信号分析实验指示书

清华大学精密仪器与测试技术教研组

1994年4月

信号分析实验指示书

实验一　信号及其频谱

一、实验目的：通过实验使学生：

1、加深理解"频谱"的概念以及信号的时、频域转换的方法和意义。

2、认识和观察几种常用信号的频谱。

3、初步了解"7T08"信号处理机的基本功能。

二、实验原理：

满足一定条件的时域连续信号X（t）与其频谱函数X（jω）是由其付氏变换公式联系着。

1、对周期信号用付氏级数表示：

即 $$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

其中：

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos n\omega_0 t\,dt \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin n\omega_0 t\,dt \end{cases}$$

或者：$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

其中：$$a_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

2、对非周期函数用其付氏积分公式表示：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \rightleftharpoons x(j\omega)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

付氏变换（FT）是一个一般的表达式，付氏级数只是它的一个特例，因为任何周期信号都可用一个周期的波形通过以时间间隔为T_0（一是周期信号的周期）的无穷脉冲序列的卷积而得到。而a_n的就等于这单个周期所表征的函数的频谱在（$n\frac{1}{T_0}$）处的数值（仅差一个系数$\frac{1}{T_0}$）。

由于计算机不能对上述积分进行连续计算，因此先离散采样然后再进行计算。对应于连续信号x（t）采样后得到的离散序列x（n）（周周期的且仅取有限长）则它的频谱函数由其离散付氏变换公式（DFT）所联系着。即：

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}X(k)W_N^{nk} \qquad 其中：W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$x(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} \qquad N——采样点数$$

理论分析表明：只要对x（t）的采样频率f_s足够高（$f_s>2f_c$——为信号中的最高频率）采样的时间足够长，计算机所获得的x（n）的频谱x（k）完全可以按予定要求的精度去逼近x（t）的频谱X（jω）。

三、实验内容：

演示下列信号的频谱：

(1) 正弦波：$x(t)=X_0\sin\omega_0 t$ 如图〔1〕

(2) 复合正波叠加波：$x(t)=\sum_{i=1}^{N}X_i\sin\omega_i t$ 如图〔 〕

(3) 方波：$x(t)=\begin{cases}A & 0<t<\frac{T}{2}\\ -A & -\frac{T}{2}<t<0\end{cases}$ 如图〔2〕

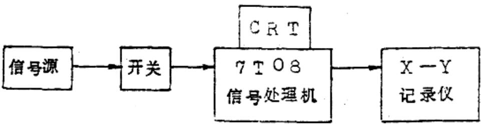
(4) 三角波：$x(t)=\begin{cases} -A-\dfrac{2A}{T}t & -\dfrac{T}{2}<t<\dfrac{T}{4} \\ -\dfrac{2A}{T} & -\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{T}{4} \\ A=\dfrac{2A}{T}t & \end{cases}$　　如图〔，〕

