

土木
四五期

1940. 4-5.

土木 信源

第四卷期合刊

中華民國三十三年二月出版

- 梁圖之理論與應用 羅河
國戰時公路點綴之設施 李學海
路交叉處之設計 胡擴根
工程設計新法(續) 張志成
屋構架風壓應力之分析 鄭可權
螺旋曲線之研究 蔣耀洲
架斜度與變位之分析 徐福躬

用

會務報告

會員錄

編後

中華民國三十三年二月

唐山土木工程學會編

貴州平越

國立交通大學唐山工程學院

桂林民生有限公司

桂林民生路二百十三號

電報掛號：一〇七三

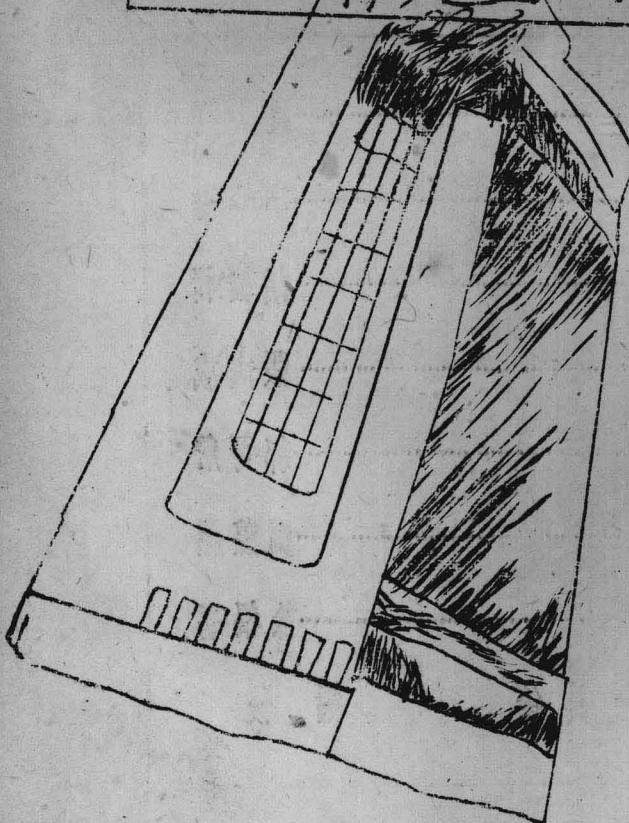
軍事工程

橋涵隧道

房屋建築

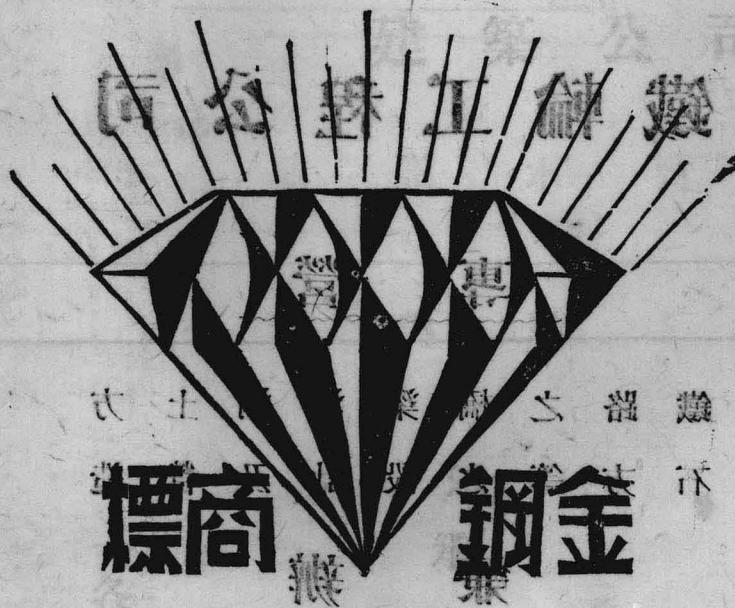
路基土方

頂業營



貴州水泥股份有限公司出品

堅 固 任 重



品質優良

凡建築水泥工程請用金鋼牌水泥 谷草車土木工器具 用途

水泥製品

防空設備

水池溝渠

高樓大廈

水閘堤壩

橋樑涵洞

機器地脚

廠址：貴陽頭橋 電報掛號：三一三六

貴水利司辦事處

金職水司

品 賽 雜 品

望 國 王 重

鐵輪工程公司

專營
鐵路之橋梁涵洞及土方
石方等之工程
金職兼辦

各項木工工程用

機器

水閘
鋼鐵
漆油
漆油

高爐
大瓦

瓦
鐵
漆油

水
漆油
漆油

水
漆油
漆油

六三一三；號牌號貴；此旗

森茂

同報公司

建築公司

資本

興業公司

承辦工程

程

包工

包屋

包地

包面

包牆

包油

木工

式土營

式潤

式牆

式漆

式漆

式漆

式漆

種

兼

水

深

挖

土

石

沙

土

石

沙

土

石

新

舊

深

挖

土

石

沙

土

石

沙

土

石

沙

各

項

固

圍

王

之

物

其

他

工

業

務

務

湯

記

廠

三

號

本廠成立

於茲承造大廠工程

城牆柏油

鐵

鏈

繩

繩

茹 森

大華工程公司

臣公樂
奏

資 本 雄 厚

規 模 宏 大

承辦

類

卷下

拾

六

石廠賬水

堰

貞
壩

房

方
下

卷四

1

1

面

酒

四

大華大華大華大華大華大華大華大華大華大華大華大華大華大華大華

大華

華大華

湯仁記營造廠

地址貴陽市環城東路九一號

電報掛號三二八二號

本廠成立十載於茲承造大小工程不下數百處其肇
肇大者如長沙市府自流井房屋水塔環城路柏油路
