

陆地卫星图象数字处理原理

苏民生 李铁芳

武汉地院 北京研究生部遥感技术应用研究室

四川省地质局遥感站

内 容 简 介

本讲义共分两部份内容，第一部份介绍图象处理技术所必须的数学基础知识，主要包含线性代数，概率统计，付氏变换，二进制计数及逻辑运算等；第二部份内容为陆地卫星图恢复、增强、分类等技术方法的基本原理和陆地卫星图象计算机协调（兼容）磁带（CCT）图象处理设备的介绍。

此材料可供从事 IOPS/101 系统工作人员，遥感站图象处理技术人员，从事遥感工作的技术人员，有关专业的师生等参考。

序 言

随着遥感技术的发展，特别是遥感技术在地质上的广泛应用，对陆地卫星图象质量提出了更高、更多的要求。目前地质部引进了美国STC公司生产的IPOS/101图象处理专用设备，这就为图象处理技术应用提供了必要的技术手段。本讲义正是为培养应用图象处理技术的相关人员，了解图象处理的基本原理，从而进一步推广图象处理技术，提高目视判释水平而写的。

本讲义共分两部份，第一部份为图象处理的数学基础知识，第二部份内容介绍图象处理的几种常用方法及原理，列出处理的数学模式，每种方法尽量附有处理的实例，并针对应的需要介绍了陆地卫星图象计算机协调（兼容）磁带（CCT）等有关知识。

本讲义的第一部份内容由苏民生编写；第二部份由李铁芳编写，周卡教授对讲义进行全面的审阅和修改；四川省地质局遥感站负责成图和校对工作。在此讲义编写过程中得到关方面同志的支持和帮助，特此致谢。

由于我们水平所限，经验缺乏，必有欠妥之处，衷心希望读者批评指正。

编 者 1980.7.

目 录

第一部份 陆地卫星图象数字处理数学基础

(一) 二进制与逻辑运算简介

§ 1. 二进制数	(1)
§ 2. 十六进制数	(2)
§ 3. 逻辑运算	(3)

(二) 线性代数基础知识

第一章 行列式	(5)
§ 1.1 排列和逆序	(6)
§ 1.2 n 阶行列式的定义	(7)
§ 1.3 行列式的性质	(8)
§ 1.4 代数余子式	(13)
§ 1.5 行列式按行 (或列) 展开	(13)
§ 1.6 克莱姆法则	(14)
第二章 向量和矩阵	(16)
§ 2.1 向量及其运算	(16)
§ 2.2 向量的线性相关性	(18)
§ 2.3 矩阵的定义	(19)
§ 2.4 矩阵的秩	(21)
§ 2.5 矩阵的运算	(22)
§ 2.6 逆矩阵	(24)
§ 2.7 矩阵的初等变换	(26)
§ 2.8 特征值和特征向量	(29)

(三) 概率统计基本知识

第一章 随机事件和概率	(33)
--------------------	--------

§ 1.1 随机事件	(33)
§ 1.2 事件之间的关系	(34)
§ 1.3 概率	(35)
§ 1.4 条件概率	(37)
§ 1.5 全概率公式和贝叶斯公式	(38)
第二章 随机变量及其概率分布	(40)
§ 2.1 随机变量	(40)
§ 2.2 离散随机变量的概率分布	(41)
§ 2.3 连续随机变量的概率分布	(44)
§ 2.4 随机变量的函数和多维随机变量	(46)
§ 2.5 随机变量的数字特征	(47)
第三章 统计推断	(51)
§ 3.1 母体、样本和统计量	(51)
§ 3.2 什么是统计推断	(51)
§ 3.3 参数估计	(53)
§ 3.4 t 检验	(54)
§ 3.5 F 检验	(56)
§ 3.6 χ^2 检验	(58)
第四章 方差分析	(62)
§ 4.1 单因素方差分析	(62)
§ 4.2 双因素方差分析	(65)
第五章 相关分析	(68)
§ 5.1 研究对象	(68)
§ 5.2 一元线性相关	(69)
§ 5.3 一元非线性相关	(73)
§ 5.4 多元线性相关	(75)
第六章 判别分析	(77)
§ 6.1 两类判别分析	(78)
§ 6.2 贝叶斯判别	(83)
参考文献	(89)

