解析几何与线性代数

焦作矿业学院数学教研室

前　　言

随着现代科学技术、生产的迅速发展与电子计算机的广泛普及，日益增多的学科及实际问题要涉及到线性代数知识．线性代数基本上是讨论矩阵理论和同矩阵结合的有限维向量空间及其线性变换理论的一门学科．该学科中所体现的几何概念与代数方法之间联系，从具体概念抽象出来的公理化方法，以及严谨的逻辑推证、灵活巧妙的归纳综合等，对于强化人们的数学训练，增益科学智能都是非常有用的．

我们根据使用《线性代数》和《高等数学》（均由同济大学数学教研室主编）的体会，并结合有关同类教材，将解析几何（主要是空间解析几何）与线性代数结合在一起编写本教材，使能体现“数”与“形”的有机结合，便于更好理解线性代数中的一些抽象、本质的东西．这也是在教改中的一种探索．使用本教材约需54～56学时，第九章供对需用数学要求较高的专业选用．

教材中第一、二、四章由于霖泉、李洪昌、陈庭骥编写，第三、五、六章由邓继恩编写，第七、八、九章及附录1、2由毕小山编写．

本教材内容为向量代数、n阶行列式、n维向量组、矩阵、线性方程组、平面与直线、二次曲面、相似矩阵及二次型、线性空间及线性变换及两个附录．各章之末配有习题，书末附有习题答案．

编者的话

教材建设是教学改革的重要内容之一。探索出一条教材改革的新路：一方面，打破原有的教材模式，在体系上进行改革，在内容上进行更新，使教材具有系统性、科学性、先进性和应用性，符合时代的特征；一方面，能够密切结合本部门教学的实际情况，体现出自身的特点，这便是我们编写教材的基本出发点。

本书是在同济大学数学教研室主编的线性代数与高等数学中的矢量代数与空间解析几何部分的基础上，并参阅国内有关线性代数教材，经过认真分析和讨论，由焦作矿业学院数学教研室部分同志集体编写而成的。

本书内容与全国高校工科数学课程教学指导委员会制订的工科数学课程教学基本要求相一致。学时数解析几何部分为1～20学时，线性代数部分为32～36学时。可作为普通高等工业学校讲授解析几何与线性代数的教学用书或参考书，也可作为工程技术人员自学用书。参加本书编写的有陈庭骥、于霖泉、李洪昌、邓继恩、毕小山。陈庭骥对本书进行了全面审查，李洪昌对本书作了部分审查，陈庭骥为本书写了前言，李洪昌、于霖泉为本书写了编者的话，邓继恩、毕小山负责了本书的插图工作和校阅工作。

本书的编写和出版得到了我院教务处王怡录处长的热情支持与帮助，在此表示谢意。

由于时间的紧迫以及编者的水平所限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正，以期在教学实践的过程中进一步修订、完善、成熟。

编　者

1992年7月

目　录

第一章　向量代数

向量是由力学、物理学以及一些技术科学的需要而引入的数学概念，特别是由于电磁学、流体力学的发展，促使人们更加广泛深入的来研究向量的一般理论。向量是研究力学、物理学以及许多技术科学的重要数学工具之一，同时也是研究数学本身的许多问题的重要工具之一。本章研究向量的代数运算，即加法、减法及乘法的运算，所以叫“向量代数”，以区别于以后要研究的向量的分析运算[illegible]分、积分的运算。后者叫做“向量分析”。

§1　向量及其加法与减法

一、向量的概念

现实生活中会遇到两种量，一种是象温度、质量、密度、时间、功、能等等的量，这种量只由其度量系统所测得的数值来表示，叫做数量；另一种是象力、位移、速度、加速度等等的量，这种量不但有大小，还有方向。因为，大小相同而方向不同的两个力，分别作用在同样的两个物体上，所产生的效果是不一样的；又如两个物体以同样大小的速度而不同的方向运动时，结果所产生的位移也是不一样的。这种有大小又有方向的量叫做向量。

数量又叫标量；向量又叫矢量。

研究力、速度、加速度等等这种既有大小又有方向的量，在许多实际问题里是十分重要的，例如在设计一座桥梁时，需要分析与计算各种受力的情况，以保证桥梁的坚固、安全与尽可能的节省材料。又如在矿山工程力学等应用科技问题里，都用到向量理论。