面湖南鍊鋅廠全部廠舍湖南大學館學館發電廠機
械工場及辰谿全部校舍循道會禮拜堂及辦公室資
原委會中央瓷廠中央無線電機廠全部廠舍湘潭下攝
司中央電工器材廠全部職工宿舍四川宜賓中央電
瓷廠全部廠舍粵漢鐵路株韶段橋涵土石方沅陵中
學全部校舍等工程均能如期竣工深荷各業主之稱
許年六月由川遷筑又承辦貴企公司及其他工程
頗多近更由湘添召技工擴展業務如蒙賜
賜顧無任歡迎

大中華樂器公司

恒公書江興州

二十一、清江之水

建 築 公 司

專營

延昌公集

協興工程公司

臣公樂書

三

振昌公司

承辦下列工程

鐵路公路索橋
涵隧道路面土
石方及各種廠
房水閘堰壩上
下水道等工程

共線圖之理論與應用

羅 河

目 次

一、共線圖之現狀
二、近數年之進展
三、附 註

1. 何謂共線圖
2. 共線行列式
3. 簡單算式之共線圖
4. 共線圖之變形
5. 實例

6. 過去理論上之缺點
7. 共線關係式之普通形狀
8. 共線行列式之推求
9. 共線行列式之推求（續）
10. 同迹共線圖
11. 同迹共線圖之關係式
12. $F_{1 \cdot 1 \cdot 1} = 0$ 之同迹共線行列式
13. $F_{2 \cdot 1 \cdot 1} = 0$ 之同迹共線行列式
14. $F_{2 \cdot 1 \cdot 1} = 0$ 之同迹共線行列式（續）
15. $F_{3 \cdot 1 \cdot 1} = 0$ 之同迹共線行列式
16. 共同軌跡之形狀
17. 同迹共線圖之實例
18. 累共線圖，不定共線圖，聯立共線圖
19. 不定共線圖與聯立共線圖之用法
20. 實例
21. 結論

乙、近數年之進展

1. 何謂共線圖
2. 共線行列式
3. 簡單算式之共線圖
4. 共線圖之變形
5. 實例
6. 過去理論上之缺點
7. 共線關係式之普通形狀
8. 共線行列式之推求
9. 共線行列式之推求（續）
10. 同迹共線圖
11. 同迹共線圖之關係式
12. $F_{1 \cdot 1 \cdot 1} = 0$ 之同迹共線行列式
13. $F_{2 \cdot 1 \cdot 1} = 0$ 之同迹共線行列式
14. $F_{2 \cdot 1 \cdot 1} = 0$ 之同迹共線行列式（續）
15. $F_{3 \cdot 1 \cdot 1} = 0$ 之同迹共線行列式
16. 共同軌跡之形狀
17. 同迹共線圖之實例
18. 累共線圖，不定共線圖，聯立共線圖
19. 不定共線圖與聯立共線圖之用法
20. 實例
21. 結論

