21世纪经济管理专业应用型精品教材
21SHIJI JINGJI GUANLI ZHUANYE YINGYONGXING JINGPIN JIAOCAI

微积分

学习指导

WEIJIFEN XUEXI ZHIDAO

张军好 主编

上海财经大学出版社

21世纪经济管理专业应用型精品教材

微积分学习指导

张军好　主　编

冉兆平　樊　艮　江小勤　副主编

上海财经大学出版社

目录

第4章 不定积分

第5章 定积分

第6章 二元函数的微积分

第7章 无穷级数

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第 1 章

函数 极限 连续

一 基本内容

(一) 函数

1 函数的定义

设变量 x 在某个实数集 D 中取定一数值时，另一变量 y 按照一定规则总有一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量，实数集 D 为定义域.

2 函数的几种特征

(1) 单调性　设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递增；反之，若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

(2) 有界性　设 $f(x)$ 在实数域 D 内有定义，数集 $X\subset D$，若存在正数 M，使得与任一 $x\in X$ 所对应的函数值都满足不等式 $|f(x)|<M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

(3) 奇偶性　若 $f(x)$ 的定义域 D 对称于原点，对任意 $x\in D$ 恒成立

$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性　设 $f(x)$ 在 D 上有定义，若存在一不为零的数 l 使得对任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数，通常周期是指最小正周期.

3 反函数

在函数 $y=f(x)$ 中，若将 y 当作自变量，x 当作因变量，则由 $y=f(x)$ 确定的函数 $x=\varphi(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数.

4 复合函数

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in D_1$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，$x\in D_2$，且 $D=\{x\mid x\in D_2,\varphi(x)\in D_1\}\neq\varnothing$，则函数 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in D$ 称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，称 u 为中间变量.

5 初等函数

幂函数、指数函数、三角函数以及它们的反函数都称为基本初等函数，由常数和基本初等函数经有限次四则运算和有限复合步骤所形成的，并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

（二）极限

1 极限的定义

(1) 设数列 x_n 与常数 a 有如下关系：对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称数列 x_n 收敛于 a，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(3) 对任意给定的正数 ε，总存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A，记作：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

2 极限的四则运算

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有 $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；$\lim[f(x)g(x)]=AB$；$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

3 极限存在准则

(1) 单调有界数列必存在极限；

(2) 设 x_n, y_n, z_n，为三个数列($n=1,2,\cdots$)，若 $y_n < z_n < x_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，则数列 z_n 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，此定理称为夹逼定理，此定理同样适用于函数的极限.

4 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

5 当 $x\to 0$ 时的等价无穷小量

$\sin x \sim x$；$\tan x \sim x$；$\mathrm{th}x \sim x$；$\mathrm{sh}x \sim x$；

$\arcsin x \sim x$；$\arctan x \sim x$；$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$；

$\ln(x+1) \sim x$；$(1+x)^2 - 1 \sim 2x$；$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

(三) 函数的连续性

1 函数在一点的连续性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点连续.

2 函数的间断点的两种类型

若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点间断，但 $f(x^-)$ 与 $f(x^+)$ 都存在，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，否则就称为第二类间断点.

3 函数的间断点的四种名称

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，但 $f(x_0)$ 不存在或 $f(x_0) \neq A$，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的可去型间断点；

(2) 设 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 都存在，但 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃型间断点；

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点；

(4) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 因振荡而不存在，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

4 初等函数的连续性

设 $f(x)$ 是定义在 I 上的初等函数，则 $f(x)$ 在 I 上连续.

5 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则有

(1) 最值定理　$f(x)$ 在$[a,b]$上必有最大值和最小值；

(2) 介值定理　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值与最大值分别为 m 与 M，c 是介于 m 与 M 之间的任一确定的数，则在(a,b)内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=c$.

二　习题与解答

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg(x^2)$，$g(x)=2\lg x$

解：函数 $f(x)=\lg(x^2)$ 的定义域为 $x\neq 0$，而函数 $g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $x>0$，由于定义域不同，于是它们不是同一个函数.

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

解：无论自变量 x 取任何实数，函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 的表达式都可以化为 $g(x)=|x|$，由于它与函数 $f(x)=x$ 的表达式即对应法则不相同，于是它们不是同一个函数.

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$

解：无论自变量 x 取任何实数，都有关系式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，所以函数 $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$ 的定义域相同，皆为全体实数，且表达式即对应法则也相同，于是它们是同一个函数.

(4) $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

解：函数 $f(x)=x+1$ 的定义域为全体实数，而函数 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $x\neq 1$，由于定义域不同，于是它们不是同一个函数.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

解:要使 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 有意义,当且仅当 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$,即 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$,所以定义域 $D(f)=[-1,0)\cup(0,1]$.

(2) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$

解:要使 $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$ 有意义,当且仅当 $x^2-3x+2\neq 0$,即 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$,所以定义域 $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) $y=\arcsin(x-3)$

解:要使 $y=\arcsin(x-3)$ 有意义,当且仅当 $|x-3|\leqslant 1$,即 $2\leqslant x\leqslant 4$,所以定义域 $D(f)=[2,4]$.

(4) $y=\frac{1}{\lg(x-5)}$

解:要使 $y=\frac{1}{\lg(x-5)}$ 有意义,当且仅当 $x-5>0$ 且 $\lg(x-5)\neq 0$,即 $x>5$ 且 $x\neq 6$,所以定义域 $D(f)=(5,6)\cup(6,+\infty)$.

(5) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$

解:要使 $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$ 有意义,当且仅当 $\frac{5x-x^2}{4}>0$ 且 $\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$,即 $1\leqslant x\leqslant 4$,所以定义域 $D(f)=[1,4]$.

