

第十一篇

機 構 學

目 錄

頁

第一章 一般概念

1.1	對偶	11— 1
1.2	連桿組	11— 2
1.3	四連桿組	11— 4
1.4	含有一個滑行對的四件機構	11— 6
1.5	含有兩個滑行對的四件機構	11— 8
1.6	直線運動機構	11— 9

第二章 機構運動之分析

2.1	極心與極心線	11—12
2.2	連桿組之速度分析	11—13
2.3	極心改換之速度	11—14
2.4	連桿組之加速度分析	11—15
2.5	平面運動中物體之加速度	11—20
2.6	動點動路曲率中心之求法	11—21
2.7	凸輪從動件的速度與加速度	11—24
2.8	輪系之速度分析	11—25

第三章 機構之合成

3.1	凸輪從動件之運動	11—28
3.2	凸輪外軀曲線作圖法	11—29
3.3	連桿組之合成	11—30
3.4	導引一物體經過兩個位置	11—31
3.5	導引一物體經過三個位置	11—32
3.6	導引一物體經過四個位置	11—35

3•7	點位置簡化法.....	•1—39
3•8	導引一物體經過五個分離位置.....	11—41
3•9	函數機構之合成.....	11—41
3•10	Freudenstein 方程式.....	11—44
3•11	合成函數機構以配合已知函數之高階微分.....	11—45
3•12	傳力角與已合成機構之可用性.....	11—46

第十一篇

機 構 學

蔣 君 宏

第一章 一般概念

1.1 對偶 (Pairs of elements)

兩相鄰機件互相聯結，彼此約束其相對運動，即構成一副對偶。依照接觸性質之不同，對偶可以分為低對 (lower pair) 與高對 (higher pair) 兩種。

a. 低對 構成此種對偶之兩機件成面與面的接觸。兩機件之接觸面是互相密合的。依照接觸面形狀之不同，所約束的相對運動的性質亦不同。計有下列五種：

1. 迴轉對 (revolute pair) (R) 兩機件可以相對的圍繞一個共同中心軸線旋轉，但不能沿中心軸線方向相對移動。其接觸面為圓柱面，但在圓柱面之兩端有防止相對移動之裝置如軸圈等，如圖 1.1(a) 所示，或其他由旋轉而成的曲面，如圖 1.1(b) 所示。

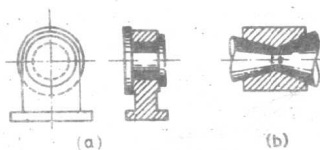


圖 1.1

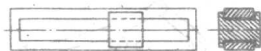


圖 1.2

2. 滑行對 (prismatic pair) (P) 兩機件可以沿直線方向相對滑行，但不能相對旋轉，如圖 1.2 所示。



3. 圓柱對 (cylindrical pair) (C) 兩機件可以圍繞共同中心軸線相對旋轉，又可以沿此中心軸線方向相對滑行，如圖 1.3 所示。

圖 1.3

4. 球面對 (spherical pair) (S) 兩機件之接觸面為一球面，如圖 1•4 所示。

5. 螺旋對 (screw pair) 兩機件可以相對的沿螺旋線 (helix) 運動，如圖 1•5 所示。



圖 1•4

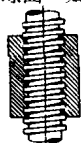


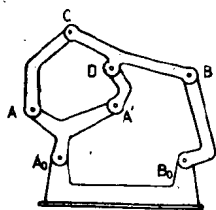
圖 1•5

在平面機構中，只有 (R)，(P) 兩種低對出現。所以此等符號 (R) 或 (P) 均不常用。在立體機構中，上列五種低對均有可能出現；而在連桿組 (linkage) 中，(R)，(P)，(C)，(S) 四種低對常出現，故用此等符號以區別之。本篇討論範圍暫限於平面機構。