(5) 锯齿波：$x(t)=\dfrac{2A}{T}t$　　$-\dfrac{T}{2}<t<\dfrac{T}{2}$　　如图〔3〕

(6) 随机信号：$x_w(t)$　　如图〔　〕

(7) 随机信号＋正弦信号：$x_w(t)+X_0\sin\omega_0 t$　　如图〔　〕

步骤：(1) 系统联接：



(2) 程序名称：功率谱28#（E—5）；

程序步数：7275

(3) 旋钮设置：略。

四、予习思考题：

(1) 概述FT和DFT的差别和关系。

(2) 频谱密度和自功率谱密度的单位各是什么？

(3) 试分析由IDFT得到的时域函数与原函数误差的原因。

实验二　频率响应函数与相干函数

一、实验目的：

(1) 加强学生对线性时不变系统频率响应函数概念的理解。

(2) 加强相干函数概念的理解，以及相干函数在研究线性时不变系统传递函数（或频率响应函数）中的作用。

二、实验原理：

对于线性时不变系统H(S)，如果输入信号为x(t)，得到的输出信号为y(t)则该系统在不受干扰的情况下，其频率响应函数。

$$H(j\omega)=Y(j\omega)/X(j\omega)$$

其中：$Y(j\omega)$——输出的单边付氏变换。

$X(j\omega)$——输入的单边付氏变换。

依上面的公式，不难推出如下的两个等效的定义式：

$$|H(j\omega)|=\sqrt{S_y(\omega)/S_x(\omega)}$$

$$H(j\omega)=\sqrt{S_{xy}(j\omega)/S_x(\omega)}$$

其中：$S_x(\omega)$——x(t)的自功率谱密度函数

$S_y(\omega)$——y(t)的自功率谱密度函数

$S_{xy}(j\omega)$——x(t)和y(t)的互谱密度函数。

x(t)和y(t)的相干函数定义为：

$$\gamma^2_{xy}(\omega)=|S_{xy}(j\omega)|^2/S_x(\omega)\cdot S_y(\omega)$$

显然 $0\leqslant\gamma^2_{xy}(\omega)\leqslant1$

对任何线性时不变系统由输入(激励)和输出(响应)关系所得到的该系统的频率响应函数(或传递函数)都必须由相干函数来验证。

当相干函数$\gamma^2_{xy}(\omega)=0$时，y(t)和x(t)毫不相干，此时所得到的频率响应函数H(jω)毫无意义。

当相干函数$0<\gamma^2_{xy}(\omega)<1$时，y(t)与x(t)有某种程度上的相干，相干程度取决于$\gamma^2_{xy}(\omega)$的值。此时所得到的频率响应函数H(jω)的可信程度随相干函数$\gamma^2_{xy}(\omega)$的增大而增大。如图[5]

三、实验方法

1、给7T08信号处理机的第一通道1CH输入一个方波信号x(t)——用以模拟系统的激励。给其第二通道2CH输入一个正弦信号——y(t)——用以模拟系统的响应。(此时被模拟的系统相当于一个低滤波器)

2、当x(t)和y(t)同频时，求出系统的频率响应函数H(jω)即在7T08机的CRT上可得到H(jω)的波得图(Bode F,gure)

当$x(t)$和$y(t)$不同频时，同样得到系统的频响$H(j\omega)$。

3、求$x(t)$和$y(t)$的相干函数$\nu^2_{xy}(\omega)$，寻找出在$\nu^2_{xy}(\omega)\neq 0$所对应的频率下的$H(j\omega)$的值，并以此来修正和确定有参考价值的$H(j\omega)$。并依相干函数$\nu^2_{xy}(\omega)$的值来确定$H(j\omega)$的可信度。

四、予习思考题

(1) 相干函数$\nu^2_{xy}(\omega)$说明了什么样的物理实质？

(2) 为什么线性时不变系统的频率响应函数必须由$\nu^2_{xy}(\omega)$去验证？相干函数$\nu^2_{xy}(\omega)$介于零和1之间说明什么样的物理现象。

实验三　相关函数

一、实验目的：通过实验

1、加强对“相关”概念物理含义的理解。

2、加深了解自相关函数和互相关函数的特征和性质。

3、加深了解自相关函数和自谱密度函数之间的关系。

二、实验原理：

相关函数的定义：$R_{xy}(\tau)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$

当$x(t)=y(t)$时，记为$R_{xx}(\tau)=\lim\limits_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$称为自相关函数。

计算机只能进行离散计算，而离散相关函数的定义式为：

自相关函数：$R_{xx}(r)=\frac{1}{N-r}\sum\limits_{n=1}^{N-r}x(n)x(n+r)$

互相关函数：$R_{xy}(r)=\frac{1}{N-r}\sum\limits_{n=1}^{N-r}x(n)y(n+r)$

n——时间序列变量

r——延迟序列变量

相关程度一般用相关系数来表征：

$$互相关系数：\rho_{xy}=\frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_{xx}(0)\ R_{yy}(0)}}$$

