行星齒輪系設計

(Ⅱ)

工具機手册　第四十四册

金屬工業發展中心　編譯

行星齒輪系設計

（II）

工具機手册　　第四十四册

孫　泰　炎　譯

前　　言

我國工具機製造，近年來各機種不論在產量和品質上，都有長足的進步，與國外名廠產品，已可媲美，且已大量出口。經濟部國際貿易局鑑於唯有改進產品品質，始可保持已有的市場和進一步拓展外銷，乃于民國六十七年十二月委託本中心編撰工具機手冊約四十冊，內容包括切削加工工具機的製造技術、冲壓模具、塑膠模具、壓鑄技術、鑄造技術、熱處理、表面處理、控制系統等，提供有關本業工廠技術員工參考，希冀由本手冊的刊行，能解答工廠中一部份所遭遇的問題，本手冊前四十冊已於六十九年九月全部刊行，就正我工業界；復承國貿局支持本中心續編第四十一至六十冊二十本，主要在將工具機製造公差，工程量測，金屬片冲壓項目等暨工具機生產技術，例如精密工具機中心與國外技術合作旋臂鑽床之製造範例，一併編印出版以饗讀者。至於編撰印行，因時間倉促，容有不週，至祈不吝指示！

序

雖然大部分關於齒輪方面的教課書都述及周轉齒輪系(Epicyclic gearing），有關機械的刊物上也不時有較專門性的文獻發表，然而於一般性周轉齒輪系的動力學研究上仍缺乏有系統的資料。課本中的內容往往僅限於簡單系列或是較少級數相偶合的齒輪系，而專門性的文獻內容却又失之過於艱深。此外將輪系，做綜合性基本原理討論的資料更是鳳毛麟角了。

本書冀對某些程度上能補述有關周轉齒輪系文獻之不足，並且儘可能的以平易語句來做簡明的表達。基於此目的，本書中之所有符號均儘可能地簡單且意義明晰。爲使讀者對周轉齒輪系的基本關念及欲達成某些特定目的而組合的輪系能深入的瞭解，今將目前已有的齒輪系以例舉的方式並作一般性的詳細討論。

切勿因內容中部分資料是過時或早已稔悉而認爲贅述，蓋周轉齒輪系本身就是衆所一知半解的事物。一部書的完成就是用那些已知的知識爲舊磚頭，但以新的觀念爲水泥如此般的堆砌而成的整體。至於磚頭與水泥間之比例爲何，則全視讀者過去的經驗而定。作者相信本書內容對於閱歷豐富者將不認爲浮淺，對經驗欠缺者亦可由淺深入。

書中避免引用抽象的符號，且計算題亦僅限於初等代數以利閱讀。又爲補充原文有關輪系之速度分析，又增編第七章對於周轉齒輪系中之差動斜齒輪系，用於汽車後輪傳動者作一簡介。

目　　次

第　一　章

基本輪系

1.1　一般周轉齒輪系雖感爲複雜，但其組成的元件，仍不外爲：太陽齒輪、小齒輪、行星齒輪架、行星小齒輪和環帶；故在著手研究較爲繁複的齒輪系之先，應對於各組成元件有通盤的瞭解。圖 1 表示一

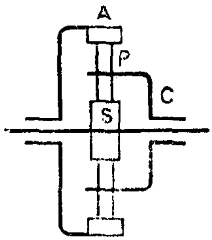


圖1.　周轉齒輪系中基本組件的符號。一該符號以下均引用一

種基本的齒輪系，爲了方便起見，順序以 S 、 P 、 C 和 A 代表太陽齒輪、行星齒輪、齒輪架、及環帶。本書中且以大寫的字母 S 、 P 和 A 表示各齒輪的齒數，而小寫字母 s 、 p 和 a 則表示各齒輪的轉數， c 則爲行星齒輪架的轉數。在任何情況下（+）和（−）號均用以表示旋轉方向的判斷；因爲以下所舉的例子中，往往在某些轉速比下，結果求出一些齒輪爲反轉。

