土木

四五期

1944.4-5.

土木

侯家源

第四五期合刊

中華民國三十三年二月出版

唐山土木工程學會編

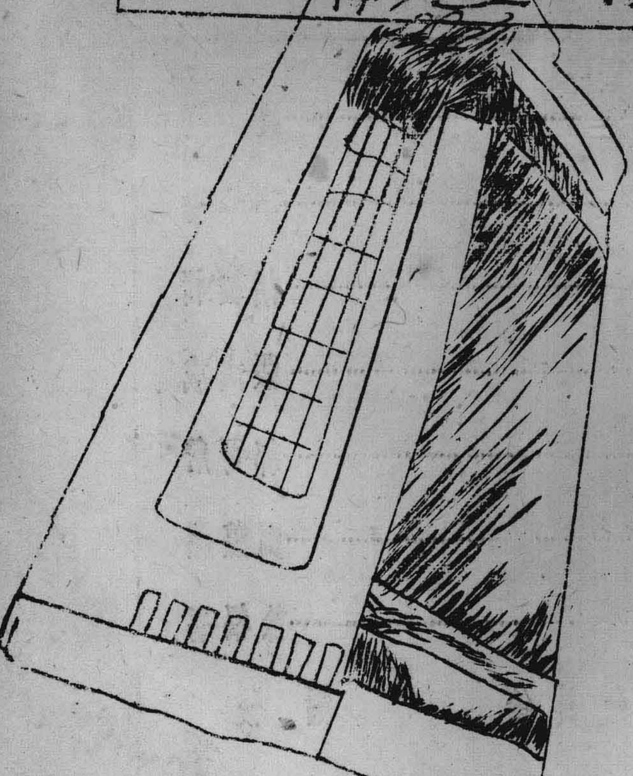
貴州平越　國立交通大學唐山工程學院

中華民國卅三年九月

華新建華股份有限公司

營業項目

軍事工程
橋涵隧道
房屋建築
路基土石方



桂林民生路二百十三號
電報掛号：一〇七三

大華工程公司

建築公司

資本雄厚

承辦

承包各種新式屋營木工程

各項

協興工程公司

承包

1. 路基土石方工程
2. 橋梁工程
3. 隧道工程

振昌公司

承辦下列工程

鐵路公路梁橋
涵隧道路面土
石方及各種廠
房水閘堰壩上
下水道等工程

共線圖之理論與應用

羅　河

目　次

甲、共線圖之現狀

乙、近數年之進展

丙、附　　註

甲、共線圖之現狀

1.何謂共線圖

簡單共線圖是表示三元算式的圖形，其主要部份爲三條軌迹，分別表明各變數之值。若以直線與軌迹相交則三交點上所記變數之值卽爲滿足原算式之一組數值。此種特性在應用方面產生一個奇蹟；就是有很多算式經作成共綫圖後可以極簡單手續解算之。如附圖一卽爲算式

$$y=x^n$$

的共綫圖，利用此圖，不管 x, y, n 中那兩變數之値爲已知數，其他一量之值可立刻求得。當然這裏所謂求得是有精粗之差。凡設計得當，而圖形尺寸寬長約一尺者，其所決定之數值卽可準確至三位實數。

共綫圖在英文稱爲 Alignment chart，也有稱爲 Nomogram 的。其實 Nomogram 是比較廣義的名辭，牠包括共線圖以及其他很多別的圖形。所以有人把後者譯爲列綫圖而以共線圖專代表 Alignment chart。共線圖爲列線圖中之最主要者，本文所論以此爲限。

十八世紀末葉已有採用圖表以助計算者，但共線圖觀念之具體形成則始於 Soreau 與 D'

