兩邊。

第一百四款一百五款併

如圖。呷叱呥為任何三角形。已知其呷角及甲邊。又知其叱呥二角之任一角。欲求其他角及乙丙兩邊。將已知之兩角相加。以減一百八十度。即得其又一角。





乃從

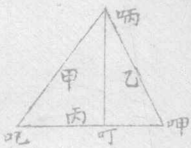
$$乙＝甲\frac{正弦呷}{正弦叱}$$

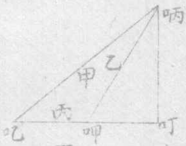
$$丙＝甲\frac{正弦呷}{正弦呥}$$

得其乙與丙。

第十三款

有兩邊及對其所知任一邊之角。求其餘之一邊兩角。





如圖。呷叱呥為任何三角形。已知甲乙兩邊。又知呷角。欲求叱呥二角及丙邊。則必從叱角求起。先得

$$正弦叱＝\frac{甲}{乙}正弦呷$$

乃得

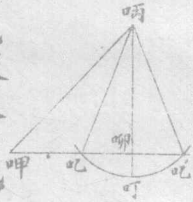
$$呥＝一八〇\top(呷\perp叱)$$

則

$$丙＝甲\frac{正弦呷}{正弦呥}$$

此題若所知之角為銳。而對角之邊小于角旁之邊者。則有兩箇三角形俱合題。

如圖。在呷叱無定長之直線內。任取呷點。作叱呷呥角。等于所設之銳角呷。又作

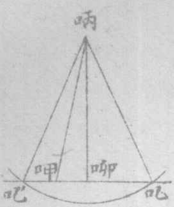


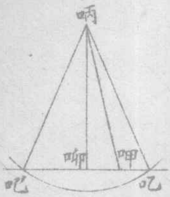
呷呐線等於所知之大邊乙乃以呐為心令半徑呐叮等於所知之小邊甲旋規作平圓界必與呷吃線相遇否則不能成三角形觀第九十四款若圓界與呷吃線相切于唧則祗能有一箇三角形合于所設之題即呷呐唧直三角形是也若圓界與呷吃線交于吃吃兩點則因對呷角之邊小於呐呷故必有兩箇三角形一為呷呐吃一為呷呐吃俱以呷角及甲乙兩邊為公用之數而其呷吃呐角與呷吃呐角彼此互視為外角此因呐吃吃角等于呐吃吃角之故