圖 1 所示的齒輪系中有三個同軸心的元件，於是就必有三種互相影響的轉速發生。如欲將此三種互相影響的轉速的因素；消除其中之一，則就必採用一固定的轉速比，亦即必須在此三組件中之一加上一項限制條件，往往這限制條件，就是固定所選定的一齒輪使其爲靜止。或若其中兩者轉速皆爲已知數，則可求出第三齒輪之轉速；同理，若任一齒輪視成被另一齒輪以固定轉速比驅動的從動輪，這樣第三個齒輪的絕對速度也就極易求知了。

由於周轉輪系間各齒輪的聯動，擾人難於分析及瞭解，特別是當其中兩個或數個偶合在一起的時候。故初學者應先熟知各基本齒系的動作、功用是非常重要的。

1.2　爲闡明圖 1 輪系中齒輪的相對運動，首先設令所有元件整體的

轉＋1圈，隨後設定行星齒輪架爲靜止時，而使太陽齒輪廻轉－1圈。如此各組件間所得的相對運動，將其列表並相加，即可得下式之結果：

太陽輪轉數	行星輪轉數	行星輪架轉數	環帶轉數
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
-1	$+S/P$	0	$+S/A$
0	$+\frac{P+S}{P}$	$+1$	$+\frac{A+S}{A}$

第二行數據表示，當行星輪架固定時，太陽輪、行星輪及環帶的相對廻轉數，第三行數據則爲當太陽輪固定不轉時行星小齒輪、行星輪架及環帶的相對廻轉數。因爲在實際情況下，三個齒輪都在轉動，故第二行的數據必須將其乘以－s，又第三行的數據乘以c，如此再相加表列就可得知聯動時，各齒輪的相對速度了：

	太陽輪轉數	行星輪轉數	行星輪架轉數	環帶轉數
輪架固定時：	$+s$	$-\frac{sS}{P}$	0	$-\frac{sS}{A}$
太陽輪固定時：	0	$+\frac{c(P+S)}{P}$	$+c$	$+\frac{c(A+S)}{A}$
聯動時：	$+S$	$+\frac{c(P+S)-sS}{P}$	$+c$	$+\frac{c(A+S)-sS}{A}$

如此可得知行星齒輪的轉速爲：

$p=\frac{c(P+S)-sS}{P}$；亦即，

$$pP+sS=c(P+S) \quad \cdots\cdots(1)$$

又可得 $a=\frac{c(A+S)-sS}{A}$，由此

$$aA+sS=c(A+S) \quad \cdots\cdots(2)$$

上述之二方程式足以决定此基本齒輪系中四個元件間的相對運動。(2)式是三個同軸元件的持性方程式。當兩組或兩組以上齒輪系偶合處，部份元件被省略時往往就必須知道行星齒輪的運轉情形。尙有重要的二個方程式列舉於下：

將(1)式與(2)式合併後消去 s 及 S 可得：

$aA - pP = c(A+S) - c(P+S)$，故

$aA - pP = c(A-P)$ ……………………………………………………(3)

由基本的齒輪系中我們不難察覺 $A-P=P+S$ 的關係，前式亦即 $A-S=2P$。將此式與(1)、(3)式共同整理之後可得：

$pP + sS = c(P+S) = c(A-P) = aA - pP$；因此，

$aA - sS = 2pP = p(A-S)$ ……………………………………………(4)

方程式(1)到(4)包羅了周轉齒輪系中所有可能的相對運動，如基本輪系的情形、兩組或兩組以上輪系相偶合的情形，甚至於相偶合的輪系中有部分元件被省略的情況。

1.3 當把上述四個方程式用來分析基本齒輪系時，儘管在論及同軸心的元件時將不難發現僅用到第(2)式。經選定的任一反動元件將令其速度爲零，可得：

S輪爲靜止：　$aA = c(A+S)$ ……………………………………(5)

C輪爲靜止：　$aA + sS = 0$ ………………………………………(6)

A輪爲靜止：　$sS = c(A+S)$ ……………………………………(7)