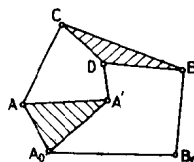
b. 高對 構成高對的兩機件無密合之接觸面。其接觸部份成線接觸，如凸輪與其從動件；或成點接觸，如若干滾珠軸承的滾珠與滾珠座。在平面機構中，只有線接觸的高對。

1•2 連桿組(Linkage)

在機構中，所有剛體機件都可被當作連桿 (link)。一個連桿與他一連桿構成對偶。由若干個連桿經由若干個對偶而聯結在一起所組成物稱之為連桿組，或運動鏈 (kinematic chain)。圖 1•6(a) 即是一個連桿組，此連桿組中所包含者都是迴轉對。在機構學中常用簡單表示法以表示機構，如圖 1•6(b) 即是圖 1•6(a) 中機構的簡單表示法。與運動有關的長度只是同一機件上迴轉對的中心位置，至於機件本身之寬與厚則與運動無關，故不予計及。



(a)



(b)

圖 1•6

三根連桿所聯結而成的鏈如圖 1•7 所示。a, b, c 三根連桿間不可能有相對運動，故稱為呆鏈 (locked chain)。如此的三根連桿恆被當做一整個剛體，如圖

1.6(a)(b) 中所示者就是。

四根連桿構成的鏈如圖 1.8 所示。此時如連桿 d' 被固定， a 與 c 可各圍繞固定中心 A_0 與 B_0 旋轉。 A, B 兩點的動路 (path) 各為一個圓弧。設 A 移動到 A' ，這時因為 A' 與 B_0 的位置都為一定。而 $A'B'$ 與 B_0B' 的長度又都為一定，故 B' 的位置就因而決定。如此凡 a 轉到某一位置， b 與 c 的位置也必各隨之而定。這種鏈稱之為拘束運動鏈 (constrained kinematic chain)。

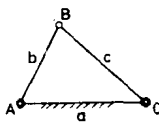


圖 1.7

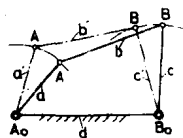


圖 1.8

在五根以上連桿所構成的單聯閉口鏈中，當一根連桿被固定後，另一個圍繞固定中心旋轉之桿的某一位置並不能確定其他各桿的位置，故稱為無拘束運動鏈 (unconstrained kinematic chain)。只有在拘束運動鏈中，將其中一桿固定，方能成為一個機構 (mechanism)。換言之，在拘束運動鏈中，任意固定一連桿，則其他各連桿的自由度 (degree of freedom) 皆為 1。也就是說，其他各連桿上任一點都各只有一個動路。單聯的閉口鏈中只有四連桿組 (four-bar linkage) 是拘束運動鏈。故四連桿組為機構之最基本形式。

多根連桿所聯結成的多聯鏈 (multiply connected chain) 之是否為拘束運動鏈，可以 Grübler 判別式驗證之：

$$2p - 3n + 4 = 0 \quad (1.1)$$

式中 p 表低對之對偶數， n 表連桿數。若 $2p > 3n - 4$ ，則此鏈為呆鏈；若 $2p < 3n - 4$ ，則為無拘束運動鏈。由此可知，凡適合 (1.1) 式之拘束運動鏈，其連桿數必為偶數。

一個與另兩個連桿相聯結的連桿稱為雙聯連桿 (binary link)，一個與另三個連桿相聯結的連桿稱為三聯連桿 (ternary link)，一個與另四個連桿相聯

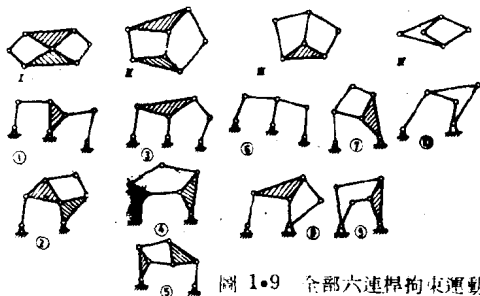
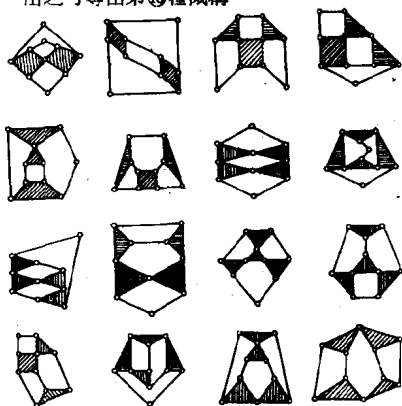


