

中西算学大成

中西算學大成

幾何原本八

論有比例無比例之理 二凡二十化題

第一題

若干連比例率首尾二率無等數則諸率為同比最小數

解曰甲乙丙丁連比例率首尾甲丁無等數題言甲乙丙丁為同比最小數

丁辛論曰若云諸率非同比最小數則設戊己庚辛小于甲乙丙丁而與甲乙丙

丁同比甲乙丙丁既與戊己庚辛同比而甲乙丙丁若干率與戊己庚辛若

丙庚千率等則平理甲與丁比若戊與辛比七篇而甲丁無等數凡無等數之數

乙一必為同比最小數即可度他同比數前率度前率後率度後率等七篇二則

甲戊乃以大度小理所不能故戊己庚辛小于甲乙丙丁必不與甲乙丙

丁同比而甲乙丙丁為同比最小數

第二題

有同比最小率求連比例最小數

法曰甲乙為同比最小率求若干連比例最小數如求四數則以甲自乘

得丙以甲乘乙得丁以乙自乘得戊又以甲乘丙丁戊得己庚辛以乙乘

戊得壬即得己庚辛壬四數蓋甲既自乘得丙乘乙得丁是甲乘甲乙兩

數生丙丁兩數故甲與乙比若丙與丁比七篇又甲乘乙得丁而乙自乘

得戊是甲乙各乘乙得丁戊故甲與乙比若丁與戊比七篇惟甲與乙比

甲二
丙四
乙八

壬為甲乙同比最小數

第三題

若干連比例率為同比最小數則首尾無等數

解曰。甲乙丙丁連比例率為同比最小數。題言首甲尾丁無等數。

論曰戊己為甲乙丙丁同比最小二數。本篇二庚辛壬為同比最小三數。

寅推至最小諸數與甲乙丙丁若干率等命此諸數為子丑寅卯則首子

尾卯無等數蓋戊己既無等數各自乘得庚壬各再乘得子卯則庚壬

子卯俱無等數七篇甲乙丙丁既為同比最小數而子丑寅卯為甲乙

甲	八	乙	一
戊	二	己	三
庚	四	辛	六
子	八	丑	一

丙丁同比最小數甲乙丙丁若干率。與子丑寅卯若干率等。則甲乙丙丁各數。與子丑寅卯各數等。是以甲與子等。丁與卯等。子與卯既無等數。則甲丁亦無等數。

第四題

若干同比最小率。求相連同比之最小數。

法曰。甲與乙丙與丁。戊與己為各同比最小率。求相連同比最小數。以辛
戊子二辰一為乙丙所度最小數。七篇三取庚壬二數。令乙度辛得若干。與甲度庚相
丁二卯一。等。丙度辛得若干。與丁度壬相等。而戊或度壬或不度壬。若度壬。則取子
丙三士一卯一。令戊度壬得若干。與己度子相等。甲度庚得若干。既與乙度辛得若干等。
乙五寅一。則甲與乙比。若庚與辛比。七篇三又丙與丁比。若辛與壬比。戊與己比。若壬
甲二庚五。與子比。理同。故庚辛壬子。為甲與乙丙與丁。戊與己。諸率相連同比之數。
亦為同比最小數。若云非最小。別有數小于庚辛壬子。為丑寅卯辰。則甲與乙比。
若丑寅與比。而甲乙為最小數。最小數可度諸同比數。前率度前率。後率度後率。
俱等。七篇二則乙度寅。又丙亦度寅。是乙丙度寅。而乙丙所度之最小數亦度寅。
七篇三乙丙所度之最小數為辛。故辛度寅。然以大度小。理所不能。故無小于庚
辛壬子。與甲乙丙丁戊己同比者。

設戊不度壬。則取寅為戊壬所度最小數。七篇三又取子丑卯。令壬度寅得若干。
與庚辛度子丑得若干等。戊度寅得若干。與己度卯得若干等。庚度子得若干。既

三乙一丙既生甲而乘戊生子。七篇界說十六則丙與戊比。若甲與子比。七篇惟丙與戊
甲庚比。若庚與辛比。本論故庚與辛比。亦若甲與子比。又戊乘丁既生子而乘己
生乙。則丁與己比。若子與乙比。惟丁與己比。若辛與壬比。本論故辛與壬比。亦若子
與乙比。又庚與辛比。若甲與子比。本論故庚與壬比。若甲與乙比。七篇夫庚與壬比
為其邊之相結比例。六篇界說五是以甲與乙比。亦為邊之相結比例。