Ocagne 等氏。此二氏均本世紀初對於共線圖之理論有所發表；而阿肯氏 (d'Ocagne) 之列線圖解法通論 (Traite de Nomographie) 尤爲膾炙人口。隨後英美人氏雖有論述，但多以阿肯氏著作爲藍本。其中比較完善者當推1932年出版英人 H.J. Allcock與J. Reginald Jones合著之列線圖論 (The Nomogram)。近聞有日人取混凝土學中各種公式歷時十餘載作成列線圖以應工程師之需要，亦可見共線圖之應用將日見推廣也。

2.共線行列式

共線圖之軌迹可依幾何關係或座標距作之，近代趨勢漸以座標制爲主。在座標制中任一軌迹均由兩個參變方程式決定其上各點之座標距；概括言之，軌迹 t 之參變方程式可以

$$x=f_1(t), \qquad y=f_2(t)$$

代表之，其中 $f_1(t)$ 與 $f_2(t)$ 各爲 t 之某種函數；同樣圖 A 中其他兩軌迹亦各有表示座標距之參變方程式

$$x=f_1(u), \qquad y=f_2(u);$$

$$x=f_1(v), \qquad y=f_2(v);$$

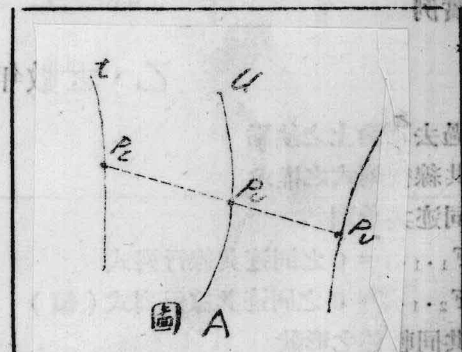


圖 A

這裏所用記號 $f_1(u)$，$f_2(v)$ 僅僅表示函數而無其他附帶意義，故 $f_1(t)$，$f_1(u)$，$f_1(v)$ 毫無形狀相同的含義。

P_t，P_u，P_v 三點共線時，其座標距之關係可以算式

$$\frac{X_t - X_u}{Y_t - Y_u} = \frac{X_t - X_v}{Y_t - Y_v}$$

表示之；亦可以行列式

$$\begin{vmatrix} X_t & Y_t & 1 \\ Y_u & Y_u & 1 \\ X_v & Y_v & 1 \end{vmatrix} = 0$$

表示之；但 X_t，Y_t，……，Y_v 各有其等量 $f_1(t)$，$f_2(t)$，……，$f_2(v)$，故得

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & 1 \\ f_1(u) & f_2(u) & 1 \\ f_1(v) & f_2(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

(1)式名曰共線行列式。作算式

$$f(t,u,v)=0 \qquad (2)$$

之共線圖時，必需先求得其共線行列式，共線行列式中可參入若干常數而不改其性質，如(1)式可寫爲下列形狀，

$$\begin{vmatrix} L_1f_1(t) & L_2f_2(t) & 1 \\ L_1f_1(u) & L_2f_2(u) & 1 \\ L_1f_1(v) & L_2f_2(v) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1\cdot 1)$$

共線圖之大小，由常數 L_1 與 L_2 決定；擇定此兩常數，乃可作成合於預定尺寸之共線圖，故(1·1)名曰作圖行列式。

經上分析可得作共線圖之過程如下：

算式──→共線行列式──→作圖行列式──→共線圖

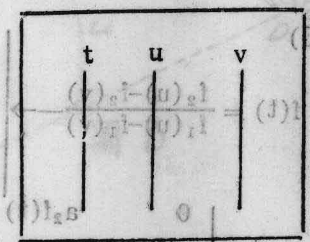
3. 簡單算式之共線圖

前人論共線圖多由想像中可能之共線圖以推求其相當算式，其所得結果可歸納如下：

(3.1)

$$f(t)+f(u)+f(v)=0\longrightarrow\begin{vmatrix}-1 & f(t) & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}f(u) & 1\\ -1 & f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$