圖 1.9 全部六連桿拘束運動鏈

結的連桿稱為四聯連桿 (quaternary link)。

六連桿組之拘束運動鏈共有四種，如圖 1.9 所示。第 I 種稱為 Watt 運動鏈，由之可導出①，②兩種機構。第 II 種稱為 Stephenson 運動鏈，由之可導出③，④，⑤三種機構。第 III 種有一個雙迴轉對，由之可導出⑥，⑦，⑧，⑨四種機構。第 IV 種有兩個雙迴轉對，由之可導出第⑩種機構。

八連桿組之拘束運動鏈共有十六種，如圖 1.10 所示。依據 Grübler 之推論，在任一拘束運動鏈中最少有四個雙聯連桿。再者，在一個拘束運動鏈中含有低對數最多的連桿，其低對數不能超過 $n/2$ 。換言之，例如在八連桿組中最多只能出現四聯連桿，而不可能出現五聯連桿。



1.3 四連桿組

圖 1.11 所示是一個典型四連桿組。連桿 d 被固定。左右兩連桿 a 與 c 可各圍繞固定中心 A_0 與 B_0 旋轉；今後此兩桿即簡稱為旋轉桿。 b 為聯結兩旋轉桿之用，稱為偶桿 (coupler)。直線 $A_0 B_0$ 則稱為聯心線，一個四連桿組依其兩旋轉桿之能否作 360° 之完全迴轉可分為以下三類：

a. 曲柄搖桿機構 (crank-and-rocker) 即如圖 1.11 所示，

a 可以作完全迴轉，稱為曲柄。 c 只能在 $B_0 B_1$ 與 $B_0 B_2$ 兩位置間往復搖擺，稱為搖桿。此種機構成立之必要條件為 Grashof 定理：欲使一四連桿組成為一個曲柄搖桿機構，最長桿與最短桿長度之和必小於其他兩桿長度之和。須注意者，此定理尚不足以構成曲柄搖桿機構成立之充分條件。以最短桿為曲柄，而將與此最短桿相鄰之一桿固定，方成為一個曲柄搖桿機構。圖 1.11 中 A 移動到 A_1 ，偶桿與曲柄重合， B 到 B_1 為其左極端位置。當 A 到 A_2 ，偶桿與曲柄成一

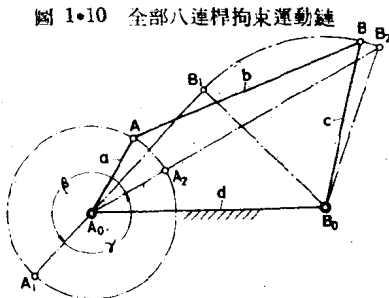


圖 1.11 曲柄搖桿機構

直線， B 到 B_2 爲其右極端位置。在此兩個極端位置均不能以 c 爲原動件 (driver) 而推動 a 轉動，是稱爲死點位置 (dead point position)。若曲柄 a 以均勻角速度 (angular velocity) 作反時針向迴轉，可見 $\beta > \gamma$ ，即 A 點由 A_2 至 A_1 較由 A_1 至 A_2 時間爲長。亦即 B 點由 B_2 至 B_1 較由 B_1 至 B_2 所需時間爲長。所以此機構可以作爲急回機構 (quick-return mechanism) 之用。

b 雙曲柄機構 (double crank) 將適合於 Grashof 定理的四連桿組之最短桿固定，即成爲雙曲柄機構，如圖 1.12 所示。此時兩個旋轉桿 b 與 d 皆可作完全迴轉。