第六題 凡連比例率第一數不度第二數則後諸數皆不相度。

解曰。甲乙丙丁戊為連比例率。如甲不度乙。題言甲乙丙丁戊皆不相度。

論曰。甲不度乙而甲亦度不餘諸數。如甲不度丙是也。其理易明。設有己庚

辛若干率。等于甲乙丙若干率。而為甲乙丙同比最小數。七篇三十五己庚辛既

與甲乙丙為同比數。而甲乙丙與己庚辛之諸率相等。則甲與丙比。若己與

辛比。七篇十四甲與乙比。若己與庚比。而甲不度乙。則己不度庚。七篇界說二十故己非

一因一無數不可度故也。七篇界說一而已辛無等數。三篇故己不度辛。七篇界說十二

甲乙惟己與辛比。若甲與丙比。是以甲不度丙。準此可顯無數可度他數。

第七題 若干連比例率首率度尾率則亦度第二率。

解曰。甲乙丙丁若干連比例率。甲度丁。題言甲亦度乙。

論曰。如甲不度乙。則無數度他數。六篇與題不合。因甲度丁故也。故甲度丁。則

亦度乙。

第八題 彼此各兩數同比。此兩數間有若干連比例率。則彼兩數間亦有若干連比例率。

解曰。甲乙兩數間。有丙丁若干連比例率。戊己與甲乙同比。題言甲乙間有若干連比例率。戊己間亦有若干連比例率。

論曰。庚辛壬子若干率。與甲丙丁乙若干率等。亦為甲丙丁乙同比。最小數。七篇三。則首庚尾子無等數。三。本篇。甲丙丁乙既與庚辛壬子同比。而甲

丙丁乙若干率。與庚辛壬子若干率等。則甲與乙比。若庚與子比。七篇十四。惟甲與乙比。若戊與己比。故庚與子比。亦若戊與己比。乃庚子為同比。最小數。七篇二十。

三。同比。最小數。可度諸同比數。前率度前率。後率度後率。俱等。七篇十一。故庚度戊。若子度己。又庚度戊得若干。若辛壬各數度丑寅各數得若干。故庚辛壬子度戊

丑寅己俱等。而庚辛壬子與戊丑寅己同比。七篇界說二十。惟庚辛壬子與甲丙丁乙同

比。故甲丙丁乙亦與戊丑寅己同比。而甲丙丁乙為連比例率。故戊丑寅己亦為連比例率。是以甲乙間有若干連比例率。則戊己間亦有若干連比例率也。

第九題 首尾兩無等數之數。中間有若干連比例率。則其首尾其與一之中間。亦各有若干連比例率。

解曰。甲乙兩無等數之數。中間有丙丁若干連比例率。以戊為一。題
言甲乙間有若干連比例率。則甲戊及乙戊間。亦各有若干連比例

率。

論曰。己庚為甲丙丁乙二同比率。本篇辛壬子為三同比率。推至丑

寅卯辰若干同比率。與甲丙丁乙若干率等。即顯己自乘生辛。本篇

己乘辛生丑。庚自乘生子。庚乘子生辰。丑寅卯辰為己庚同比小最數。甲丙丁乙

亦為己庚同比最小數。丑寅卯辰諸率。與甲丙丁乙諸率等。而丑寅卯辰各數。與

甲丙丁乙各數等。故丑與甲等。辰與乙等。又己自乘生辛。己度辛得己中之若干

一。而戊度己亦得己中之若干。故戊度己與己度辛等。是以戊己之比。若己辛

之比。七篇界說二十又己乘辛生丑。則辛度丑得己中之若干。一而戊度己亦得己中之

若干。一故戊度己與辛度丑等。是以戊己之比。若辛丑之比。惟戊己之比。若己辛

之比。本論故戊與己己與辛。辛與丑俱同比。惟丑與甲相等。故戊與己己與辛。辛與

甲為同比。又戊與庚庚與子。子與乙為同比。理同。是以甲乙間有若干連比例率

則甲戊及乙戊間亦各有若干連比例率。

第十題 一與大小二數中間各有若干連比例率。則此二數間亦有若干連比例

乙二七

庚九

子一八

辛六

丁二

丙一

戊四

甲八

解曰丁戊及己庚各連比例率在甲丙乙丙間。題言甲丙乙丙中間各

有若干率則甲乙間亦有若干率。

論曰丁乘己得辛。辛乘丁得壬。辛乘己得子。丙與丁比。既若丁與戊比

則丙度丁若丁度戊。惟丙度丁得丁中之若干。故丁度戊亦得丁中

之若干。一則丁自乘得戊。又丙與丁比。既若戊與甲比。則丙度丁若戊