(四) 付氏变换基本知识

第一章 变换的一般概念	(89)
--------------------	--------

第二章 付氏变换	(90)
§ 2.1 一维付氏变换.....	(90)
§ 2.2 二维付氏变换.....	(92)
§ 2.3 离散付氏变换.....	(93)
§ 2.4 快速付氏变换.....	(95)
第三章 其它变换	(96)
§ 3.1 变换的一般形式.....	(96)
§ 3.2 阿达马变换.....	(98)
参考文献	(99)

第二部份 陆地卫星图象数字处理原理

第一章 陆地卫星数字图象概述	(100)
§ 1-1 陆地卫星收录系统简介.....	(100)
§ 1-2 陆地卫星图象模式及数字化.....	(101)
1-2-1 图象模式.....	(101)
1-2-2 采样及量化.....	(102)
1-2-3 图象灰度、灰阶.....	(103)
§ 1-3 图象预处理.....	(104)
§ 1-4 图象数字处理内容.....	(104)
第二章 陆地卫星数字星象磁带 (CCT)	(105)
§ 2-1 陆地卫星数字图象格式.....	(105)
§ 2-2 CCT磁带记录内容、格式及规格.....	(105)
2-2-1 CCT磁带记录内容.....	(105)
2-2-2 CCT磁带记录格式.....	(109)
2-2-3 CCT磁带规格.....	(110)
第三章 图象恢复处理	(111)
§ 3-1 辐射校正.....	(111)
§ 3-2 大气校正.....	(115)
3-2-1 公式计算法大气校正.....	(116)
3-2-2 野外波谱测试与大气校正.....	(116)
3-2-3 室内各波段图象对比分析及大气校正.....	(117)
§ 3-3 条带噪声消除.....	(118)

§ 3-4 几何校正.....	(119)
3-4-1 几何畸变类型及畸变模型.....	(119)
3-4-2 几何校正方法.....	(120)
第四章 图象增强处理	(123)
§ 4-1 彩色增强.....	(124)
4-1-1 假彩色密度分割.....	(125)
4-1-2 假彩色合成.....	(127)
§ 4-2 反差增强.....	(127)
4-2-1 灰度线性扩展.....	(128)
4-2-2 分段线性扩展.....	(129)
4-2-3 指数变换.....	(130)
4-2-4 对数变换.....	(130)
4-2-5 直方图均衡化.....	(130)
4-2-6 适应性直方图调整(直方图匹配).....	(134)
§ 4-3 频率增强—滤波.....	(138)
4-3-1 边缘增强.....	(139)
4-3-2 平滑滤波.....	(141)
4-3-3 定向滤波.....	(142)
4-3-4 高频增强—高通滤波.....	(143)
4-3-5 低频增强—低通滤波.....	(146)
§ 4-4 代数运算增强.....	(147)
4-4-1 代数运算.....	(147)
4-4-2 逻辑运算.....	(148)
第五章 图象分类处理	(149)
§ 5-1 波谱的波段向量.....	(149)
§ 5-2 地物波谱特性分类.....	(151)
§ 5-3 图形识别.....	(153)
§ 5-4 集群分析.....	(155)
§ 5-5 最小距离分类.....	(165)
§ 5-6 线性判别分析.....	(167)
§ 5-7 最大似然比分类.....	(173)
第六章 数字图象处理设备简介	(178)
参考文献	(181)
第二部份附录	
附录一 图象数据扩展、压缩变换表	(183)

附录二	0—127的二进制、八进制、十进制、十六进制变换表·····	(187)
附录三	二进制扩展十进制(EBCDIC)编码表·····	(190)
附录四	七五年十一月美宇航局发表的关于ID记录格式·····	(191)
附录五	七七年七月美宇航局发表的AN记录格式·····	(192)
附录六	C、D表·····	(194)
照 片	·····	(200)

第一部份附表

表 1	标准正态分布密度函数·····	(212)
表 2	标准正态分布函数 $F(u)$ ·····	(213)
表 3	t分布临界值 t_{α} 表·····	(214)
表 4	χ^2 分布临界值 χ_{α}^2 表·····	(215)
表 5	F分布临界值 F_{α} 表·····	(217)
表 6	检验相关系数 $\rho = 0$ 的临界值(r_{α})表·····	(216)