從基本齒輪系可選出三個速比，且此三個速比均可以A及S表示之。經常有人說有六個速比，其實另外三個速比不過是上述三個速比的倒數而已。

設有一基本齒輪系，其中太陽齒輪爲15齒，行星齒輪爲21齒，環帶爲57齒，當太陽齒輪爲反運轉元件時可計算出環帶與齒輪架間的速比。(5)式中令 $s=0$，$aA = c(A+S)$

$\therefore a \times 57 = c \times 72$ 可求出 $\frac{a}{c} = \frac{24}{19}$。

第　二　章

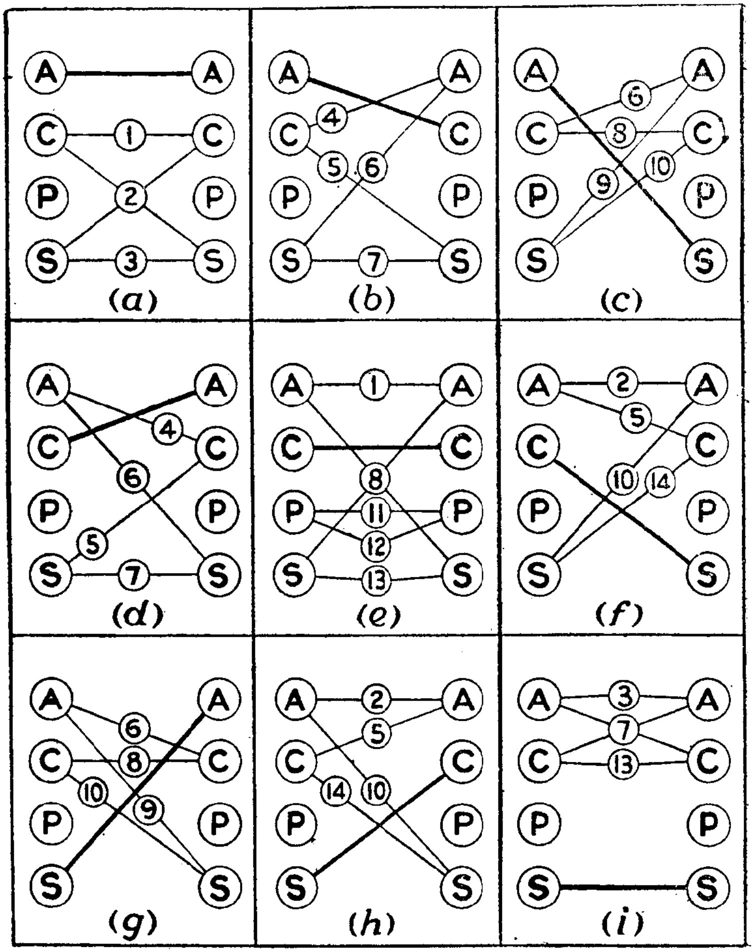
偶合齒輪系

2.1　兩基本齒輪系中，若規定各組的某一元件彼此間的絕對速比時，其最低的偶合條件，是一齒輪系中的兩元件必須和另一齒輪系中的兩元件相偶合，其中包括的有一個是反動元件。而此反動元件可能爲一嚙合的齒輪組。雖然每一基本齒輪系中共有四個元件，但可用在輪系間相偶合用的元件，僅爲其中同軸心的三個。唯一的例外是當兩組輪系間以齒輪架相偶合時，此兩輪系可採用共同的齒輪架而需以行星齒輪相偶合。其偶合法爲採用「複式」小齒輪（有兩個不同的外徑）或把這一組與另一組的行星小齒輪相嚙合。（參看2.6節）

2.2　表Ⅰ中圖(a)至(i)爲兩組基本輪系間所有可能的偶合情況，每張圖中之粗線表示一種偶合，細線則表示可取代粗線之其他種偶合的方式。細線上小的數字所表示的意義可參閱表Ⅱ。讀者可發現每種偶合法一般均有四種其他可取代的方式，但是在共同輪架相偶合時却有六種可取代的偶合法。