度甲。惟丙度丁得丁中之若干。故戊度甲亦得丁中之若干。一則丁乘戊生甲。

又己自乘生庚。己乘庚生乙。而丁自乘生戊。乘己生辛。則丁與己比。若戊與辛比。

又丁與己比。若辛與庚比。故戊與辛比。若辛與庚比。又丁乘戊生甲。壬故

戊與辛比。若甲與壬比。而戊與辛比。若丁與己比。故丁與己比。若甲與壬比。

又丁已乘辛生壬子。故丁與己比。若壬與子比。惟丁與己比。若甲與壬比。故

甲與壬比。亦若壬與子比。又己乘辛庚生子乙。故辛與庚比。若子與乙比。而辛與

庚比。若丁與己比。故丁與己比。亦若子與乙比。則丁與己甲與壬。壬與子子與乙。

俱同比。論即知甲壬子乙為連比例率。是以甲丙及乙丙間各有若干連比例率。

則甲乙間亦有若干連比例率。

第十一題 兩平方間有一連比例率。兩平方之比例。為其邊二次比例。

解曰甲乙為兩平方數。甲邊為丙乙邊為丁。題言甲乙間有一連比例率。甲與乙

解曰甲乙為兩平方數。甲邊為丙乙邊為丁。題言甲乙間有一連比例率。甲與乙

解曰甲乙為兩平方數。甲邊為丙乙邊為丁。題言甲乙間有一連比例率。甲與乙

之比。例為丙與丁二次比例。

乙九論曰。丁乘丙生戊。甲之邊既為丙。則丙自乘生甲。七篇界又下自乘生乙。理

丙三同丙乘丙丁。既生甲戊。則丙與丁比。若甲與戊比。七篇又丙乘丁生戊。而丁

戊六自乘生乙。則丙丁兩數乘丁。生戊乙兩數。故丙與丁比。若戊與乙比。七篇惟

甲四丙與丁比。若甲與戊比。故甲與戊比。亦若戊與乙比。是以甲乙間有一連比例率

戊。又甲與乙之比例。為丙與丁二次比例。蓋甲戊乙既為連比例率。則甲與乙之

比例。為甲與戊二次比例。惟甲與戊比。若丙與丁比。是以甲與乙之比例。為丙與

丁二次比例。

第十二題

兩立方間。有兩連比例率。兩立方之比例。為其邊三次比例。

乙二解曰。甲乙為兩立方數。丙為甲邊丁為乙邊。題言甲乙間有兩連比例率

甲一甲乙之比例。為丙丁三次比例。

乙二論曰。戊為丙之自乘數。己為丙乘丁數。庚為丁自乘數。辛壬為己乘丙丁

丙二數。夫甲為立方數。而丙為其邊。則丙自乘得戊。丙乘戊得甲。七篇界又丁

甲八自乘得庚。丁乘庚得乙。丙乘丙丁兩數得戊。己。則丙與丁比。若戊與己比。

七篇又丙與丁比。若己與庚比。理同。又丙乘戊己兩數。既得甲辛。則戊與己比。若

甲七甲與辛比。而戊與己比。若丙與丁比。故丙與丁比。若甲與辛比。又丙丁兩數乘己

既得辛壬則丙與丁比。若辛與壬比。七篇又丁乘己庚兩數得壬乙則己與庚比。若壬與乙比。惟己與庚比。若丙與丁比。故丙與丁比。亦若壬與乙比。則丙與丁甲與辛。辛與壬。壬與乙。皆同比。論本是以甲乙間有辛壬兩連比例率。又甲與乙之比。為丙與丁三次比例。蓋甲辛壬乙既為連比例率。則甲與乙之比。為丙與丁三次比例。惟甲與辛比。若丙與丁比。是以甲與乙之比。為丙與丁三次比例。

第十三題

若干連比例率。其各率自乘。所生各率。仍為連比例率。各率再乘。所生各率。仍為連比例率。三乘以上皆同。

丙八
乙六四

乙四
戊一六 丑三二

甲二
丁四

庚八寅一六卯三二辰一六巳二五戊五二

解曰。甲乙丙三率。甲與乙比。若乙與丙比。以甲乙丙各自乘。得丁戊己。以甲乙丙各乘丁戊己。得庚辛壬。題言丁戊己及庚辛壬。俱為連比例率。論曰。甲乘乙得子。子乘甲乙兩率。得寅卯。乙乘丙得丑。丑乘乙丙兩率。得辰巳。丁子戊及庚寅卯辛。為連比例率。與甲乙同比。本篇九而戊丑己及辛辰己壬為連比例率。與乙丙同理。同惟甲與乙比。若乙與丙比。故丁子戊與戊丑己同比。庚寅卯辛與辛辰己壬同比。惟丁子戊若干率與戊丑己若干率等。庚寅卯辛若干率與辛辰己壬若干率等。是以丁與戊比。若戊與己比。而庚與辛比。若辛與壬比。