第一部份 陆地卫星图象

数字处理数学基础

(一)二进制与逻辑运算简介

§1. 二进制数

根据需要,人们使用不同的计数制。最常用的是十进制数,它使用十个数字:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,并采用“逢十进一”的进位规则。以度、分、秒来计算角度时,则是使用60进制,即60秒才进一位成为1分,60分才进一位成为1度。在电子计算机中,是凭借记忆元件两种状态来存贮信息的,犹如用一串灯泡来表示和记录数字。灯泡只有亮与不亮两种状态,分别代表数字1和0,更大的数,就需要采用“逢二进一”的规则,用更多的灯泡表示,即用更多的位数来表示。这就是二进制记数法。如果存贮一个数使用的位数多,所存的数就可以大一些;反之,使用的位数少,能够存贮的最大数就要小一些。所谓计算机存贮的“字长”,就是指为存贮一个数所提供的二进制位数。

为了表明所写的数是采用那一种计数制,我们在数的右下角注明,例如 15_{10} 表示十进制数15, 101_2 则表示二进制数101。

下表列出0~23的二进制数对照表

十进制数	二进制数	十进制数	二进制数	十进制数	二进制数
0	0000	8	1000	16	10000
1	0001	9	1001	17	10001
2	0010	10	1010	18	10010
3	0011	11	1011	19	10011
4	0100	12	1100	20	10100
5	0101	13	1101	21	10101
6	0110	14	1110	22	10110
7	0111	15	1111	23	10111

任意写出一个二进制数，它相当于哪一个十进制数呢？反之，一个十进制数如何转为二进制数呢？我们当然不能从0开始一个一个去数，而需要找到其转换公式。

以N为基数的计数制中，即采用“逢N进一”规则的计数制中，数 $X_n X_{n-1} \dots X_1 X_0$ 的数值为 $X_n N^n + X_{n-1} N^{n-1} + \dots + X_1 N + X_0$ 。例如十进制数

$$2234_{10} = 2 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$$

对于二进制数，同样有

$$1011_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 = 11_{10}$$

因此，只要将二进制数中数分为1的各位所对应的2的乘幂加起来，就可以知道这个数值的十进制写法。其中最低位对应的2的乘幂是 $2^0 = 1$ ，右起第2位对应的2的幂是 $2^1 = 2$ ，右起第i位对应的2的幂是 2^{i-1} 。从最低位开始依次为1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

由此可知八位二进制数

$$11010110_2 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = 214_{10}$$

将十进制数转换为二进制数，要点是将十进制数分解为若干个二的乘幂之和。例如

$$38_{10} = 32 + 6 = 32 + 4 + 2 = 2^5 + 2^2 + 2^1 = 100110_2$$

$$\begin{aligned} 123_{10} &= 64 + 59 = 64 + 32 + 27 = 64 + 32 + 16 + 11 \\ &= 64 + 32 + 16 + 8 + 3 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 \\ &= 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 1 = 1111011_2 \end{aligned}$$

上述2—10进制的互换，计算机都有专门的程序去数，使用高级语言时则可以直接使用大家所熟知的十进制数。

二进制数的算术运算规则，和十进制数相同，仅仅是将十进制数中“逢十进一”的规则改为“逢二进一”。例如

$$1011_2 + 1101_2 = 11000_2$$

其算草如下：

$$\begin{array}{r} 1011 \\ + 1101 \\ \hline 11000 \end{array}$$

$$101_2 \times 110_2 = 11110_2$$

其算草如下：

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 110 \\ \hline 101 \\ 101 \\ 11110 \\ \hline \end{array}$$

§2. 十六进制数

计算机虽然是用2进制数处理问题，但是二进制数写起来太长了，读、写很麻烦。为了既便于人们读写，又适应机器处理的特点，可以将二进制数截成每3位或每4位一组，这就

成为八进制数和十六进制数。

十六进制数是“逢十六进一”，它应当有16个数字，因此，除了0至9这10个数字之外，还增加了A至F这6个字母，分别代表数值10, 11, 12, 13, 14和15；0至15的二、十、十六进制数对照表如下。