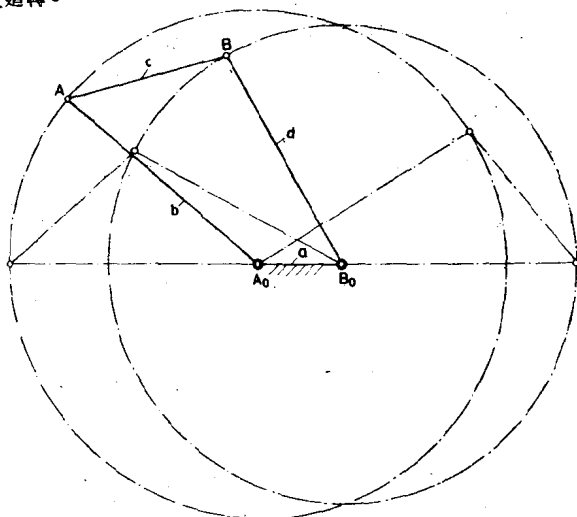


圖 1.12 雙曲柄機構

若 $A_0B_0 = AB$ ， $A_0A = B_0B$ ，則此四連桿組成爲一平行四邊形，稱之爲平行等曲柄四連桿組 (parallel equal crank linkage)，如圖 1.13 所示。兩曲柄 A_0A 與 B_0B 之轉速恆相等。在死點位置，偶桿 AB 與聯心線 A_0B_0 成一直線。若從死點位置起，令兩旋轉桿轉向相反，即成爲不平行等曲柄連桿組 (non-parallel equal crank linkage)，如圖 1.14。此時兩曲柄轉向恆相反，且轉速不相等。

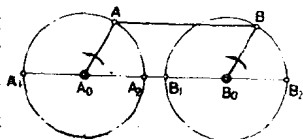


圖 1.13

c. 雙搖桿機構(double rocker) 將適合於 Grashof 定理之四連桿組最短桿對面之桿固定，則兩旋轉桿皆不能作完全迴轉，即稱為雙搖桿機構，如圖 1•15。此時偶桿可以在空間作完全迴轉。

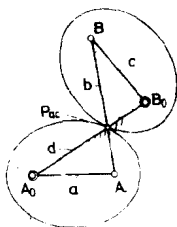


圖 1•14

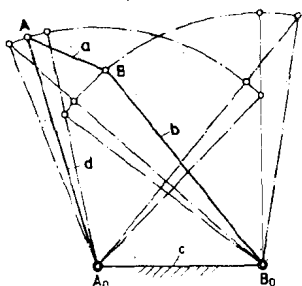


圖 1•15 雙搖桿機構

不適合於 Grashof 定理之四連桿組，無論固定何桿，均只能成爲一個雙搖桿機構，如圖 1•16。此時偶桿不能在空間作完全迴轉。

將一個機構更換固定連桿所得之機構稱為原機構之倒置 (inversion)。如圖 1•12 與圖 1•15 之 A₀ 機構皆是圖 1•11 機構之倒置。

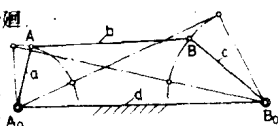


圖 1•16

1•4 含有一個滑行對的四件機構

a. 滑子曲柄機構 (slider-crank) 將圖 1•11 中曲柄搖桿機構的 B₀ 移向無窮遠，B 點的動路就變成一直線。因此在 B₀ 點的迴轉對就變爲一個滑