2.3　表Ⅱ所列爲實用的偶合情況，由於「對稱性」故僅包括十四種情況。圖表右下方的選擇表中原本有十八種情況，其中有六種因對稱而重複，再加上共同齒輪架的「複合式」輪系和行星齒輪相偶合的嚙合式輪系，結果減爲十四種。

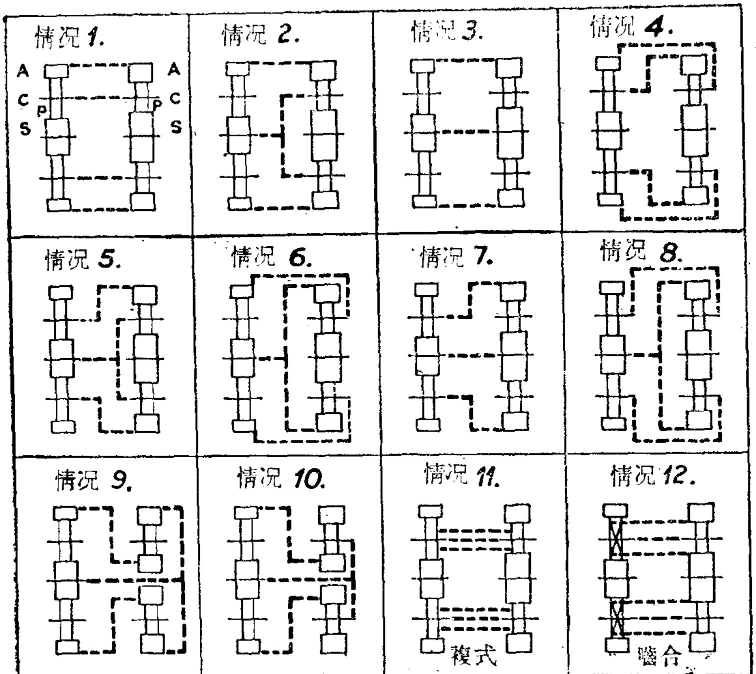
2.4　在 1.3節中我們已知基本輪系中有三種速比，也就是說有多少同軸心組件就有多少種速比。在二級式的齒輪系中如表Ⅱ所示其中十二種情況具有四個同軸心元件，只有兩種情況具有五個同軸心元件。在四個同軸心元件中任取其一做爲反動元件，然後在剩下的三個元件中任取其二分別作爲輸入及輸出元件。如此選法共有 $4\times3=12$種速比。若是有五個共軸心元件時，可能求出的速比將是 $5\times6=30$種。故在兩組輪系偶合的情形下，齒輪間速比的選擇共有$12\times12+2\times30=204$種。

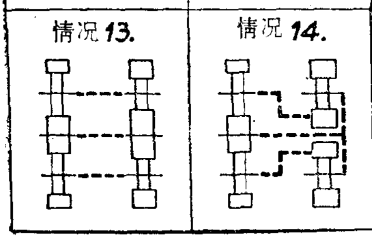


（表Ⅰ）

2.5　速度之程式：縱使我們可能寫出 204個速度方程式，但那倒不如利用(1)到(4)的方程式來演算一個特殊的例子較爲切合實際。我們選定表Ⅱ中的第8種情況爲例，令 S_2 爲反動元件，C_1 爲輸入元件及 A_1 爲輸出元件。元件 C_1 及 C_2 是嚙合在一起，所要求的是 S_1、A_2 及速比 a_1/c_1。

從(2)式　$a_1A_1+s_1S_1=c_1(A_1+S_1)$ ……………………………(8)





選擇表		第二系列						
		A/C	C/A	A/S	S/A	C/S	S/C	C/P
第一系列	A/C	1	4	2	6	5	8	-
	A/S	2	6	3	9	7	10	-
	C/S	5	8	7	10	13	14	-
	C/P	-	-	-	-	-	-	11/12

(表Ⅱ)

及， $a_2A_2+s_2S_2=c_2(A_2+S_2)$ ……………………………(9)