丙、附 註

甲、共線圖之現狀

1. 何謂共線圖

簡單共線圖是表示三元算式的圖形，其主要部份為三條軌迹，分別表明各變數之值。若以直線與軌迹相交則三交點上所記變數之值即為滿足原算式之一組數值。此種特性在應用方面產生一個奇蹟；就是有很多算式經作成共線圖後可以極簡單手續解算之。如附圖一即為算式

$$(S) y = x^n$$

$$O = (v, u, t)$$

的共線圖，利用此圖，不管 x, y, n 中那兩變數之值為已知數，其他一量之值可立刻求得。當然這裏所謂求得是有精粗之差。凡設計得當，而圖形尺寸寬長約一尺者，其所決定之數值即可準確至三位實數。

共線圖在英文稱為 Alignment chart，也有稱為 Nomogram 的。其實 Nomogram 是比較廣義的名辭，牠包括共線圖以及其他很多別的圖形。所以有人把後者譯為列線圖而以共線圖專代表 Alignment chart。共線圖為列線圖中之最主要者，本文所論以此為限。

十八世紀末葉已有採用圖表以助計算者，但共線圖觀念之具體形成則始於 Soreau 與 D.

Ocagne 等氏。此二氏均本世紀初對於共線圖之理論有所發表；而阿肯氏 (d'Ocagne) 之列線圖解法通論 (Traité de Nomographie) 尤為脍炙人口。隨後英美入氏雖有論述，但多以阿肯氏著作為藍本。其中比較完善者當推 1932 年出版英人 H.J. Alcock 與 J. Reginald Jones 合著之列線圖論 (The Nomogram)。近聞有日人取混凝土學中各種公式歷時十餘載作成列線圖以應工程師之需要，亦可見共線圖之應用將日見推廣也。

2. 共線行列式

共線圖之軌迹可依幾何關係或座標距作之，近代趨勢漸以座標制為主。在座標制中任一軌迹均由兩個參變方程式決定其上各點之座標距；概括言之，軌迹 t 之參變方程式可以

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$$

代表之，其中 $f_1(t)$ 與 $f_2(t)$ 各為 t 之某種函數；同樣圖 A 中其他兩軌迹亦各有表示座標距之參變方程式

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u);$$

$$x = f_1(v), \quad y = f_2(v);$$

這裏所用記號 $f_1(u)$, $f_2(v)$ 僅僅表示函數而無其他附帶意義，故

$f_1(t)$, $f_1(u)$, $f_1(v)$ 毫無形狀相同的含義。

T_t , F_u , F_v 三點共線時，其座標距之關係可以算式

$$\frac{X_t - X_u}{Y_t - Y_u} = \frac{X_t - X_v}{Y_t - Y_v}$$

表示之；亦可以行列式

$$\begin{vmatrix} X_t & Y_t & 1 \\ X_u & Y_u & 1 \\ X_v & Y_v & 1 \end{vmatrix} = 0$$

表示之；但 X_t , Y_t , ..., X_v , Y_v 各有其等量 $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_1(v)$, $f_2(v)$ ，故得

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & 1 \\ f_1(u) & f_2(u) & 1 \\ f_1(v) & f_2(v) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(1) 式名曰共線行列式。作算式

$$f(t, u, v) = 0 \quad (2)$$

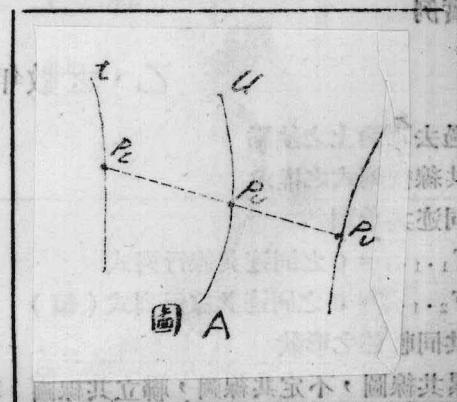
之共線圖時，必需先求得其共線行列式，共線行列式中可參入若干常數而不改其性質，如

(1) 式可寫為下列形狀，

$$\begin{vmatrix} L_1 f_1(t) & L_2 f_2(t) & 1 \\ L_1 f_1(u) & L_2 f_2(u) & 1 \\ L_1 f_1(v) & L_2 f_2(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.1)$$