数学中的向量理论，主要在于从许多物理事实总结、抽象出这种有大小有方向的量的一般规律和特性，以及研究它们的计算方法。这些都是有大小有方向的量的客观属性，所以，反过来又对有关实际起指导作用。但决定性的因素，仍然是实际问题本身的物质规律性，即事物本身的物理过程。

数量常用拉丁字母 a、b、c 等来表示，而向量可用记号 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 等来表示。

向量既然是有大小有方向的量，所以在几何上就可以用有向线段来表示（图 1．1）。这个有向线段的长度等于向量的大小，方向为向量的方向，A 为起点，B 为终点，这种表示法，使得向量更加直观了。

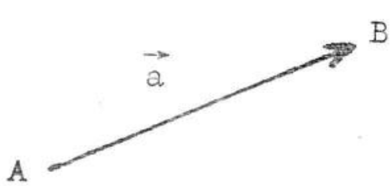

图　1．1

以 A 为起点，B 为终点的向量可记作 $\overrightarrow{AB}$，向量的大小叫做向量的模或长度，记作 $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$，模是数量。

模等于1 的向量叫做单位向量。

模等于0 的向量叫做零向量，记作$\vec{0}$，零向量的起点与终点重合，零向量的方向看作是任意的。

起点固定的向量称作固定向量，例如在谈到某一点的运动速度时，这速度是与所考虑的那一点的位置有关的，谈到位移时，也要提出是从哪一点开始的，所以速度、位移都属于固定向量。

起点可在向量所在直线上任意移动的向量，称作滑动向量，例如作用在一个刚体上的力就是滑动向量，它可以在刚体中力的作用线上任意移动而对刚体的效果是一样的。

由于一切向量的共性是它们都有大小与方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量。当遇到与起点有关的向量时，可以在一般原则下作特别处理。

自由向量的主要特征既然是大小和方向，所以，当两个向量的大小相等方向相同时，就称这两个向量是相等的。或者说这两个向量彼此几何相等。如图1。2中向量$\vec{a}$与$\vec{b}$彼此（几何）相等，记作 $\vec{a}=\vec{b}$

自由向量可以平行移动，相等向量的含义是经过平移后能完全重合。以后对相等的向量不加区别，而且可以平移到任一点，当研究几个向量时，总可以将它们的起点移到同一点。

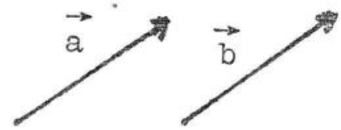

图 1.2

必须注意，不要把力与向量等同看待，因为力的作用点只能沿着力的作用线移动，而不能移向任意点。还应指出，大小的概念只适应于数量，不适用向量，只有向量的模才适应不等式。

为了用向量解决实际问题，我们要研究向量的运算，向量的运算，是从向量的物理意义总结抽象出来的。

二、向量的加法

从力学的实验我们得知，如果有两个力$\vec{f}_1$，$\vec{f}_2$作用在某物体的同一点上，那么，合力$\vec{F}$的方向是以$\vec{f}_1$，$\vec{f}_2$为两边的平行四边形的对角线方向，大小为对角线的长（图1。3），合力$\vec{F}$记作$\vec{f}_1+\vec{f}_2$。对于速度根据实验也有同样的结果。所以，一般我们就用这样的方法来规定两个向量的和。以上法则叫做求向量和的平行四边形法则。

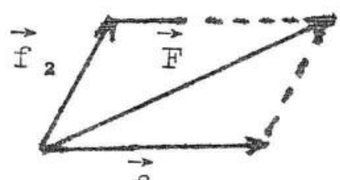

图 1。3

以上求两向量和可以用另外一种方式得到：把向量$\vec{b}$平行移动，使得$\vec{b}$的起点与$\vec{a}$的终点重合，那么这时从$\vec{a}$的起点到$\vec{b}$的终点的向量就是$\vec{a}+\vec{b}$。这个法则叫做求向量和的三角形法则。（图1。4）