因， $s_2=0$，$c_1=c_2$又$s_1=a_2$，故上述各式可化成：

$a_1A_1+a_2S_1=c_2(A_1+S_1)$ ……………………………(10)

及， $a_2A_2+0=c_2(A_2+S_2)$ ……………………………(11)

由(11)式得， $a_2=c_2\left(\dfrac{A_2+S_2}{A_2}\right)$，代入(10)式中可得，

$$a_1A_1+c_2\left(\frac{A_2+S_2}{A_2}\right)S_1=c_2(A_1+S_1),$$

因此，$a_1A_1 = c_2(A_1+S_1) - c_2\left(\frac{A_2+S_2}{A_2}\right)S_1$，

$$= c_2\left\{(A_1+S_1) - \left(\frac{A_2+S_2}{A_2}\right)S_1\right\},$$

$$= c_2\left\{\frac{A_2(A_1+S_1)-(A_2+S_2)S_1}{A_2}\right\},$$

$$= c_2\left\{\frac{A_2A_1+A_2S_1-A_2S_1-S_2S_1}{A_2}\right\}$$

故，
$$\frac{a_1}{c_2} = \frac{A_2A_1 - S_2S_1}{A_2A_1} \quad\text{......................................}(12)$$

因爲讀者若能靈活的運用上述四個方程式，對於所設計齒輪系的組成是非常重要的，故本例很詳盡的將每一步驟寫出來。在分析一已被使用的齒輪系，通常用 1.2節中所述的方法較爲簡便：列出重要的元件，將所有的元件視爲一體的，使其轉"＋1"圈，然後令反動元件轉"－1"圈，同時齒輪架保持靜止。結果各組件的運動分別爲：

(S_1)	(C_1)	(A_1)	(S_2)	(C_2)	(A_2)
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$+\frac{S_2}{A_2}$	0	$-\frac{S_2}{A_2}\ \frac{S_1}{A_1}$	-1	0	$+\frac{S_2}{A_2}$
$+\frac{A_2+S_2}{A_2}$	$+1$	$\frac{A_2A_1-S_2S_1}{A_2A_1}$	0	$+1$	$+\frac{A_2+S_2}{A_2}$

這裏所求出的"$\frac{a_1}{c_2} = \frac{A_2A_1 - S_2S_1}{A_2A_2}$"與上述的⑿式相同。

本例特以偶合的齒輪架而選示。今後遇同樣情況時，以列表法分析將較方程式的運算爲便捷。若在齒輪架並非偶合的情況下，仍以採用方程式運算法爲上，或是兩者兼用作爲核對之用亦可。

2.6 複式齒輪系（參閱2.1節）：

當齒輪系採用「複式」或爲階梯式者，其行星小齒輪通常視爲一種特例。圖 2 所示卽爲此種偶合輪系。細察此輪系將不難發現，此乃表Ⅱ第11種情況的偶合輪系。

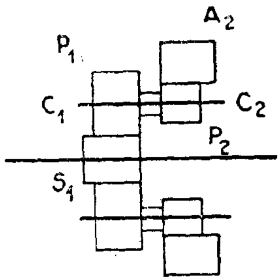


圖2. 只有階梯式或複式的小齒輪系。

第一輪系的環帶及第二系輪的太陽齒輪均被省略，但這樣並不影響結果，該輪系是屬具有C_1與C_2及P_1與P_2兩組偶合的2級式齒輪系。速度方程式可由列表法或利用運算法求得。