(6) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

解:要使 $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 有意义,当且仅当 $4-x^2>0$,即 $-2<x<2$,所以定义域 $D(f)=(-2,2)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$,求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$,$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,$f(-2)$.

解:$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$f(-2)=0$.

4. 将下列函数分解为基本初等函数的复合形式：

(1) $y=(e^x)^2$ (2) $y=e^{x^2}$

(3) $y=(\ln x^2)^3$ (4) $y=3^{\ln x^2}$

(5) $y=\ln\tan 2x$ (6) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

解：(1) $y=u^2, u=e^x$ (2) $y=e^u, u=x^2$

(3) $y=u^3, u=\ln v, v=x^2$ (4) $y=3^u, u=\ln v, v=x^2$

(5) $y=\ln u, u=\tan v, v=2x$ (6) $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\sqrt{x}$

5. 已知 $y=\sqrt{1+u^2}, u=\sin v, v=\lg x$，将 y 表示为 x 的函数.

解：$y=\sqrt{1+\sin^2(\lg x)}$.

6. 观察并写出下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$ (4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$

解：(1)1 (2)0 (3)0 (4) $-\infty$

7. 用左、右极限讨论下列极限：

(1) $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}2^x & x>0\\ 0 & x=0\\ 1+x^2 & x<0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x^2)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

8. 函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 在什么变化过程中是无穷大量？又在什么变化过程中是无穷小量？

解：函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 在 $x\to 1$ 的过程中是无穷大量，在 $x\to\infty$ 的过程中是无穷小量.

9. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中哪些是无穷小量？

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$100x^2$， $\sqrt[3]{x}$， $\dfrac{2}{x}$， $\dfrac{x}{0.01}$， $\dfrac{x}{x^2}$， $\dfrac{x^2}{x}$， $x^2+0.1x$， $\dfrac{1}{2}x-x^2$

解：当 $x\to 0$ 时，$100x^2,\sqrt[3]{x},\dfrac{x}{0.01},\dfrac{x^2}{x},x^2+0.1x,\dfrac{1}{2}x-x^2$ **是无穷小量.**

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+2)$

解：$\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+2)=3\times(-2)^2-5\times(-2)+2=24$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^2+5}{2-3}=-9$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+5}$

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+5}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^2-4}{2+5}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}(\sqrt{1+3x}+1)=\dfrac{2}{3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-3x^2}{1+2x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-3x^2}{1+2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-3}{\dfrac{1}{x^2}+2}=-\dfrac{3}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x+1})-\sqrt{x^2-x+1})$

解：
$$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=1$$

(8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

解: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=2$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{5}=\dfrac{1}{5}$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^{30}\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^{20}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{20}$

(12) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

解: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=2$

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n-1)(1+n-1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}$

11. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$

解: $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$(无穷小量和有界函数之积仍是无穷小量)

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$

解:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$(无穷小量和有界函数之积仍是无穷小量)

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+1}(3+\cos x)$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+1}(3+\cos x)=0$(无穷小量和有界函数之积仍是无穷小量)

12. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,试求 a,b.

解:因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}=0$,所以 $1-a=0$ 且 $a+b=0$,故 $a=1,b=-1$.

13. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

$$\text{解}:\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$

解:令 $\arcsin x=t$,则 $x=\sin t$,当 $x\to 0$ 时,$t\to 0$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{3\sin t}=\frac{2}{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

解:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\frac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin x}=\frac{3}{4}$

14. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{4}=\mathrm{e}^{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(-\frac{2}{x}\right)\right]^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-1}\cdot\left[1+\left(-\frac{2}{x}\right)\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{2}=\mathrm{e}^{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}$

15. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$

解：当 $x\to 0$ 时，$\tan 3x\sim 3x$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

解：当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+\sin^{2}x}{\sin 2x-x^{3}}$

解：当 $x\to 0$ 时，$3x+\sin^{2}x\sim 3x$，$\sin 2x-x^{3}\sim 2x$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+\sin^{2}x}{\sin 2x-x^{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}$

解：当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^{3}$，$\sin^{3}x\sim x^{3}$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^{3}}{x^{3}}=\frac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$

解：当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+2x)\sim 2x$，$\sin 3x\sim 3x$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x}$

解: 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$x^2+x\sim x$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x=0$

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x<0\\ k & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+1 & x>0\end{cases}$，问常数 k 取何值时，函数 $f(x)$ 在其定义域内连续?为什么?

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+1\right)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，又 $f(0)=k$，要函数 $f(x)$ 在定义域内连续，必须函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，故 $k=1$.

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ a+x & x\geqslant 0\end{cases}$，应当怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x)=a$，又 $f(0)=a$，要使函数 $f(x)$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$ 内连续，必须函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，故 $a=1$.

18. 指出下列函数的间断点:

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

解: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点为 $x=0$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

解: $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ 的间断点为 $x=-1$，$x=-2$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

解:$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$的间断点为 $x=1$

(4) $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\geqslant 1\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & x<1\end{cases}$

解:$f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\geqslant 1\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & x<1\end{cases}$的间断点为 $x=1$

19. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{e^t+1}{t}$

解:$\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{e^t+1}{t}=\dfrac{\lim\limits_{t\to 2}e^t+1}{\lim\limits_{t\to 2}t}=\dfrac{e^2+1}{2}$

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$

解:$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=\left(\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\sin 2\alpha\right)^3=1$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}}\ln(2\cos 3x)$

解:$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}}\ln(2\cos 3x)=\ln\left(2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}}\cos 3x\right)=\ln 1=0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$

解:$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{20}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$

解:$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3\tan^2 x}}\right]^3=e^3$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com