第十四題

此平方數度彼平方數。則此平方邊度彼平方邊。又此平方邊度彼平

方邊。則此平方數度彼平方數。

解曰。甲乙兩平方數。其邊為丙丁。甲度乙。題言丙亦度丁。

乙丁論曰。戊為丙丁乘得數。則甲戊乙為連比例率。與丙丁同比。甲戊乙既為連

戊八比例率。而甲度乙。則甲亦度戊。本篇惟甲與戊比。若丙與丁比。故丙亦度丁。

甲四丙二七篇界又解曰。設丙度丁。題言甲亦度乙。

論曰。準前論甲戊乙為連比例率。與丙丁同比。丙與丁比。既若甲與戊比。而丙度

丁。則甲亦度戊。又甲戊乙為連比例率。是以甲亦度乙。本篇

第十五題 此立方數度彼立方數。則此立方邊度彼立方邊。又此立方邊度彼立

方邊。則此立方數度彼立方數。

解曰。立方數甲度立方數乙。丙為甲邊。丁為乙邊。題言丙度丁。

論曰。丙自乘得戊。丙乘丁得己。丁自乘得庚。己乘丙丁得辛壬。則戊己庚

及甲辛壬乙為連比例率。與丙丁同比。本篇九甲辛壬乙既為連比例率。

而甲度乙。則甲亦度辛。本篇惟甲與辛比。若丙與丁比。故丙度丁。七篇界

甲八丙二又解曰。丙度丁。題言甲度乙。

論曰。甲辛壬乙為連比例率。與丙丁同比。而丙度丁。丙與丁比。若甲與辛比。故甲

度辛。則甲亦度乙。本篇九

第十六題 此平方數不度彼平方數。則此平方邊不度彼平方邊。又此平方邊不度彼平方邊。則此平方數不度彼平方數。

一六 解曰。甲乙兩平方數。其邊為丙丁。甲不度乙。題言丙不度丁。
乙四 論曰。如丙度丁。則甲亦度乙。本篇十四 惟甲不度乙。故丙不度丁。

甲九 又解曰。丙不度丁。題言甲不度乙。

論曰。如甲度乙。則丙亦度丁。本篇十四 惟丙不度丁。故甲不度乙。

第十七題 此立方數不度彼立方數。則此立方邊不度彼立方邊。又此立方邊不度彼立方邊。則此立方數不度彼立方數。

乙三 解曰。立方數甲。不度立方數乙。丙為甲邊。丁為乙邊。題言丙不度丁。
甲二 論曰。如丙度丁。則甲亦度乙。本篇十五 惟甲不度乙。故丙不度丁。

又解曰。丙不度丁。題言甲不度乙。

論曰。如甲度乙。則丙亦度丁。本篇十五 惟丙不度丁。故甲不度乙。

第十八題 二相似面數間。有一連比例率。兩面數之比例。為相當兩邊二次比例。
解曰。甲乙二相似面數。丙丁為甲之兩邊。戊己為乙之兩邊。相似面數之相當邊同比。七篇界說 即丙與丁比。若戊與己比。題言甲乙間有一連比例率。甲乙之比。