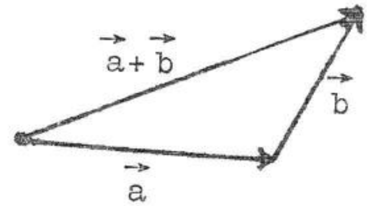

图 1。4

例 1　设四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形。

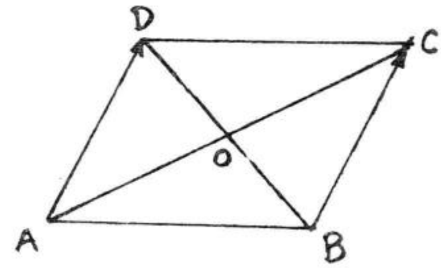

图　1.5

证：如图 1.5，按已知条件可得向量等式

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC} \qquad \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$$

由此可知，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$，于是得

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

即 AD 与 BC 平行且相等，亦即四边形 ABCD 是平行四边形。

向量的加法适合下列运算规律：

(1)　交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2)　结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

向量加法运算的这两个性质，可以由加法的法则直接得出（如图 1.6 及 1.7）。

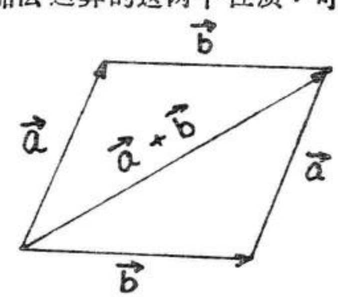

图　1.6

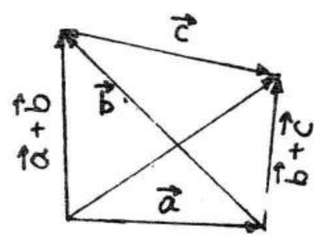

图　1.7

三、向量的减法

向量的减法作为对加法的逆运算来定义。就是说，记 $\vec{a}-\vec{b}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，是指这个差与向量 $\vec{b}$ 的和给出向量 $\vec{a}$。容易看出，

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

式中 $-\vec{b}$ 称为向量 $\vec{b}$ 的负向量，它是与 $\vec{b}$ 的模相等而方向相反的向量。有 $\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{0}$。

由加法法则，可以得到减法的相应法则：

平行四边形法则　以 $\vec{a}$ 及 $-\vec{b}$ 为邻边作平行四边形，则对角线所表示的向量就是 $\vec{a}-\vec{b}$（图 1.8）。

三角形法则　由 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点所成的向量就是 $\vec{a}-\vec{b}$（图 1.9）。

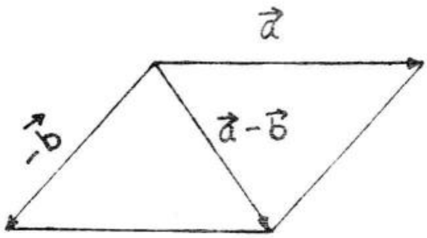

图 1.8

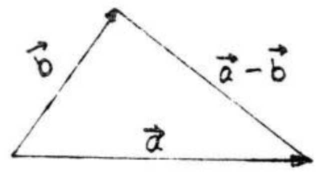

图 1.9

四、向量与数量的乘法

在实际中，如果力$\vec{F}$的大小$|\vec{F}|$是另一个力$\vec{f}$的大小$|\vec{f}|$的K倍，且方向与$\vec{f}$相同，那么，很自然地记$\vec{F}=K\vec{f}$　$(K>0)$　所以，我们规定向量与数量乘法法则如下：

设λ是一个数量，当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$是模为$\lambda|\vec{a}|$，且方向与$\vec{a}$相同的向量；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$是模为$|\lambda|\,|\vec{a}|$，且方向与$\vec{a}$相反的向量。当$\lambda=0$或$\vec{a}=\vec{0}$时，认为$\lambda\vec{a}=\vec{0}$。

前面规定的负向量的概念是符合这个定义的。

向量与数量的乘积，适合下列运算规律：

(1)　结合律　$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

这是因为由向量与数的乘积的规定可知，向量$\lambda(\mu\vec{a})$、$\mu(\lambda\vec{a})$、$(\lambda\mu)\vec{a}$都是平行的向量，它们的指向也是相同的，而且

$$|\lambda(\mu\vec{a})|=|\mu(\lambda\vec{a})|=|(\lambda\mu)\vec{a}|=|\lambda\mu|\,|\vec{a}|$$