$$自相关系数：\rho_{xx}=\frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)}$$

显然：$|\rho_{xy}|\leqslant 1$

$|\rho_{xx}|\leqslant 1$

ρ_{xy} 和 ρ_{xx} 可称为幅值归一化后的互相关函数和自相关函数。

三、实验内容和步骤

1、内容

(1) 自相关函数的性质及特征

① 正弦波自相关　　如图〔6〕

② 方波自相关　　如图〔　〕

③ 随机信号自相关　如图〔7〕

④ 随机信号+正弦信号的自相关　　如图〔　〕

从上述图形中观察：

① 自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 的奇偶性和极大值取处。

② 周期函数自相关函数的频率和原信号频率的关系。

③ 随机信号的自相关函数在 $\tau\to\infty$ 时 $R_{xx}(\tau)$ 的取值如何？

④ 从方波自相关函数来看相关函数和功率谱的关系。

(2) 互相关函数的性质和特征：

① 正弦信号互相关：ⅰ）两正弦同频、有相差。如图〔8〕

ⅱ）两正弦不同频；

ⅲ）两正弦正交，〔即正余弦相关〕

② 正弦信号与同频方波互相关。〔有相差〕

③ 正弦信号与叠加有与其同频正弦的随机信号互相关。

从上面的图形中观察：

① 互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 的奇偶性和极大值取处。

② 互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 的初相角与原函数之间相位差的关系。

③ 从方波和正弦波的互相关函数看“相关”的实质。

④ 从正弦信号与叠加有同频正弦的随机信号互相关来看相关滤波的原理。

2、操作

(1) 系统联接：如实验一

(2) 程序名称：相关函数（Correlation N100A）

程序步数：1153

实验四　采样与频混、截断与泄漏

一、实验目的：

通过实验使学生加深对信号数字处理中所特有的现象“频率混叠”和“泄漏”的物理概念的理解，并能对如何消除频率混频和减少泄漏的方法和措施有所了解。

二、实验原理：

为了实现信号的数字化处理，必须对模拟信号进行采样和截断。这些处理都可能给数字处理带来误差。这里仅以正弦和方波为例来观察，分析频混和泄漏的现象。

对非限带信号方波，无论取怎样高的有限采样频率、则频率混迭总是产生。但提高采样频率可减少频混的误差。

对限带信号——正弦信号截断后将使一个频域的δ（f）谱变成一个SinC函数的谱。从而引起泄漏。但加长窗函数和采用更合适形式的窗将使泄漏效应减少。

三、实验内容和步骤：

1、内容：观察混迭效应——观察方波信号取不同的截断长度T。得到不同形状的频谱函数。在相同的采样频率下，截取长度T。相同，采用Hanming窗，将能产生不同的泄漏情况。