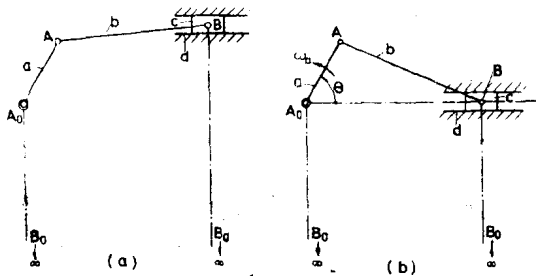


圖 1•17 滑子曲柄機構

行對，如圖 1.17(a)。B 點的動路直線若不通過 A_0 ，此機構稱為偏置滑子曲柄機構 (offset slider-crank)。其運動對於 B 點動路為不對稱的。若 B 點動路直線通過 A_0 ，此機構即稱為中央滑子曲柄機構 (central slider-crank)，如圖 1.17(b)。其運動對於 B 點動路為對稱的。此時若曲柄 a 以均勻角速度 ω_a (表為 rad/sec) 作反時針向旋轉，則 B 點的速度與加速度各為

$$V_B = a\omega_a \left(\sin\theta + \frac{\lambda \sin 2\theta}{2\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2\theta}} \right) \quad (1.2)$$

與

$$A_B = a\omega_a^2 \left[\cos\theta + \frac{\lambda \cos 2\theta + \lambda^3 \sin^4\theta}{(1-\lambda^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \right], \quad (1.3)$$

式中 $\lambda = a/b$ ，而 a, b 各表 a, b 桿之長度。 V_B, A_B 以向左為正。

b. 搖塊急回機構 (swinging block quick-return mechanism) 此機構是圖 1.17(b) 中滑子曲柄機構之倒置，係由固定 b 而得，如圖 1.18 所示。設曲柄 a 以均勻角速度 ω_a 作反時針向旋轉，則搖桿 c 的角速度與角加速度各為

$$\omega_c = -\frac{\lambda(\cos\theta + \lambda)}{1 + 2\lambda\cos\theta + \lambda^2} \omega_a \quad (1.4)$$

與

$$\alpha_c = \frac{\lambda \sin\theta (\lambda^2 - 1)}{1 + 2\lambda\cos\theta + \lambda^2} \omega_a^2 \quad (1.5)$$

式中 $\lambda = a/b$ 。由 B_0 作 A 點曲柄圓之兩切線與之相切於 A' 及 A'' 。此兩切線即代表搖桿 c 之左右兩極端位置。由 $\beta > \gamma$ 可知 c 由右向左擺動時間較由左向右擺動時間為長。此機構通常用為刨床之急回機構。

c. Whitworth 急回機構 此是滑子曲柄機構另一個倒置，係由固定圖 1.17(b) 中最短桿 a 而得，如圖 1.19 所示。此時當原動曲柄 b 作完全迴轉時

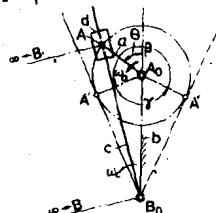


圖 1.18 搖塊急回機構

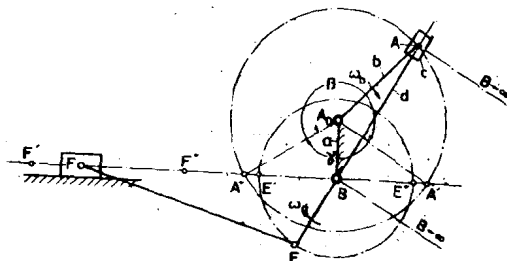


圖 1.19 Whitworth 急回機構

，從動桿 d 亦可以作完全迴轉。在 d 上某點 E 處以另一聯結桿 EF 聯結一個滑子。若 F 的動路通過 B ，則當 E 在 E' 時 A 在 A' ， F 在 F' ； E 在 E'' 時 A 在 A'' 而 F 在 F'' 。 b 若以均勻角速度 ω ，作順時針向旋轉，則當由 A' 到 A'' ， b 所轉角度為 γ ， F 由 F' 到 F'' 。當 A 由 A'' 到 A' ， b 所轉角度為 β ， F 即由 F'' 到 F' 。因 $\beta > \gamma$ ，故可令 F' 到 F'' 為退回程，而 F'' 到 F' 為切削程。