所以

$$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$$

(2)　分配律　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明，这里从略了。

根据向量与数的乘积的规定，可以推出下面的结论：如果两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，λ为数，那么向量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行；反之，如果两向量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，且$\vec{a}\neq\vec{0}$，那么$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，其中λ为数。

前面已经讲过，模等于1的向量叫做单位向量。设$\vec{a}^{\,0}$表示与非零向量$\vec{a}$同方向的单位向量，那么，按照向量与数的乘积的规定，由于$|\vec{a}|>0$，所以$|\vec{a}|\vec{a}^{\,0}$与$\vec{a}^{\,0}$的方向相同，即$|\vec{a}|\vec{a}^{\,0}$与$\vec{a}$方向相同。又因$|\vec{a}|\vec{a}^{\,0}$的模是

$$|\vec{a}|\,|\vec{a}^0| = |\vec{a}|\cdot 1 = |\vec{a}|$$

即 $|\vec{a}|\vec{a}^0$ 与 $\vec{a}$ 的模也相同・因此

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0$$

我们规定，当 $\lambda \neq 0$ 时，$\frac{\vec{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\vec{a}$・由此，上式又可写成

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量・

例 1　证明，可作一个三角形，各边平行且等于已知三角形的中线・

解：设 AA_1、BB_1、CC_1 是已知 ΔABC 的中线（图 1.10）。则有

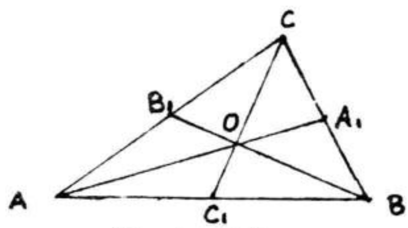

图 1.10

$$\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \qquad \text{同样有}$$

$$\overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \qquad \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

由此：

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

则
$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{3}{2}\vec{0}$$

$$= \vec{0}$$

可见，向量 $\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{BB_1}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 可以构成三角形・

只靠以上的向量的几何运算来解决实际问题是远远不够的。比如，我们遇到有好几个向量，要根据以上的运算法则来求他们的和与差，那么图形变得相当复杂且难于辨认。这里，我们遇到了向量计算的理论与实际需要之间的矛盾。不解决这个问题，向量的理论就很难用来解决实际问题。我们知道，即使是为数很多的数量，要对他们进行运算也是不难的。所以，为了解决实际需要，就要把向量和数量建立联系，使得用数量既能表示向量的大小又能通过向量所对应的数量运算来表示向量的运算。这种方法是从十八世纪，人们解决力学中力的计算问题，把力分解为几个已给方向的分力的和而逐渐形成起来的。

向量的几何意义是从有向线段，有向线段是有起点和终点的，所以，首先建立空间的点和数的对应关系，然后再来建立向量与数的对应关系。向量发展的历史告诉我们，只要引入了坐标法，把数与形结合起来，向量才有很大应用。

§2　空间直角坐标系

适应各种实际问题的需要，空间的坐标有许多的建立方法，其中常用的是直角坐标。我们仿照平面直角坐标来建立空间的直角坐标。

一、空间点的直角坐标

从某一参考点O作三条两两互相垂直的有向直线ox，oy，oz。习惯上常常使它们的方向按右手规则来确定。所谓右手规则，就是把右手的拇指、食指、中指作成互相垂直的形状，那么，如果取拇指为ox的正方向，食指为oy的正方向，则中指就是oz的正方向（图1.11），参考点o叫做坐标原点，这三条有向直线叫坐标轴，分别叫做x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴（竖轴），并且通常把x轴与y轴配置在水平面上，而z轴则是铅垂线。三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面，它们分别为xoy面、yoz面及zox面。三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限。含x轴、y轴与z轴正半轴的那个卦限为第一卦限，其它第二、第三、第四卦限在xoy面的上方，按逆时针方向确定。第五至第八卦限在xoy面的下方，由第一卦限之下方的第五卦限按逆时针方向确定六、七、八卦限。