共線圖之大小，由常數 L_1 與 L_2 決定；擇定此兩常數，乃可作成合於預定尺寸之共線圖，故

(1.1) 名曰作圖行列式。



經上分析可得作共線圖之過程如下：

算式 → 共線行列式 → 作圖行列式 → 共線圖 $(v)_{11}$

3. 簡單算式之共線圖

前人論共線圖多由想像中可能之共線圖以推求其相當算式，其所得結果可歸納如下：

$$(3.1) \quad f(t) + f(u) + f(v) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & f(t) & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}f(u) & 1 & 1 \\ -1 & f(v) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (v)_{11B}$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_2 f(t) & (j)_1 \\ 0 & -\frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} f(u) & (u)_{11} \\ \frac{a_1 b_2}{a_2} & b_2 f(v) & (v)_{11} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} t & u & v \\ \hline (v)_{11} - (u)_{11} & (j)_1 & \\ (v)_{11} - (u)_{11} & & \end{array} = (j)_1$$

$$(3.2) \quad f(t) = f(u)f(v) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -f(t) & 1 \\ \frac{1}{1+f(u)} & 0 & 1 \\ 0 & f(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (v)_{11B} - \frac{1B}{(v)_{11}} = (j)_1$$

$$\leftarrow 0 = ((j)_1 - (j)_2) (v)_{11} + ((j)_2 - (v)_{11}) (u)_{11} + ((v)_{11} - (u)_{11}) (j)_1 \quad (T.C)$$

$$\leftarrow 0 = \begin{vmatrix} a_1 & (j)_1 - a_2 f(t) & 1 \\ \frac{a_1 b_2}{a_2 f(u) + b_2} & (v)_{11B} & (u)_{11B} \\ 0 & 1 & (v)_{11B} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} v & j & t \\ \hline (v)_{11} & (u)_{11} & \\ (v)_{11} & & \end{array}$$

$$(3.3) \quad f(t) = k + f(u)f(v) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & f(t) & 1 \\ \frac{1}{f(u)+1} & \frac{k}{f(u)+1} & 1 \\ 0 & -f(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 f(t) & 1 \\ \frac{a_1 b_2}{a_2 f(u) + b_2} & \frac{a_2 b_2 k}{a_2 f(u) + b_2} & 1 \\ 0 & -b_2 f(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} t & u & \\ \hline v & & \end{array}$$

$$(3.4) \quad f(t) = f_1(u)f(v) + f_2(u) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & f(t) & 1 \\ \frac{1}{f_1(u)+1} & \frac{f_2(u)}{f_1(u)+1} & 1 \\ 0 & -f(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(3.5) \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \\ \frac{a_1 b_2}{a_2 f_1(u) + b_2} & \frac{a_2 b_2 f_2(u)}{a_2 f_1(u) + b_2} & 1 \\ 0 & -b_2 f(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} t & u & \\ \hline v & & \end{array}$$

$$(3.5) f(t) = -\frac{f_1(u)f(v)}{f(v)-f_2(u)} \rightarrow \begin{vmatrix} f(t) & 0 & 1 \\ f_1(u) & f_2(u) & 1 \\ 0 & f(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{圖形為一平行四邊形} \quad \text{圖形為一平行四邊形}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1f(t) & 0 & 1 \\ a_1f_1(u) & a_2f_2(u) & 1 \\ 0 & a_2f(v) & 1 \end{array} \right| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow 0 = (v)_1 + (u)_1 + (t)_1 \quad \text{圖形為一平行四邊形}$$

$$(3.6) f(t) = \frac{f_2(u)-f_2(v)}{f_1(u)-f_1(v)} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & f(t) & 1 \\ \frac{1}{f_1(u)} & f_2(u) & 1 \\ \frac{1}{f_1(v)} & f_2(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & f(t) & 1 \\ \frac{1}{f_1(u)} & f_2(u) & 1 \\ \frac{1}{f_1(v)} & f_2(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 \quad \text{圖形為一平行四邊形}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2f(t) & 1 \\ \frac{a_1}{f_1(u)} & \frac{a_2f_2(u)}{f_1(u)} & 1 \\ \frac{a_1}{f_1(v)} & \frac{a_2f_2(v)}{f_1(v)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow (v)_1 + (u)_1 + (t)_1 \quad \text{圖形為一平行四邊形}$$

$$(3.7) f_1(t) \cdot \{f_2(u)-f_2(v)\} + f_1(u) \cdot \{f_2(v)-f_2(t)\} + f_1(v) \cdot \{f_2(t)-f_2(u)\} = 0 \rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{ccc} f_1(t) & f_2(t) & 1 \\ f_1(u) & f_2(u) & 1 \\ f_1(v) & f_2(v) & 1 \end{array} \right| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} b_1f_1(t) & a_2f_2(t) & 1 \\ a_1f_1(u) & a_2f_2(u) & 1 \\ a_1f_1(v) & a_2f_2(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 \quad \text{圖形為一平行四邊形}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & (t)_1 & 1 \\ 1 & 1 + (u)_1 & 1 \\ 1 & 1 + (v)_1 & 1 \end{array} \right| \leftarrow (v)_1 + (u)_1 + (t)_1 \quad \text{圖形為一平行四邊形}$$