1.5 含有兩個滑行對的四件機構

a. 簡諧運動機構 (simple harmonic motion) 圖 1.20 所示的機構，當曲柄 a 以均勻角速度 ω_a 旋轉時，從動件 c 作簡諧運動。其運動可以其上有一點 Q 為代表。 Q 之速度與加速度各為

$$V_Q = a\omega_a \sin\theta \quad (1.6)$$

$$\text{與} \quad A_Q = a\omega_a^2 \cos\theta \quad (1.7)$$

(1.6) (1.7) 兩式中 V_Q, A_Q 以向左為正。

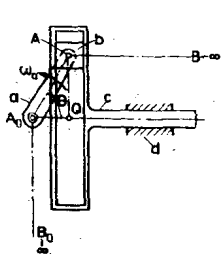


圖 1.20 簡諧運動機構

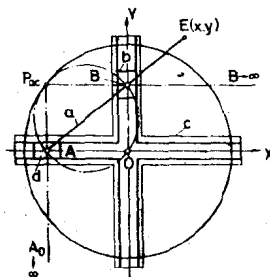


圖 1.21

b. 雙滑子機構 (double slider) 此是由圖 1.20 中之機構將 c 固定而得之倒置如圖 1.21 所示。 a 成為偶桿，在其上之任一點 E 依十字槽 c 之中心點 O 為原點的座標 (x, y) 為

$$\begin{cases} x = BE \cos\theta \\ y = AE \sin\theta \end{cases} \quad (1.8)$$

(1.8) 式表示 E 點的動路為一個橢圓。故此機構可作為製成橢圓規 (elliptic trammel) 之用。

c. Oldham 聯軸節 圖 1.22 此是由圖 1.21 中之機構將 a 固定而得

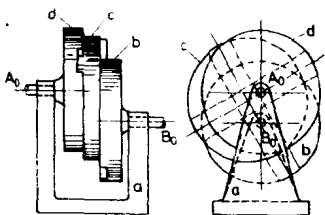


圖 1.22 Oldham 聯軸節

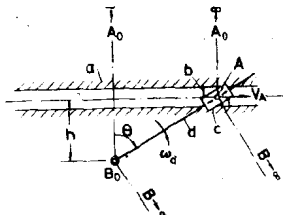


圖 1.23 Rapson 滑行機構

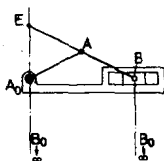
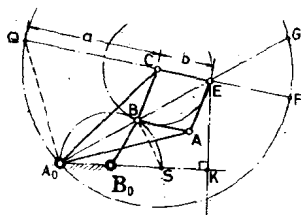
之倒置，滑子 b 與 d 恆成 90° 正交位置，故可以用為聯結兩個平行但不在一直線上之軸，而使兩軸之速度相同。

d. Rapson 滑行機構 圖 1.19 中 A_0A 之長度若趨向於無窮大， A 點的動路就變為一個與 A_0B_0 正交的直線，在圖 1.23 中以一個滑行對表示之。此一機構通常用在船上作為舵操縱之用。若 A 點以均勻線速度 V_A 向右移動，則桿 d 的角速度與角加速度各為

$$\left. \begin{aligned} \omega_d &= -\frac{V_A}{h} \cos^3 \theta \quad (\text{順時針向}) \\ \alpha_d &= -\frac{2V_A^2}{h^2} \sin \theta \cos^3 \theta \quad (\text{負號表反時針向}) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

1.6 直線運動機構

直線運動機構種類繁多，其中尤以藉合成 (synthesis) 方法求得的近似直線機構更屬變化無窮，不能在此列舉。此處所介紹者，為家所熟知的三種正確直線機構及兩種近似直線機構。