例。為丙與戊二次比例。亦為丁與己二次比例。

論曰。丙與丁比。既若戊與己比。則轉理丙與戊比。若丁與己比。七篇甲既為

面數。其邊丙丁。則丁乘丙得甲。又戊乘己得己。理同。丁乘戊得庚。丁既乘丙

得甲。乘戊得庚。則丙與戊比。若甲與庚比。七篇惟丙與戊比。若丁與己比。故

丁與己比。若甲與庚比。又因戊乘丁得庚。乘己得己。故丁與己比。若庚與乙比。惟

丁與己比。若甲與庚比。故甲與庚比。若庚與乙比。甲庚乙為連比例率。是以甲乙

間有一連比例率。庚又甲與乙之比例。為丙戊二次比例。亦為丁己二次比例。蓋

甲庚乙既為連比例率。則甲乙之比例。為甲庚二次比例。因甲與庚丙與戊。丁與

己。皆同比。是以甲乙之比例。為丙戊二次比例。亦為丁己二次比例。

第十九題 二相似體數。有兩連比例率。二體數之比例。為相當兩邊三次比例。

解曰。甲乙為二相似體數。丙丁戊為甲之三邊。己庚辛為乙之三邊。相似體數之

相當邊既同比。七篇則丙與丁比。若己與庚比。丁與戊比。若庚與辛比。題言

甲乙間有兩連比例率。甲乙之比例。為丙與己。丁與庚。戊與辛。三次比例。

論曰。丙丁之比。既若己庚之比。而丙乘丁得壬。己乘庚得子。則壬子為同比之面

數。此兩面數間有一連比例率。丑。本篇則丁乘己得丑。本篇壬與丑。丑與子。為同

比。丁乘丙既得壬。而乘己得丑。則丙與己比。若壬與丑比。七篇惟壬與丑比。若丑

甲三 寅六 卯一 二 乙二 四 〇
 壬六 丑一 二 子二 四 庚六 辛一 〇
 丙二 丁三 戊五 己四

與子比故士丑子為連比例率與丙己同比丙與丁比既若己與庚比則
 屬理丙與己比若丁與庚比七篇又丁與戊比既若庚與辛比則屬理丁
 與庚比若戊與辛比故壬丑子為連比例率偕丙與己丁與庚戊與辛俱
 同比戊辛各乘丑得寅卯甲既為體數而其邊為丙丁戊則丙丁戊三數
 連乘得甲而壬為丙丁乘得數故戊乘壬得甲又子為己庚乘得數辛乘
 子得乙戊乘壬既得甲而乘丑得寅則壬與丑比若甲與寅比七篇惟壬
 與丑丙與理同己丁與庚戊與辛皆同比故丙與己丁與庚戊與辛甲與寅皆
 同比又戊辛各乘丑既得寅卯則戊與辛比若寅與卯比惟戊與辛丙與己丁
 與庚俱同比故丙與己丁與庚比若甲與寅寅與卯比又辛乘丑既得卯而乘
 子得乙則丑與子比若卯與乙比惟丑與子比若丙與己丁與庚戊與辛比故
 丙與己丁與庚戊與辛比若甲與寅寅與卯卯與乙比是以甲寅卯乙為連比
 例率與體數之邊同比又甲乙之比例為同比兩邊三次比例或丙與己或丁與
 庚或戊與辛俱同蓋甲寅卯乙既為連比例率則甲乙之比例為甲與寅三次比
 例甲與寅丙與己丁與庚戊與辛俱同比論本故甲與乙之比例為諸相當邊三次
 比例

第二十題 兩數間有一連比例率則兩數為相似面數

解曰。甲乙兩數間有一連比例率。丙題言甲乙為相似面數。
 論曰。以丁戊為甲丙同比最小數。七篇三則丁與戊比。若甲與丙比。故丁度
 甲若戊度丙。設己中有若干一。若甲中有若干丁。則己乘丁得甲。而乘戊得
 丙。故甲為面數。其邊為丁己。又丁戊亦為丙乙同比最小數。則丁度丙。若戊度乙
 而戊度乙得若干。與庚中之若干一等。則庚乘戊得乙。而乙為面數。其邊為戊庚
 故甲乙為兩面數。亦為相似面數。蓋己庚乘戊得丙乙。則己與庚比。若丙與乙比。
 故甲乙與丙比。若丁與戊比。故丁與戊比。若己與庚比。是以甲乙為相似面數。
七篇惟丙與乙比。若丁與戊比。故丁與戊比。若己與庚比。是以甲乙為相似面數。
七篇界說其相當邊各同比。

第二十一題 兩數間有兩連比例率。則兩數為相似體數。

解曰。甲乙兩數間有丙丁兩連比例率。題言甲乙為相似體數。
 論曰。戊己庚為甲丙丁同比最小數。七篇三則首戊尾庚無等數。本篇戊
 庚間既有一連比例率。己則戊庚為相似面數。本篇而戊之兩邊為辛壬。
 庚之兩邊為丑寅。則戊己庚連比例率。皆辛與丑壬與寅同比。戊己庚既
 為甲丙丁同比最小數。則平理戊與庚比。若甲與丁比。七篇戊庚為無等
 數之數。即為同比最小數。七篇二最小數可度諸同比數。前率度前率。後
 率度後率。俱等。七篇二故戊度甲。若庚度丁。而戊度甲得若干。與丁中之