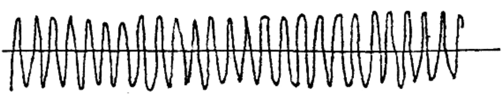
2、步骤：同实验一。

四、予习、思考题：

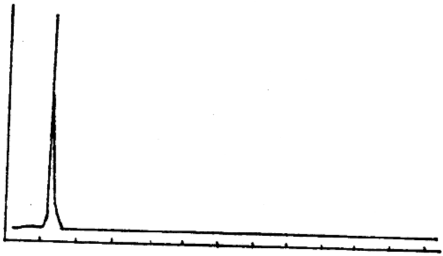
(1) 何谓加窗处理？加窗（指不同形式的窗）的目的何在？

(2) 为防止混迭，在采样时如何选择采样间隔。

(3) 如何能减少泄漏效应对频谱的影响。



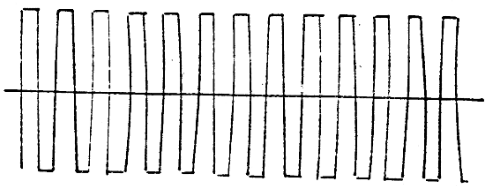
正弦信号



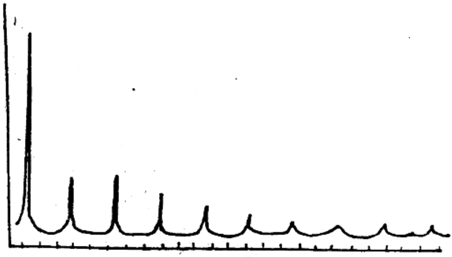
正弦信号频谱

正弦信号频谱的逆变换

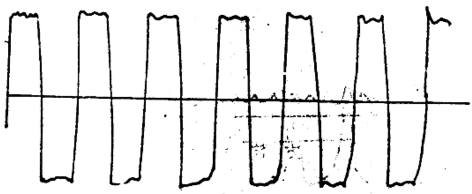
图 1



方 波 信 号

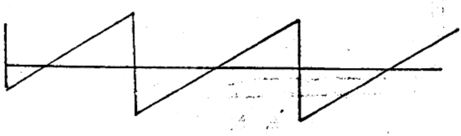


方 波 频 谱

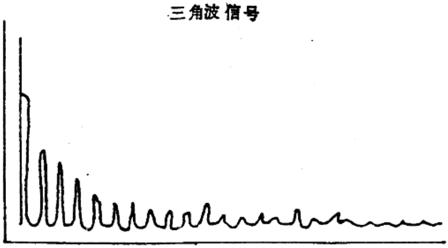


方波频谱的逆变换

图　2



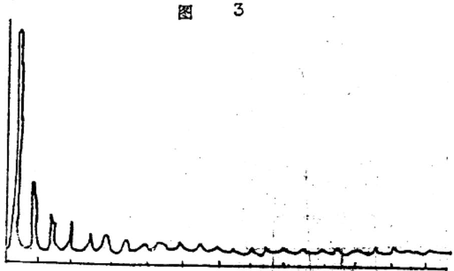
三角波信号



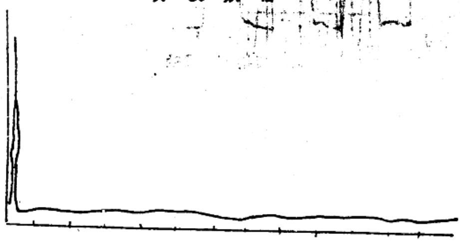
锯齿波频谱

锯齿波频谱逆变换

图　3



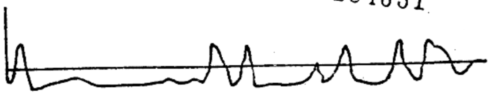
方　波　频　谱



正　弦　波　频　谱

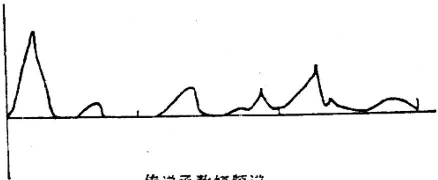
正　谱　幅　频　谱

184631

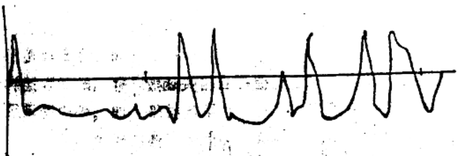


互 谱 相 频 谱

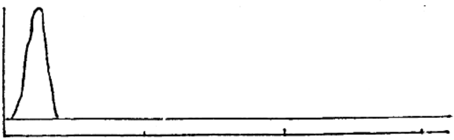
图 4



传递函数幅频谱

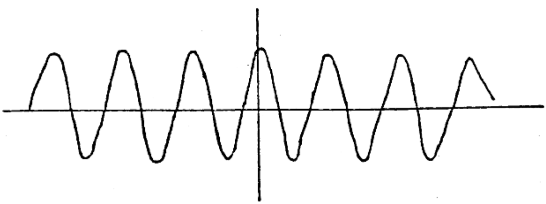


传递函数相频谱

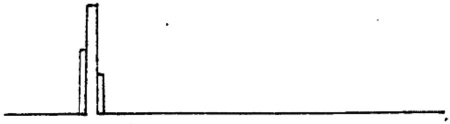


相 干 函 数

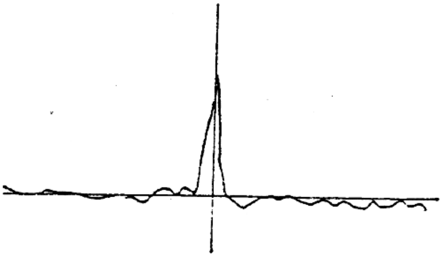
图 5



正弦信号自相关函数

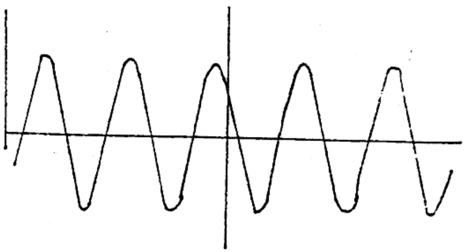


自 相 关 频 谱



随机信号自相关函数

随机信号自相关频谱



正弦信号互相关函数

图 6

实验五　快速付里叶变换（FFT）

一、实验目的：通过实验

1、使学生加深信号数字处理中所特有的概念——“采样”——“频混”，“窗函数”（截断）——“泄漏”，“非整周期截取”——“栅栏”等的理解。

2、加深理解如何才能避免“频混”，减少“泄漏”，防止“栅栏”的方法和措施以及估计这些因素对频谱的影响。

3、对利用通用的微型计算机及相应的FFT软件，实现频谱分析有一个初步的了解。

二、实验原理：

为了实现信号的数字化处理，利用计算机进行频谱分析——计算信号的频谱。由于计算机只能进行有限的离散计算（即DFT），因此，就要对连续的模拟信号进行采样和截断。而这两个处理过程可能引起信号频谱的畸变。从而使用DFT所得到的结果与信号的实际频谱出现误差。有时由于时域采样和截断的处理不当，使计算出来的频谱几乎连参考的价值都没有。因此在时域处理信号时要格外小心。