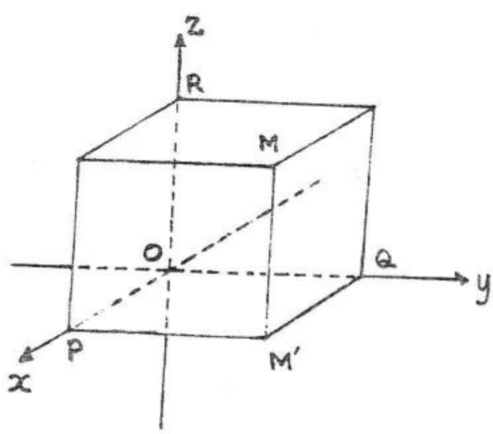

图　1.11

通常在三个坐标轴上取相同的长度单位。为了用数来确定点的位置，我们过空间任意一点M，分别作垂直于ox，oy，oz的三个平面，这三个平面与三个坐标轴分别交于三点P，Q，R（图1.11）。P点在x轴上的坐标是这样的一个数，当P点在ox

的正半轴时，$x=|OP|$，当P点在ox的负半轴时，$x=-|OP|$，同样可以得到Q点在y轴上的坐标y，R点在oz轴上的坐标z。

由这种作法，可以知道，空间任一点对应这样有次序的三个数（x，y，z）；反之，任意有次序的三个数（x，y，z），必对应空间一个点。这样得到的三个数，叫做点M的直角坐标。

点与坐标是一一对应的，所以，我们可以用三个数（坐标）的代数性质来说明点的几何性质；反过来，也可以用点的几何性质来说明三个数（坐标）的代数性质。这样就建立了几何的对象点与代数的对象数（坐标）之间的联系，把形与数结合和统一起来了。

坐标为（x，x，z）的点M，通常记为M（x，y，z）。而坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征。例如：当点M在yoz面上时，则$x=0$，换句话说，$x=0$表达的就是yoz坐标面。同样，在zox面上的点，$y=0$；在xoy面上的点，$z=0$。如果点M在x轴上，则$y=z=0$；换句话说，$y=0$，$z=0$，表达的是x轴；同样，在y轴上的点，$z=x=0$；在z轴上的点，$x=y=0$。如果M为坐标原点，则$x=y=z=0$，换句话说，$x=0$，$y=0$，$z=0$表达的是原点O。

二、空间两点间的距离

问题1　求原点O（0，0，0）与点M（x，y，z）连线的距离。

从M点作xoy平面的垂线，交xoy平面于M′点，由图1.11：$\Delta OM'M$及$\Delta OPM'$都是直角三角形，所以有

$$|OM|^2=|OM'|^2+|M'M|^2$$

但

$$|OM'|^2=|OP|^2+|PM'|^2$$

即

$$\begin{aligned}|OM|^2&=|OP|^2+|PM'|^2+|M'M|^2\\&=|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2\\&=x^2+y^2+z^2\end{aligned}$$

故，原点O与点M连线的距离

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

问题2　求空间两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$连线的距离d。

与问题1类似，可得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式。

§3　向量的投影表达式与向量的坐标

向量是由它的模与方向确定的，在坐标系里，怎样表示向量的方向呢？

一、向量的方向角

向量平行移动，方向不变，为了在给定的坐标系里表示出向量$\vec{a}$的方向，我们把$\vec{a}$平行移动，使得$\vec{a}$的起点与原点o重合，这样，向量$\vec{a}$的方向就可以用$\vec{a}$的正方向分别与ox，oy，oz三个坐标轴的正方向的三个夹角α，β，γ来表示，为了这些角唯一起见，规定

$0\leq\alpha\leq\pi$，$0\leq\beta\leq\pi$，

$0\leq\gamma\leq\pi$．

α，β，γ叫做向量$\vec{a}$的方向角（图1.12）

如果给出了向量的方向角，那么，向量$\vec{a}$的方向就完全确定了·

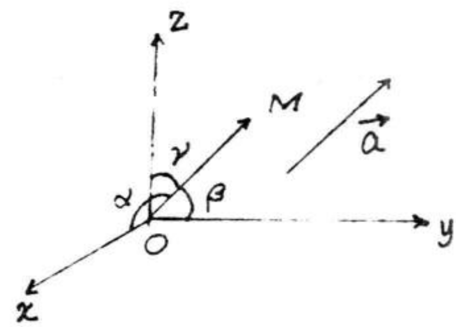

图 1.12

二、向量的投影表达式及向量的坐标

设已知向量$\vec{a}$，即已知$|\vec{a}|$及$\vec{a}$的方向角α，β，γ·由图1.12可知，起点在原点o的向量$\vec{a}$的终点M的坐标为：

$$x=|\vec{a}|\cos\alpha$$

$$y=|\vec{a}|\cos\beta$$

$$z=|\vec{a}|\cos\gamma$$

并且向量$\vec{a}$由终点M的坐标完全确定·

参看图1.13，可以得出以下关系：

$$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

为了建立起点在原点的向量与终点的坐标之间的联系，我们在ox轴，oy轴，oz轴正方向上分别作三个单位向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，称为基本单位向量·