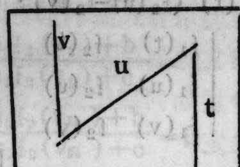
$$\begin{vmatrix}-a_1 & a_2f(t) & 1\\ 0 & -\dfrac{a_2\ b_2}{a_2+b_2}f(u) & 1\\ \dfrac{a_1b_2}{a_2} & b_2f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$



(3.2)

$$f(t)=f(u)\,f(v)\longrightarrow\begin{vmatrix}1 & -f(t) & 1\\ \dfrac{1}{1+f(u)} & 0 & 1\\ 0 & f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & -a_2f(t) & 1\\ \dfrac{a_1\ b_2}{a_2\ f(u)+b_2} & 0 & 1\\ 0 & b_2f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$



(3.3)

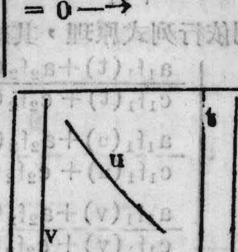
$$f(t)=k+f(u)f(v)\longrightarrow\begin{vmatrix}1 & f(t) & 1\\ \dfrac{1}{f(u)+1} & \dfrac{k}{f(u)+1} & 1\\ 0 & -f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2f(t) & 1\\ \dfrac{a_1b_2}{a_2\,f(u)+b_2} & \dfrac{a_2b_2k}{a_2\,f(u)+b_2} & 1\\ 0 & -b_2f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$

(3.4)

$$f(t)=f_1(u)f(v)+f_2(u)\longrightarrow\begin{vmatrix}1 & f(t) & 1\\ \dfrac{1}{f_1(u)+1} & \dfrac{f_2(u)}{f_1(u)+1} & 1\\ 0 & -f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$

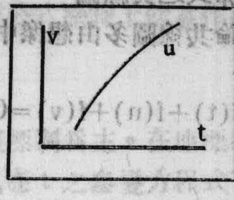
$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2f(t) & 1\\ \dfrac{a_1b_2}{a_2\,f_1(u)+b_2} & \dfrac{a_2b_2f_2(u)}{a_2f_1(u)+b_2} & 1\\ 0 & -b_2f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$



(3.5)

$$f(t)=\frac{f_1(u)f(v)}{f(v)-f_2(u)}\rightarrow\begin{vmatrix} f(t) & 0 & 1\\ f_1(u) & f_2(u) & 1\\ 0 & f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$

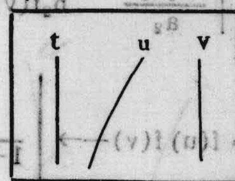
$$\begin{vmatrix} a_1f(t) & 0 & 1\\ a_1f_1(u) & a_2f_2(u) & 1\\ 0 & a_2f(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$



(3.6)

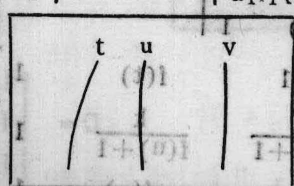
$$f(t)=\frac{f_2(u)-f_2(v)}{f_1(u)-f_1(v)}\longrightarrow\begin{vmatrix} 0 & f(t) & 1\\ \frac{1}{f_1(u)} & \frac{f_2(u)}{f_1(u)} & 1\\ \frac{1}{f_1(v)} & \frac{f_2(v)}{f_1(v)} & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2f(t) & 1\\ \frac{a_1}{f_1(u)} & \frac{a_2f_2(u)}{f_1(u)} & 1\\ \frac{a_1}{f_1(v)} & \frac{a_2f_2(v)}{f_1(v)} & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$



(3.7) $f_1(t)\{f_2(u)-f_2(v)\}+f_1(u)\{f_2(v)-f_2(t)\}+f_1(v)\{f_2(t)-f_2(u)\}=0\longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & 1\\ f_1(u) & f_2(u) & 1\\ f_1(v) & f_2(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow\begin{vmatrix} a_1f_1(t) & a_2f_2(t) & 1\\ a_1f_1(u) & a_2f_2(u) & 1\\ a_1f_1(v) & a_2f_2(v) & 1\end{vmatrix}=0\longrightarrow$$