上列各式中 a_1, a_2, b_1, b_2 之值，均可自由擇定，以使全圖得有預定之形狀與尺寸。

4. 共線圖之變形

共線圖之形狀可以幾何投影法改變之；亦可以解析計算法改變之。就結果精確言，解析法較優。解析法者改變作圖行列式之法也；(1)式可以另一三級行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & (t)_1 \\ c_1 & c_2 & (u)_1 \end{vmatrix} \leftarrow 0 = \begin{vmatrix} 1 & (t)_1 & 1 \\ 1 & (v)_1 & 1 \\ 1 & 1 + (u)_1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

乘之則依行列式原理，其結果可寫為下列形狀：

$$\begin{vmatrix} a_1f_1(t) + a_2f_2(t) + a & (v)_1f_1(t) + b_2f_2(t) + b \\ c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + c & c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + c \end{vmatrix} \quad 1 \quad (1.2)$$

$$\begin{vmatrix} a_1f_1(u) + a_2f_2(u) + a & (b)_1f_1(u) + b_2f_2(u) + b \\ c_1f_1(u) + c_2f_2(u) + c & c_1f_1(u) + c_2f_2(u) + c \end{vmatrix} \quad 1 \quad (1.2)$$

$$\begin{vmatrix} a_1f_1(v) + a_2f_2(v) + a & b_1f_1(v) + b_2f_2(v) + b \\ c_1f_1(v) + c_2f_2(v) + c & c_1f_1(v) + c_2f_2(v) + c \end{vmatrix} \quad 1 \quad (1.2)$$

其中 a, b, c, a_1, \dots, c_2 等為數值待決之常數。(1.2) 之共線圖仍代表原算式，但其形狀則隨常數 a, b, c, a_1, \dots, c_2 等而改變。

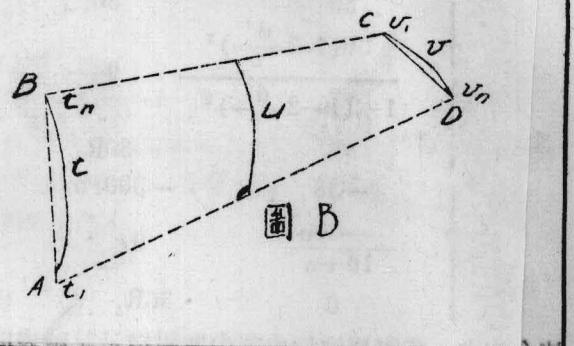
設(1)之共線圖形狀崎嶇，如圖B所示，並設其輪廓 $A B C D$ 係由 $t=t_1, t=t_n, v=v_1, v=v_n$ 所決定，欲求其形狀整齊，可先令(1.2)之共線圖之輪廓 $A'B'C'D'$ 為單位正方形，即令其四頂點有下列座標距：

$$A' (t=t_1), \quad x=0, \quad y=0;$$

$$B' (t=t_n), \quad x=0, \quad y=1;$$

$$C' (v=v_1), \quad x=1, \quad y=1;$$

$$D' (v=v_n), \quad x=1, \quad y=0.$$



亦即

$$\begin{cases} \frac{a_1 f_1(t_1) + a_2 f_2(t_1) + a}{c_1 f_1(t_1) + c_2 f_2(t_1) + c} = 0, \\ \frac{a_1 f_1(t_n) + a_2 f_2(t_n) + a}{c_1 f_1(t_n) + c_2 f_2(t_n) + c} = 0, \\ \frac{a_1 f_1(v_1) + a_2 f_2(v_1) + a}{c_1 f_1(v_1) + c_2 f_2(v_1) + c} = 1, \\ \frac{a_1 f_1(v_n) + a_2 f_2(v_n) + a}{c_1 f_1(v_n) + c_2 f_2(v_n) + c} = 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