那么图1.13可知：

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}\quad\overrightarrow{OQ}=y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OR}=z\vec{k}$$

于是起点在原点的向量$\vec{a}$可以用终点M的坐标表示为

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

如果$\vec{a}$的起点不在原点，设$\vec{a}=$

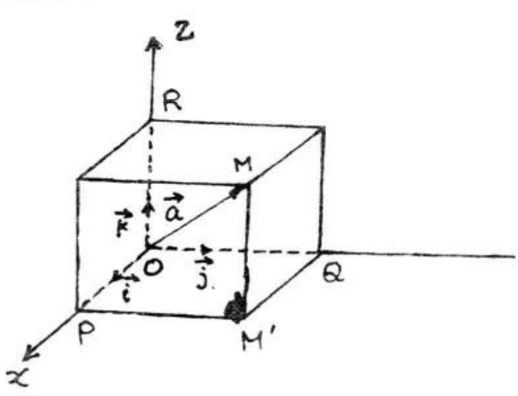

图 1.13

$\overrightarrow{M_1M_2}$，它是以$M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量·过点M_1、M_2各作垂直于三个坐标轴的平面，这六个平面围成一个以线段M_1M_2为对角线的长方体·从图1。14可以看出：

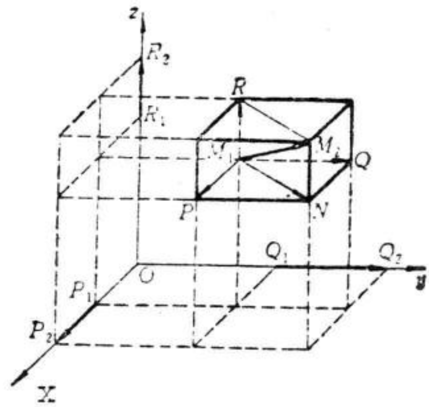

图　1。14

$$\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{M_1N}$$

$$\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{M_1M_2}$$

从而得到

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}$$

但是，$\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{Q_1Q_2}$，$\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{R_1R_2}$，所以，$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2}$·式中右端的向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{Q_1Q_2}$，$\overrightarrow{R_1R_2}$分别称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在x轴，y轴，z轴上的分向量，并且

$$\overrightarrow{P_1P_2}=a_x\vec{i}=(x_2-x_1)\vec{i}$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=a_y\vec{j}=(y_2-y_1)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{R_1R_2}=a_z\vec{k}=(z_2-z_1)\vec{k}$$

其中　$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha$，$a_y=|\vec{a}|\cos\beta$，$a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$，分别为向量$\vec{a}$在x轴，y轴，z轴上的投影，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$叫做向量$\vec{a}$的方向余弦·于是得到

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

这个公式叫做向量$\vec{a}$的投影表达式，或向量$\vec{a}$按基本单位向量$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$的分解式·

向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影a_x，a_y，a_z叫做向量$\vec{a}$的坐标，并把表达式

$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$$

称为向量$\vec{a}$的坐标表示式。

这里要注意，向量在坐标轴上的分向量与向量在坐标轴上的投影（即向量的坐标）有本质的区别，向量$\vec{a}$在坐标轴上的投影是三个数a_x，a_y，a_z，而向量$\vec{a}$在坐标轴上的分向量是三个向量$a_x\vec{i}$，$a_y\vec{j}$，$a_z\vec{k}$。

上面的讨论表明，起点为$M_1(x_1, y_1, z_1)$而终点为$M_2(x_2, y_2, z_2)$的向量为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$$

特别，点$M(x, y, z)$对于原点o的向径为

$$\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$$

起点为原点O，而终点为空间任意点M的固定向量$\overrightarrow{OM}$称为向径，常记作$\vec{r}$，即$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$向径是专用来确定空间点的位置的。