由(1)、(2)式及已知的$p_1=p_2$和$c_1=c_2$我們可得，

$$p_2P_1+s_1S_1=c_2(P_1+S_1)\cdots\cdots(13)$$

及，$$a_2A_2-p_2P_2=c_2(A_2-P_2)\cdots\cdots(14)$$

將上式重新整理並推演可得：

$$\frac{p_2P_1}{p_2P_2}=\frac{c_2(P_1+S_1)-s_1S_1}{a_2A_2-c_2(A_2-P_2)}。$$

交叉相乘得，

$$P_1P_2c_2+P_2c_2S_1-P_2s_1S_1=P_1a_2A_2-P_1c_2A_2+P_1c_2P_2，$$

$$\therefore\quad P_2c_2S_1+P_1c_2A_2=P_2s_1S_1+P_1a_2A_2，$$

或，$$c_2(P_2S_1+P_1A_2)=s_1(P_2S_1)+a_2(P_1S_2)，$$

上式除以P_1並重新整理，

故，$$a_2A_2+s_1\left(\frac{P_2}{P_1}\times S_1\right)=c_2\left(A_2+\frac{P_2}{P_1}\times S_1\right)\cdots\cdots(15)$$

很明顯的，上式與1.2節中之(2)式極爲相似，同時可看出複式小齒輪的作用僅在以其本身的速比修飾太陽齒輪的齒數。因此所謂的複式齒輪系爲方便計令$S_2=\frac{P_2}{P_1}S_1$，可將其簡化成等值的基本輪系。

上述之例子爲讀者提供了速度方程式詳細的演算過程。

2.7 結論：

不需再對其他輪系做進一步的分析，我們已可得下列的結論。

（i）僅需一個方程式，就足以定出基本輪系中三個共軸元件的相對運動。（方程式(2)）

（ii）對於兩組或兩組以上的輪系而言，或許四個方程式均可應用，它全視輪系中省略的那一齒輪而定。

（iii）很明顯的對任一加入的齒輪系而言，都必同時有兩組嚙合齒輪以形成差速齒輪系。

（iv）若欲將上述的差速齒輪系轉置成在兩元件間有一絕對速比的輪系，則必須有一反動元件，而此反動元件可能在此偶合對的一組齒輪中。

（v）具有P個同軸組件的差速齒輪系，可決定出的絕對速比如下：

$$P \times \frac{Q!}{2 \times (Q-2)!}，其中 Q = P - 1，$$

這是此類求「排列」數問題的數學方程式。

（vi）在某些特殊例子，不同元件齒數，在速比重覆情況下安排之。如表Ⅱ中的第1，3，11和13種情況，均有全等的齒輪系。在每種情況裏基本輪系僅能得到三種速比，此現象在其他例子中較少見到。

第　三　章

輪系的組成

3.1　現在對於已知周轉輪系的是採取直接層次分析的方法。那是因爲已有了現實的輪系。齒輪間嚙合，輸入和輸出軸及各輪的齒數均爲已知故或可用計算法求出其速比運轉方向等。但若與上述分析的步驟反其向而行，爲求設計要求的輪系時，就沒有那麼方便了。

對基本簡單的齒輪系來說，則可能僅由觀察來選定齒數比，因以定出各輪之速比。假設A＝NS，則依 1.3節中的(5)、(6)和(7)式就能將其改寫爲下列各式：

S輪爲靜止：$aNS=c(NS+S)$，

亦卽，$$\frac{a}{c}=\frac{NS+S}{NS}=\frac{N+1}{N}\cdots\cdots(16)$$

C輪爲靜止：　$aN=-s$，

亦卽，$$\frac{a}{s}=-\frac{1}{N}\cdots\cdots(17)$$

A輪爲靜止：　$sS=c(NS+S)$

亦卽，$$\frac{s}{c}=\frac{NS+S}{S}=N+1\cdots\cdots(18)$$

N值若超出2至9之外，則屬非正常，參閱以上三式，卽可判定此基本輪系能否提供所需求之速比。如需一4比1的減速比，在環帶固定時，可由(18)式可求出N＝3，亦卽A＝3S。

但若N值超出2至9之範圍時，就必須借助偶合輪系了。如何選用偶合輪系並非經常的輕易可行，但下面所介紹的方法，往往能給你帶來最滿意的答案。（請參閱2.6節及3.3節複式輪系）