上列各式中 a_1，a_2，b_2，之值，均可自由擇定，以使全圖得有預定之形狀與尺寸。

4. 共線圖之變形

共線圖之形狀可以幾何投影法改變之；亦可以解析計算法改變之。就結果精確言，解析法較優。解析法者改變作圖行列式之法也；(1)式可以另一三級行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a\\ b_1 & b_2 & b\\ c_1 & c_2 & c\end{vmatrix}\neq 0$$

乘之則依行列式原理，其結果可寫為下列形狀：

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1f_1(t)+a_2f_2(t)+a}{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+c} & \frac{b_1f_1(t)+b_2f_2(t)+b}{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+c} & 1\\ \frac{a_1f_1(u)+a_2f_2(u)+a}{c_1f_1(u)+c_2f_2(u)+c} & \frac{b_1f_1(u)+b_2f_2(u)+b}{c_1f_1(u)+c_2f_2(u)+c} & 1\\ \frac{a_1f_1(v)+a_2f_2(v)+a}{c_1f_1(v)+c_2f_2(v)+c} & \frac{b_1f_1(v)+b_2f_2(v)+b}{c_1f_1(v)+c_2f_2(v)+c} & 1\end{vmatrix}=0\cdots\cdots(1.2)$$

其中 $a, b, c, a_1, \cdots\cdots c_2$，等爲數值代決之常數。(1.2) 之共線圖仍代表原算式，但其形狀則隨常數 $a, b, c, a_1, \cdots\cdots c_2$ 等而改變。

設(1)之共線圖形狀崎嶇，如圖B所示，並設其輪廓 ABCD 係由 $t=t_1$，$t=t_n$，$V=V_1$，$V=V_n$ 所決定，欲求其形狀整齊，可先令 (1.2) 之共線圖之輪廓 A'B'C'D' 爲單位正方形，即令其四頂點有下列座標距：

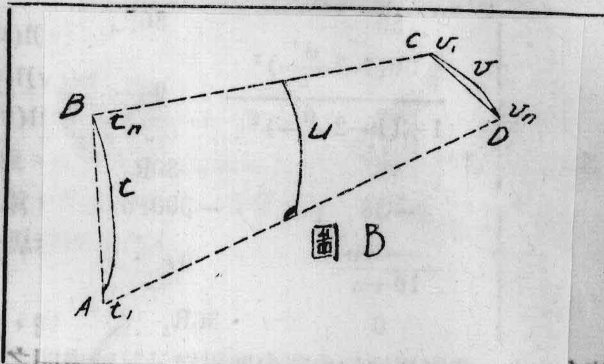


圖 B

A' $(t=t_1)$，　$x=o$，　$y=o$；

B' $(t=t_n)$，　$x=o$，　$y=l$；

C' $(v=v_1)$，　$x=l$，　$y=l$；

D' $(v=v_n)$，　$x=l$，　$y=o$.

亦即

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{a_1f_1(t_1)+a_2f_2(t_1)+a}{c_1f_1(t_1)+c_2f_2(t_1)+c}=0, & \dfrac{b_1f_1(t_1)+b_2f_2(t_1)+b}{c_1f_1(t_1)+c_2f_2(t_1)+c}=0 \\
\dfrac{a_1f_1(t_n)+a_2f_2(t_n)+a}{c_1f_1(t_n)+c_2f_2(t_n)+c}=0, & \dfrac{b_1f_1(t_n)+c_2'f_2(t_1)+b}{c_1f_1(t_n)+c_2f_2(t_n)+c}=1 \\
\dfrac{a_1f_1(v_1)+a_2f_2(v_1)+a}{c_1f_1(v_1)+c_2f_2(v_1)+c}=1, & \dfrac{b_1f_1(v_1)+b_2f_2(v_1)+b}{c_1f_1(v_1)+c_2f_2(v_1)+c}=1 \\
\dfrac{a_1f_1(v_n)+a_2f_2(v_n)+a}{c_1f_1(v_n)+c_2f_2(v_n)+c}=1, & \dfrac{b_1f_1(v_n)+b_2f_2(v_n)+b}{c_1f_1(v_n)+c_2f_2(v_n)+c}=0
\end{array}\right\} \quad (1.3)$$