惟所知之角若為鈍角或雖為銳角而對角之邊能大于角旁之邊則圓界與呷唧線相交之兩點必在呷點兩邊祗能有一箇三角形與題合也

如圖圓界與呷吃線相交于吃吃二點則只有呐吃為對呐呷吃角之邊所以祗有呷吃呐三角形能合于所設之題因其呷吃呐三角形之呐呷吃角祗能為一八〇°丅呷而不能等于所設之呷角故也

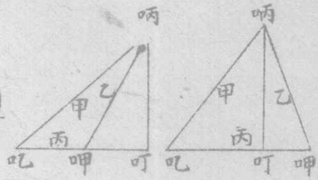
第十四款





有三角形之任兩邊。及此兩邊所夾之角。求其兩邊所對之角。及對所知角之邊。

如圖。呷吃呐為任何三角形。已知其甲乙兩邊及所夾之角呐。



欲求吃呷二角及丙邊。從

$$\frac{乙}{甲}=\frac{正弦吃}{正弦呷}$$

得

$$\frac{乙}{甲丄乙}=\frac{正弦吃}{正弦呷丄正弦吃}\quad ㈠$$

$$\frac{乙}{甲丅乙}=\frac{正弦吃}{正弦呷丅正弦吃}$$

所以

$$\frac{甲丅乙}{甲丄乙}=\frac{正弦呷丅正弦吃}{正弦呷丄正弦吃}$$

準八線之理。而

$$\frac{正弦呷丅正弦吃}{正弦呷丄正弦吃}=\frac{正切\frac{二}{一}(呷丅吃)}{正切\frac{二}{一}(呷丄吃)}$$

故

$$\frac{甲丅乙}{甲丄乙}=\frac{正切\frac{二}{一}(呷丅吃)}{正切\frac{二}{一}(呷丄吃)}$$

因

$$\frac{二}{一}(呷丄吃)=九^{〇}丅\frac{二}{呐}$$

所以得

$$正切\frac{二}{一}(呷丄吃)=餘切\frac{二}{呐}$$

$$正切\frac{二}{一}(呷丅吃)=\frac{甲丅乙}{甲丄乙}餘切\frac{二}{呐}$$

其 $\frac{二}{一}(呷丅吃)$ 及 $\frac{二}{一}(呷丄吃)$ 之同數已知。則可從

$$呷=\frac{二}{一}(呷丄吃)丄\frac{二}{一}(呷丅吃)$$

$$吃=\frac{二}{一}(呷丄吃)丅\frac{二}{一}(呷丅吃)$$

得呷與吃。其丙可從

$$丙=乙\frac{正弦吃}{正弦呐}$$

㈡式而得之。

若以㊀式約㊁式。得

$$\frac{甲丄乙}{丙}=\frac{正弦呷丄正弦吆}{正弦哂}$$

因

$$正弦哂=二正弦\frac{二}{哂}餘弦\frac{二}{哂}$$

$$正弦呷丄正弦吆=二正弦\frac{二}{(呷丄吆)}餘弦\frac{二}{(呷丅吆)}$$

$$=二餘弦\frac{二}{哂}餘弦\frac{二}{(呷丅吆)}$$

故可從

$$\frac{二}{(呷丄吆)}=九〇丅\frac{二}{哂}$$

得

$$丙=\frac{餘弦\frac{二}{(呷丅吆)}}{(甲丄乙)正弦\frac{二}{哂}}$$

㊂

㊁式之丙亦可從

$$丙^{二}=甲^{二}丄乙^{二}丅二甲乙餘弦哂$$

之式而得之。因

$$餘弦^{二}\frac{二}{哂}丄正弦^{二}\frac{二}{哂}=一$$

$$餘弦^{二}\frac{二}{哂}丅正弦^{二}\frac{二}{哂}=餘弦哂$$

故

$$丙^{二}=\left\{\begin{array}{l}(甲^{二}丄乙^{二})\left(餘弦^{二}\frac{二}{哂}丄正弦^{二}\frac{二}{哂}\right)\\ 丅二甲乙\left(餘弦^{二}\frac{二}{哂}丅正弦^{二}\frac{二}{哂}\right)\end{array}\right.$$

$$=(甲丄乙)^{二}正弦^{二}\frac{二}{哂}丄(甲丅乙)^{二}餘弦^{二}\frac{二}{哂}$$

$$=(甲丄乙)^{二}正弦^{二}\frac{二}{哂}\left[一丄\left(\frac{甲丄乙}{甲丅乙}餘切\frac{二}{哂}\right)^{二}\right]$$

因無論何數。必有某角之正切與之相等。故可用副角。令

$$正切牛=\frac{甲丄乙}{甲丅乙}餘切\frac{二}{哂}$$

而

$$丙=(甲丄乙)正弦\frac{二}{哂}\sqrt{一丄正切^{二}牛}$$

即

$$丙=\frac{餘弦牛}{(甲丄乙)正弦\frac{二}{哂}}$$

副牛角為

第一百十一款至一百十五款術

此式與前式所不同者。惟在外貌而已。如以 $\frac{\text{二}}{(\text{呷丅吃})}$ 代其牛則與㊂式無異。

若推算時已有甲乙二邊。但求呷吃二角之半較者。則另有簡法。

法令牛為 $\text{正切牛}=\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$ 式中之副角。則

$$\frac{\text{甲丄乙}}{\text{甲丅乙}}=\frac{\text{一丄}\frac{\text{甲}}{\text{乙}}}{\text{一丅}\frac{\text{甲}}{\text{乙}}}=\frac{\text{一丄正切牛}}{\text{一丅正切牛}}=\text{正切}(\text{四五丅牛})$$