圖 1.24 Scott-Russell
直線機構圖 1.25 Peaucellier
直線機構

a. Scott-Russell 直線機構 此是圖 1.24 所示機構，為一特殊的滑子曲柄機構，其中 $A_0A = AB = AE$ 。E 為桿 AB 上一點。E 點的動路為一正

$$\frac{AF}{AH} = \frac{AQ}{AJ}$$

但

$$AJ = GC$$

故

$$GC \times AF = AQ \times AH = (a+b)(a-b) \\ = a^2 - b^2 = \text{常數}$$

又由相似三角形可知

$$A_0B = GC \times \frac{b_1}{b},$$

$$A_0E = AF \times \frac{b_2}{b}$$

故

$$A_0B \times A_0E = GC \times AF \times \frac{b_1 b_2}{b^2} \\ = \frac{b_1 b_2}{b^2} (a^2 - b^2) = \text{常數} \quad (1.12)$$

再由相似三角形得知

$$\frac{A_0K}{A_0B} = \frac{A_0E}{A_0S},$$

即

$$A_0K = \frac{A_0B \times A_0E}{2A_0B_0} = \text{常數}, \text{故得證。}$$

由於 (1.12) 式中 A_0B 與 A_0E 乘積為常數之幾何關係，此機構亦為一種倒數器。

d. Chebyshev 直線機構 圖 1.27 所示機構，各桿比例如下： $A_0B_0 : A_0A : AB = 4 : 5 : 2$ ，且 $A_0A = B_0B$ 。偶桿 AB 之中點 E 近似的在一直線上運動。由幾何關係可知 E 點之左右兩位置 E_1, E_2 與 E 在一直線上。點動路是一近似直線。

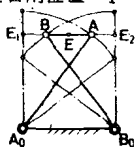


圖 1.27 Chebyshev 直線機構

e. Roberts 直線機構 圖 1.28 所示機構

，各桿成如下比例： $A_0A = AE = EB = B_0B$ ， A_0B_0

$= 2AB$ 。E 點近似的在

A_0B_0 線上運動。實際上，E 點動路正確通過 A_0 與 B_0 。

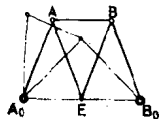


圖 1.28 Roberts 直線機構

第二章 機構運動之分析

2.1 極心 (Pole) 與極心線 (Polode)

同一機構中之兩機件，在運動中有一共同點，此點在兩機件上的速度相同，即稱之為此兩機件的共同極心。如 b 與 d 兩機件的共同極心，以 P_{bd} 表之。

機構速度問題之求解，應用一基本法則，即同一剛體上兩點間之相對速度必與此兩點聯線垂直。依此法則，可知圖 2.1 (a) 中之 A 與 A_0 同為 a 上兩點。 A_0 既為固定點， A 點速度 V_A 應與 A_0A 垂直。同理 B 之速度 V_B 也與