上八式中計有九個數值待決之常數 $a, b, c, \cdots\cdots c_2$。令任一常數爲合宜之數值，即可推算其他八量之值。所以得各量之值代入(1.2)式並以合宜之常數 L_1，L_2，乘其一二兩縱行，則其共線圖即可狀如預定尺寸之長方形。

5. 實例

目前各家所論關於共線圖者約如上述，現有實例可以圖1，圖2，圖9概括之。圖1之作圖行列式爲(公分爲單位長度)

$$\begin{vmatrix} 36.055 & -7.5\,\mathrm{Log}_{10}y & 1 \\ \dfrac{36.055}{1+n} & 0 & 1 \\ 0 & 7.5\,\mathrm{Log}_{10}x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

圖2係依 E. T. Whitaker 之設計所作成，其作圖行列式爲

$$\begin{vmatrix} \dfrac{10}{1-b} & 0 & 1 \\ \dfrac{10}{1+X^2} & \dfrac{10X}{1+X^2} & 1 \\ 0 & \dfrac{10}{-a} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

圖9係有下列三個作圖行列式

$$\begin{vmatrix} 38 & 3R_1 & 1 \\ \dfrac{38k}{0.3+k} & \dfrac{3k^2(3-2k)}{0.3+k} & 1 \\ 0 & -30R_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 38 & 30R_1 & 1 \\ \dfrac{38(1-2\frac{d'}{t})^2}{1+(1-2\frac{d'}{t})^2} & 0 & 1 \\ 0 & -30R_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -38 & -300Po & 1 \\ \dfrac{-38n}{10+n} & 0 & 1 \\ 0 & 30R_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

連合作成。各圖用法均由圖中所附指示記號表明之。

乙、近數年之進展

6,過去理論上之缺點

共線圖以表示算式而利解算爲目的，故問題之主體爲待解之算式。由共線行列式而至作圖行列式而至共線圖以及共線圖之如何運用等均不成爲問題，求作某一算式之共線圖時，吾人之問題集中於如何歸化該式至共線行列式之形狀，欲求此問題之合理解決，必須詳究共綫圖之理論以決定：

(a)共線圖所能表示者以何種算式爲限，

(b)共線圖所能表示之算式之最普通形狀

(c)如何歸化具有該普通形狀之算式至共線行列式。

上三問題未經前人加以注意，但一經指出，其重要性卽不可忽視；若置此不論而言共線圖，是乃舍本求末之類也。

7.共線關係式之普通形狀

共線關係式如(1)式係由t,u,v,之單獨函數$f_1(t)$,$f_2(t)$,$f_1(u)$,$f_2(u)$,$f_1(v)$,$f_2(v)$所組合而成。經加減乘三手續展開後，行列式乃化爲普通三元算式 f(t,u,v)＝0 故凡算式之可化爲共線行列式者，其外表形狀必具有下列三特點：

(a)其構成分子爲各變數之單獨函數，

(b)各單獨函數間僅有加減乘除四種關係，

(c)式中僅含有三個變數。

算式之是否合於上述三條件，可一望而知。其形式之繁簡，卽視其中分子(各變數之單獨函數)數目之多寡，其最普通之形式爲：

$$f(t)\,f(u)\,f(v)+C_v\,f(t)f(u)+C_u\,f(t)f(v)+C_t\,f(u)f(v)+K_t\,f(t)+K_u\,f(u)+K_v\,f(v)+C=0 \;\cdots\cdots\cdots\cdots F_{1,1,1}$$

或 $A+A_1f(u)+A_2f(v)+A_3f(u)f(v)+$