上八式中計有九個數值待決之常數 a, b, c, \dots, c_2 。令任一常數為合宜之數值，即可推算其他八量之值。所以得各量之值代入(1.2)式並以合宜之常數 L_1, L_2 ，乘其一二項（平行），則其共線圖即可狀如預定尺寸之長方形。

5. 實例

目前各家所論關於共線圖者約如上述，現有實例可以圖1, 圖2, 圖9 概括之。圖1之作圖行列式為(公分為單位長度)

$$\frac{10}{1+b} \quad 0 \quad 1 \quad | \quad \text{邊長三倍合量中央} (a)$$

$$\frac{10}{1+x^2} \quad \frac{10x}{1+x^2} \quad 1 \quad | \quad \text{邊長三倍合量左端} (b)$$

$$0 \quad \frac{10}{-a} \quad 1 \quad | \quad \text{邊長三倍合量右端} (c)$$

圖2係依 E. T. Whittaker 之設計所作成，其作圖行列式為

+ (v)²(u)L₁A + (v)L₂A + (u)L₁A + A

圖9係有下列三個作圖行列式

其圖共二，大數列於外側圖共二 (S. 4)。適當之失傳圖共二 (S. 5)。其圖共二 (S. 6)。其圖共二 (S. 7)。

$\frac{38k}{10+3+k}$ $\frac{3k^2(3-2k)}{A+3+k}$ $\frac{30R_1}{A+3+k}$ $\frac{30R_2}{-300Po}$ $\frac{30R_1}{10+n}$

單數圖共二 (S. 8)。其圖共二 (S. 9)。其圖共二 (S. 10)。其圖共二 (S. 11)。其圖共二 (S. 12)。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 38 & 30R_1 & 1 \\ \hline & \frac{38(1-2\frac{d'}{t})^2}{1+(1-2\frac{d'}{t})^2} & 0 & 1 \\ \hline & 0 & -30R_2 & 1 \\ \hline & -38 & -300Po & 1 \\ \hline & \frac{-38n}{10+n} & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 30R_1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

連合作成。各圖用法均由圖中所附指示記號表明之。

乙、近數年之進展

6. 過去理論上之缺點

共線圖以表示算式而利解算爲目的，故問題之主體爲待解之算式。由共線行列式而至作圖行列式而至共線圖以及共線圖之如何運用等均不成爲問題，求作某一算式之共線圖時，吾人之間問題集中於如何歸化該式至共線行列式之形狀，欲求此問題之合理解決，必須詳究共線圖之理論以決定。

(a) 共線圖所能表示者以何種算式爲限。
其範圍 (a) 共線圖所能表示者以何種算式爲限。
其範圍 (b) 共線圖所能表示之算式之最普通形狀。

(c) 如何歸化具有該普通形狀之算式至共線行列式。
上三問題未經前人加以注意，但一經指出，其重要性即不可忽視；若置此不論而言共線圖，是乃舍本求末之類也。

7. 共線關係式之普通形狀

共線關係式如 (1) 式係由 t, u, v 之單獨函數 $f_1(t), f_2(t), f_1(u), f_2(u), f_1(v), f_2(v)$ 所組合而成。經加減乘三手續展開後，行列式乃化爲普通三元算式 $f(t, u, v) = 0$ 故凡算式之可化爲共線行列式者，其外表形狀必具有下列三特點：

(a) 其構成分子爲各變數之單獨函數。

(b) 各單獨函數間僅有加減乘除四種關係，如 $f_1(t)f_2(t) + f_1(t)f_2(u) + f_1(t)f_2(v) + f_1(u)f_2(t) + f_1(u)f_2(u) + f_1(u)f_2(v) + f_1(v)f_2(t) + f_1(v)f_2(u) + f_1(v)f_2(v)$ 。

(c) 式中僅含有三個變數。

算式之是否合於上述三條件，可一望而知。其形式之繁簡，即視其中分子（各變數之單獨函數）數目之多寡，其最普通之形式爲：

$$f(t)f(u)f(v) + C_v f(t)f(u) + C_u f(t)f(v) + C_t f(u)f(v) + K_t f(t) + K_u f(u) + K_v f(v) +$$

$$C = 0 \dots F_{1,1,1}$$

$$\text{或 } A + A_1 f(u) + A_2 f(v) + A_3 f(u)f(v) +$$

$$A_4 f(u)^2 + A_5 f(v)^2 + A_6 f(u)^3 + A_7 f(v)^3 + A_8 f(u)^2 f(v) + A_9 f(u) f(v)^2 + A_{10} f(v)^3$$