3.2　設有一普通的齒輪箱，若其外殼爲Z，從外殼上伸出兩根同心的軸X及Y，其中X是輸入元件Y是輸出元件。與X和Y相連接的齒輪裝置尙未定型，它亦可能爲任何類型。玆分別以x，y和z代表上述三元件的轉速；並在$z=0$時，令$\frac{x}{y}=r$，此爲正負符號未定所需

的任何速比。將X旋轉＋1圈並同時保持Z爲靜止，然後將整個機構迴轉－1圈。如此可得各元件的相對運動表列如下：

(X之轉數)	(Y之轉數)	(Z之轉數)
$+1$	$+\frac{1}{r}$	0
-1	-1	-1
0	$\frac{1-r}{r}$	-1

第一行數據乘以x，和數那一行乘以z，如此可求出各相對速度再將此結果相加：

(X之轉數)	(Y之轉數)	(Z之轉數)
$+x$	$+\frac{x}{r}$	$+0$
0	$-\frac{z(1-r)}{r}$	$+z$
$+x$	$\frac{x-z(1-r)}{r}$	$+z$

當x和z分別表示X和Z的速度時，由定義可知

$$y=\frac{x-z(1-r)}{r}$$

亦卽，　$z(1-r)+yr-x=0$ ……………………………(19)

此乃一周轉輪系的一般特性方程式。依(2)式上式，

由，　$aA+sS=c(A+S)$

轉化成 $a\left(\frac{A}{A+S}\right)+s\left(\frac{S}{A+S}\right)-c=0$ ……………………(19a)

取 $\frac{S}{A+S}=R$，可得，

$a(1-R)+sR-c=0$ ……………………………………(20)

(19)與(20)式的關聯是顯而易見的。在(20)式中由輪系的幾何形狀知 $R<\frac{1}{2}$ 因此 $1>(1-R)>R$。決定外殼的係數是1，決定太陽齒輪的，是最小的係數R，而 $(1-R)$ 則是環帶的係數。欲將未定的(19)式比

成與⒇一致的式子，僅需把所需求的 r 值代入，然後各項以式中最大的係數除之。利用3.1節所學的例子，$r=4$。將之代入⒆式可得，

$$z(-3)+y(4)-x=0，$$

或，$$-\frac{3}{4}z+y-\frac{1}{4}x=0。$$

從上述推論的過程可確定，x 是太陽齒輪，亦是輸入元件；y 是輪架，亦是輸出元件，z 則是環帶，亦是反動元件。同時，

$R=\frac{1}{4}=\frac{S}{A+S}$。因此 $4S=A+S$，故 $A=3S$。其結果亦同前。

3.3　自此輪系的要求若超出基本輪系的範疇就可以設計了。此種輪系可能超出 3.1節的限制，或因空間的限制而使限制條件更爲嚴苛。此外規定小齒輪的齒數不得少於多少齒，亦是一項限制條件。事實上可行的方法變化多端，故必須針對某一問題的特性加以考慮，欲達此目的，端賴靈活運用⑴到⑷，及⒆及⒇各式，和 2.6節中所論述之複式齒輪系等資料。

3.4　以一具有偶合輪系的齒輪箱爲例，若將其由始至終，詳盡的演算，使熟習各公式的使用。設一齒輪箱要求下列各條件：外殼須固定，輸入及輸出軸相對排列在箱的兩端且在同一軸心上。又要求兩種速比：4比1減速與輸入軸同向，及4比1減速與輸入軸反向。齒輪的帶動必需是磨擦力控制的。因之當輸入軸轉動時任一速比均可從靜止起動操作。（此類齒輪箱若配合適當的控制齒輪可做爲攻絲機頭，用以攻出左、右牙螺紋。）

在此 $r=+4$ 或 -4。當 $r=+4$ 時代入⒆式可得

$$-3z+4y-x=0，或-\frac{3}{4}z+y-\frac{1}{4}x=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

以 3.2節中所述的辨別法，可知環帶是反動元件，輪架是輸出元件，太陽齒輪則是輸入元件。因爲 $A=3S$，$\therefore R=\frac{1}{4}$。

如，　$r=-4$，

則，　$+5z-4y-x=0$