三、向量模及方向余弦的坐标表示式

向量的投影表达式或坐标表示式建立了向量$\vec{a}$与三个数a_x，a_y，a_z的对应关系，把向量与数量统一起来，这就使得我们可以通过三个数a_x，a_y，a_z的代数性质，来说明向量$\vec{a}$的几何与力学性质；反过来，可以通过向量$\vec{a}$的几何与力学性质，说明三个数a_x，a_y，a_z的代数性质。所以，投影表达式对于向量所起的作用，就好象坐标对于点所起的作用一样。

参看图1.14，对向量$\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，有

$$a_x=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\vec{a}|\cos\alpha$$

$$a_y=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\vec{a}|\cos\beta$$

$$a_z=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\vec{a}|\cos\gamma$$

而且向量$\vec{a}$的模为

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{|M_1P|^2+|M_1Q|^2+M_1R|^2}$$

因　$M_1P=a_x$，$M_1Q=a_y$，$M_1R=a_z$，故

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

这个公式是用三个数a_x，a_y，a_z的代数运算结果表达了向量的大小，即向量的模，而不再以所谓几何长度来表示出向量的大小了。

同时容易得到，当$\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$时，有

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

这些是用向量的坐标表示向量的方向余弦的公式·由上面的公式可以得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

这表明一个向量的三个方向角不是独立的，必须适合方向余弦的平方和等于1这个条件·

又 $$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{|\vec{a}|}\{a_x, a_y, a_z\}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

即 $$\vec{a}_0=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$$

这便是与非零向量$\vec{a}$同方向的单位向量·

最后给出有关向量投影表达式的两个基本问题：设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$·

则（1） $$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}$$

即 $$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\}$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只须对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了·

(2) 两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$平行的充分且必要条件是$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，利用坐标，则有 $a_x=\lambda b_x$，

$a_y=\lambda b_y$，$a_z=\lambda b_z$，消去λ得到

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

即两向量平行的充要条件是其坐标互相成比例．

四、计算、应用举例

例1　设$A(x_1, y_1, z_1)$和$B(x_2, y_2, z_2)$为两已知点，而在直线AB上的点M划分有向线段$\overrightarrow{AB}$为两个有向线段$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{MB}$，使它们的值的比等于某数λ（$\lambda\neq-1$），即

$$\frac{AM}{MB}=\lambda$$

求分点M的坐标x，y及z．

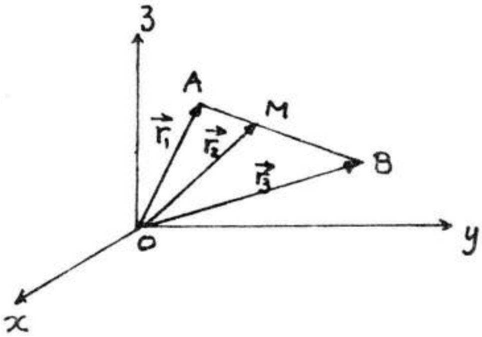

图1．15

解法1　如图1．15，因为$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{MB}$在一条直线上，依题意有

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$$

而

$$\overrightarrow{AM}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$$

$$\overrightarrow{MB}=\{x_2-x, y_2-y, z_2-z\}$$

因此有　$\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}=\lambda\{x_2-x, y_2-y, z_2-z\}$

即　$x-x_1=\lambda(x_2-x)$，$y-y_1=\lambda(y_2-y)$，$z-z_1=\lambda(z_2-z)$

于是得到

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

解法2　由$\frac{AM}{MB}=\lambda=\frac{\lambda}{1}$，则$\frac{AM}{AM+MB}=\frac{\lambda}{\lambda+1}$，即$\frac{AM}{AB}=\frac{\lambda}{\lambda+1}$

或　$AM=\frac{\lambda}{\lambda+1}AB$，又因$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AB}$方向相同，于是$\overrightarrow{AM}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$．

又点A的向径$\vec{r}_1=\overrightarrow{OA}=\{x_1, y_1, z_1\}$，点B的向径$r_2=\overrightarrow{OB}=\{x_2, y_2, z_2\}$，点M的向径$\vec{r}=\{x, y, z\}$，如图1．15．

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$$