所以

$$\text{正切}\frac{\text{二}}{(\text{呷丅吃})}=\text{正切}(\text{四五丅牛})\text{餘切}\frac{\text{二}}{\text{呐}}$$

從此式以求其 $\frac{\text{二}}{(\text{呷丅吃})}$ 比用他法求者。得式更簡。

第十五款

已有三角形之三邊。求其三角。

從第四款之 $\text{餘弦呷}=\frac{\text{二乙丙}}{\text{乙}^{\text{二}}\text{丄丙}^{\text{二}}\text{丅甲}^{\text{二}}}$ 式。可得其呷角。又從同類之式。可得吃呐二角。

又法從 $\text{二正弦}^{\text{二}}\frac{\text{二}}{\text{呷}}=\text{一丅餘弦呷}$ 式。以 餘弦呷 之同數代之。得

$$\text{二正弦}^{\text{二}}\frac{\text{二}}{\text{呷}}=\text{一丅}\frac{\text{二乙丙}}{\text{乙}^{\text{二}}\text{丄丙}^{\text{二}}\text{丅甲}^{\text{二}}}=\frac{\text{二乙丙}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{丅乙}^{\text{二}}\text{丅丙}^{\text{二}}\text{丄二乙丙}}=\frac{\text{二乙丙}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{丅}(\text{乙丅丙})^{\text{二}}}$$

$$=\frac{\text{二乙丙}}{(\text{甲丄乙丅丙})(\text{甲丅乙丄丙})}$$

由此得

$$\text{正弦}\frac{\text{二}}{\text{呷}}=\sqrt{\frac{\text{四乙丙}}{(\text{甲丄乙丅丙})(\text{甲丅乙丄丙})}}$$

此式更可變之

使簡。令 $甲丄乙丄丙＝二申$ 則 $甲丄乙丅丙＝二(申丅丙)$ $甲丅乙丄丙＝二(申丅乙)$ 所以 $正弦\frac{二}{呷}＝\sqrt{\frac{乙丙}{(申丅乙)(申丅丙)}}$ ㈠

又以同類之法。能得 $餘弦\frac{二}{呷}$ 與 $正切\frac{二}{呷}$ 簡易之式。因

$$二餘弦^{二}\frac{二}{呷}＝一丄餘弦呷＝一丄\frac{二乙丙}{乙^{二}丄丙^{二}丅甲^{二}}$$

$$＝\frac{二乙丙}{乙^{二}丄丙^{二}丄二乙丙丅甲^{二}}＝\frac{二乙丙}{(乙丄丙)^{二}丅甲^{二}}$$

$$＝\frac{二乙丙}{(甲丄乙丄丙)(乙丄丙丅甲)}＝\frac{二乙丙}{二申\times二(申丅甲)}$$

所以得 $餘弦\frac{二}{呷}＝\sqrt{\frac{乙丙}{申(申丅甲)}}$ ㈡ 以約

㈠式則得 $正切\frac{二}{呷}＝\sqrt{\frac{申(申丅甲)}{(申丅乙)(申丅丙)}}$ ㈢ 若將 $正弦\frac{二}{呷}$ 與 $餘弦\frac{二}{呷}$ 之同數。求其倍角之式。則得 $正弦呷＝\frac{乙丙}{二}\sqrt{申(申丅甲)(申丅乙)(申丅丙)}$ 從此式。可知 $\frac{甲}{正弦呷}$

等類之式。無論于甲乙丙三邊內。任以何邊為主俱可。即使其甲乙丙無論如何

更換。得數必同。所以從第二款之理。必得 $\frac{甲}{正弦呷}＝\frac{乙}{正弦吇}＝\frac{丙}{正弦哂}$