时域采样频率过低，将引起频域的“混叠”。为了避免产生“频混”，要求时域采样时必须满足采样定理，即：采样频率f_s必须大于信号中最高频率f_c的2倍（即$f_s \geqslant 2f_c$）。因此在信号数字处理中，为避免混叠，依不同的信号选择合适的采样频率将是十分重要的。（实际采样频率f_s一般取3～5倍的f_c）。

频域的“泄漏”是由时域的截断引起的。时域的截断使得频率中本来集中的能量向它的邻域呈衰减的扩散。（如由一个$\delta(f)$变成一个Sinc（ f）而泄漏的旁瓣将影响其它谱线的数值。

时域截断还会引起“栅栏效应”，对周期信号而言，它是由于截断长度不等于周期信号的整数倍而形成的。正是由于这个缘故，使得周期信号的频率不等于频域采样频率的整数倍。（频域采样频率——时域截断长度的倒数）因此，在频域中所得到的有限采样谱线（它们都是采样频率的整数倍）就没有被非整周期截取的该周期信号的谱线。从而造成了要求的谱线被频域采样“栅栏”“挡住”的效应。

综上所述：在信号数字化处理中应十分注意以下几点：

1、为了不产生“频混”现象（指限带信号。对非限带信号必须进行低通滤波的予处理），要求在采样时又必须满足采样定理。

2、为了减少“泄漏”及其影响，应适当地增加截断长度和选择合适的窗函数（如Hanning Window）进行截断。

3、对您感兴趣的信号进行整周期截取，则能消除“栅栏效应”。

4、增加截断长度，则可提高频域线的分辨率。

三、实验内容和步骤：

1、内容：利用后附的FFT程序，分别按给定的采样频率和截断长度，用程序输

入的方式，利用计算机计算下列各函数x（t）的频谱（DFT）。并对输出的结果进行分析。

(1) $x(t)=\sin(\omega_0+\frac{\pi}{6})+\sin 2\omega_0 t+\cos 3\omega_0 t$

采样周期$T=\frac{T_0}{8}$（$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$——x（t）的基波周期（下同））

采样点数：①N＝16　　②N＝32

(2) $x(t)=\sin(\omega_0 t+\frac{\pi}{6})+\sin 11\omega_0 t$

$T=\frac{T_0}{8}$，　N=16；　（$T=\frac{T_0}{32}$，N=32）

(3) $x(t)=\sin(\omega_0 t+\frac{\pi}{6})+\cos\sqrt{10}\omega_0 t$

$T_0=T_0/8$，①N=16，　②N=32

(4) $x(t)=\sin(0.99\omega_0 t+\frac{\pi}{6})$

$T=T_0/8$，　①N=16，　②N=32

(5) 对(3)式的x（t）用Hanning Window截断

$$w_n(t)=\begin{cases}0 & \text{其它}\\ \frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi t}{T_0}) & 0<t<T_0\end{cases}$$