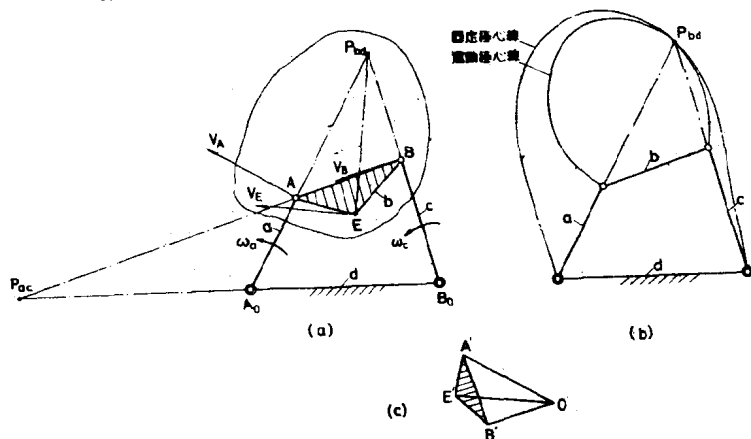


圖 2.1 (a) 機構圖 (b) 固定極心線與運動極心線 (c) 速度圖

B_0B 垂直。將 A_0A 與 B_0B 兩線延長相交於 P_{bd} 。今想像將剛體 b 擴大至包括 P_{bd} 。依上述法則， P_{bd} 是 AP_{bd} 線上一點，而 V_A 又與 AP_{bd} 垂直，故 P_{bd} 之速度應與 AP_{bd} 垂直。同理 P_{bd} 是 BP_{bd} 線上一點且 V_B 又與 BP_{bd} 垂直，故 P_{bd} 之速度又應與 BP_{bd} 垂直，但 AP_{bd} 與 BP_{bd} 方向不同，其垂線方向自亦不同。故 P_{bd} 之速度當為 0。 P_{bd} 即為 b 之瞬時速度中心，或稱 b 之瞬時旋轉中心。嚴格言之， P_{bd} 為當 d 固定時 b 之旋轉中心，也是當 b 固定時 d 之旋轉中心或當 b, d 同時運動時在兩物體上有共同速度之共有點。故 P_{bd} 是 b 與 d 的共同極心。同理 a 與 c 的共同極心 P_{ac} 為 AB 與 A_0B_0 兩線延長之交點。

圖 2.1(a) 中偶桿 b 對於固定件 d 之極心 P_{bd} 在運動中相繼取不同之位置。此無數個 P_{bd} 的位置在 d 上之軌跡，稱為固定極心線 (fixed polode)，圖 2.1(b)。同樣 P_{bd} 在 b 上也相繼取不同的位置，此無數個 P_{bd} 的位置在 b 上之軌跡，稱為運動極心線 (moving polode)。 b 之平面運動，即等於運動極心線在固定極心線上的純滾動接觸 (pure rolling contact)。

特殊的極心線如圖 1.14 中的兩個橢圓，是 a 與 c 兩物體的相對極心線。兩個橢圓的相對滾動運動即是 a 與 c 的相對運動。又如圖 1.21 中的大小兩個圓，也是該圖中 a 與 c 的相對極心線。兩圓成 1 與 2 之比。固定 c 而令 a 運動，等於固定大圓而令小圓在大圓內滾動。這一對圓稱為 Cardan 氏圓。

2.2 連桿組之速度分析

a. 相對速度法 在圖 2.1(a) 中，設 V_A 為已知。在圖 2.1(c) 中，任取一點 O' 為始點，作 $O'A' = V_A$ 。因 V_B 必與 B_0B 垂直，故其方向為已知。由 O' 作線與 B_0B 垂直。又由上述法則，知 B 對 A 之相對速度必與 AB 垂直。故由下式

$$V_B = V_A + V_{BA} \quad (2.1)$$

可以在圖 2.1(c) 中求得 B' 點。 $A'B' = V_{BA}$ ，為 B 對 A 的相對速度。同理由 A' 作 $A'E' \perp AE$ ，由 B' 作 $B'E' \perp BE$ ，兩線相交即可求得 E' 點。圖 2.1(c) 稱為速度多邊形。圖形 $O'A'E'B'$ 與 $P_{bd}AEB$ 同向相似而成為其速度像。前者等於將後者乘以 ω_b ，再按 ω_b 之方向旋轉 90° 而得。故

$$\omega_b = \frac{O'A'}{P_{bd}A} = \frac{O'B'}{P_{bd}B} = \frac{A'B'}{AB} \quad (2.2)$$

$$\text{或} \quad \omega_b = \frac{V_A}{P_{bd}A} = \frac{V_B}{P_{bd}B} = \frac{V_{BA}}{AB} \quad (2.2a)$$

同理 A_0A 之速度像為 $O'A'$ ，而 B_0B 之速度像為 $O'B'$ 而有

$$\left. \begin{aligned} \omega_a &= \frac{O'A'}{A_0A} \\ \omega_c &= \frac{O'B'}{B_0B} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

O' 為所有速度為 0 之點的速度像。

b. 用極心求速度法 如上所述，兩物體中有一物體為固定，則他一物體以二者的共同極心為中心而旋轉。運動物體上各點的線速度與由該點至旋轉中心的距離成正比，已知 (2.2a) 式所示。圖 2.2 中，已知 V_A ，欲求 V_B 。可以