2、步骤

(1) 从键盘或磁带机向计算机内输入FFT程序。

(2) 按x（t）的表达式的不同，修改程序的相应语句。（只改变第510——550中相应的语句即可。）

(3) 从键盘输入：N、N2、T的数值。

示例：对(1)式：

$$x(t)=\sin(\omega_0 t+\frac{\pi}{6})+\sin 2\omega_0 t+\cos 3\omega_0 t$$

∵ 采样周期$T=\frac{T_0}{8}$　∴ 采样序列的“基波”周期$N_0=8$，即$\frac{2\pi}{\omega_n}=N_0=8$

∴ 序列的数字角频率$\omega_n=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，则x(t)的采样序列表达式应为

$$x(n)=\sin(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{6})+\sin\frac{\pi}{2}n+\cos\frac{3\pi}{4}n$$

在程序中只要改变510和530两句即可—

即：
```
510  D=PI/4
530  X(J)=SIN(D1+PI/6)+SIN(2*D1)+COS(3*D1)
```
其余的x(t)都可仿照上例按给定的T和N来修改相应的程序语句即可。

对加Hanning Window的第(5)题，可作如下改动：

增加Hanning Window的语句：
```
532  W(J)=(1-COS(2*PI*(J-1)/N))/2
533  X(J)=W(J)*X(J)
```

四、实验报告要点：

对所求得的每个x(t)的DFT的结果X(J)进行分析，并回答下列问题：

1、在给定的采样周期（或采样频率）和采样点数（或截断长度的情况下，你所得到的频谱的频率分辨率是多少？在输出的结果中那几条谱线是你要求的频率的谱线？为什么？

2、所求得的DFT中有无频率混叠的现象？如有混叠，其混叠的规律如何？为消除和减少混叠应采取什么措施？

3、有无"泄漏"效应？"泄漏"对你要求的频率的谱线有无影响？为什么？如何才能减少"泄漏"对基频（或感兴趣的）频率谱线的影响？

4、有无"栅栏"效应？"栅栏"是否"挡住"你要求的频率的谱线？试分析其原因。怎样才能消除"栅栏"效应的影响？加长截断长度和加适当的窗能否避免（或减少）"栅栏"效应的影响？

5、计算幅值误差△A和相角误差△φ。

附录：FFT程序及其流程图

附录一　FFT程序

```
10   REM FFT EX
20   INPUT N, N2, T
30   DIM X(N), Y(N)
40   P1=3.1415926
50   GOSUB 500
90   GOSUB 700
100  IF T=1 GOTO 140 (T=1表IDFT, T=-1表DFT)
110  FOR I=1 TO N
```

```
120  X(J)=X(I)/N
130  NEXT I
140  GOSUB 900
150  FOR I=1 TO N
160  LPRINT"X(", ")="X(I), "Y("I, ")="Y(I)
170  NEXT I
180  END
500  REM SUBROUTINE X(I),Y(I)
510 DD=PI/8
520  FOR J=1 TO N
522  D1=D•(J-1)
530  X(J)=SIN(D1+PI/6)+COS(3•D1)+SIN(5•D1)
535  LPRINT"X("J, ")="X(J)
540  Y(J)=0
550  NEXT J
560  RETURN
700  REM SUBROUTINE REORDER
710  FOR J=1 TO N
720  GOSUB 1500
730  IF J≥J1 GOTO 770
740  X=X(J)
750  X(J)=X(J1)
760  X(J1)=X
770  NEXT J
780  RETURN
900  REM SUBROUTINE FFT
910  FOR M=1 TO N2
920  U1=1
930  U2=0
940  K1=INT(2↑M+0.5)
950  K=K1/2
960  A=P1/K
970  C=COS(A)
980  S=T•SIN(A)
990  FOR J=1 TO K
1000 L=J
```