十进制	二进制	十六进制	十进制	二进制	十六进制
0	0000	0	8	1000	8
1	0001	1	9	1001	9
2	0010	2	10	1010	A
3	0011	3	11	1011	B
4	0100	4	12	1100	C
5	0101	5	13	1101	D
6	0110	6	14	1110	E
7	0111	7	15	1111	F

由此表可知，一位十六进制数可看成是四位二进制数的缩写。

十进制与十六进制之间的转换，可以通过二进制来过渡，也可以直接转换。

例如：利用二进制过渡

$$25_{10} = 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11001_2 = 19_{16}$$

或者直接转换

$$25_{10} = 16^1 + 9 = 19_{16}$$

十六进制数是以十六为基数的，因此，转换为十进制数时，只要将每位数字乘以相对应的十六的幂，再将这些乘积相加就可得到结果。

$$\begin{aligned} 2B14_{16} &= 2 \times 16^3 + 11 \times 16^2 + 1 \times 16 + 4 = 2 \times 4096 + 11 \times 256 + 16 + 4 \\ &= 11028_{10} \end{aligned}$$

在计算机中，把1个二进制位称为 bit，还常常把8个二进制位称为 byte，译为“字节”。

1个字节的内容，可以用2位16进制数表示，例如 $1A_{16} = 0001\ 1010_2 = 26_{10}$ 。卫星磁带CCT中，每个象元的亮度值用1个字节来记录，进行有关研究时常常需要把每个字节的内容转换为十进制数。

§3. 逻辑运算

逻辑变量是取值为真 (TRUE) 或假 (FALSE) 的一类特殊的变量。为了便于叙述，可以分别用1和0代表逻辑值 TRUE (真，是) 和 FALSE (假，否)。

逻辑变量在实际应用中应当表示一个命题，或称为判断。例如“N值小于100”，这是一个命题，可用一个逻辑变量A表示。当N值为5时，A值为“真”，当N值为100时，A值为

“假”。再如“N是偶数”，这也是一个命题，可用逻辑变量B表示。当N值为10时，B值为“真”，当N值为15时，B值为“假”。

逻辑变量可以进行运算，其运算结果仍是一个逻辑量，取逻辑值。这里介绍与、或、非三种运算。

逻辑变量A和B的“与”记作 $A \times B$ ，也可以写成 AB 。当A和B都取值为“真”时， $A \times B$ 的值是“真”；否则 $A \times B$ 的值为“假”。

按通常的意义，“与”就是“并且”、“同时”的意思， $A \times B$ 可以说是“A同时B”。如果A指“N值小于100”，B指“N是偶数”，则 $A \times B$ 的意义是“N值小于100并且是偶数”，显然当N为10时 $A \times B$ 为真，而当N为5时 $A \times B$ 为假。

逻辑变量A和B的“或”记做 $A + B$ 。当A和B当中至少有一个取值为“真”时， $A + B$ 的值为“真”；而当A和B都是“假”时， $A + B$ 的值也是“假”。例如当A表示“N小于100”而B表示“N为偶数”时， $A + B$ 的意义是“N小于100或者N是偶数”。因此当N为120时 $A + B$ 为真，当N为5时 $A + B$ 为真，当N为10时 $A + B$ 为真，而当N为101时 $A + B$ 为假。

逻辑变量A的“非”记做 $\bar{A}$ ，它取与A相反的值：当A为“真”时 $\bar{A}$ 为“假”，而当A为“假”时 $\bar{A}$ 为真。例如当A表示“A小于100”时， $\bar{A}$ 的意义是“N不小于100”，也可以说成“N大于或等于100”。因此，当N值为5时，A为真而 $\bar{A}$ 为假，而当N值为100时A为假而 $\bar{A}$ 为真。

上述三种运算规则，如果用1表示逻辑值“真”，用0表示逻辑值“假”，可列成下表：

A	B	$A \times B$	$A + B$	$\bar{A}$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	1	1	1	0

上表称为“真值表”。对于任何逻辑表达式都可列出真值表来研究。

对于二进制数可以进行逻辑运算。例如有二进制数 $N = 10110110$ ，如果用另一个二进制数 $A = 00001111$ 去和N逐位进行逻辑乘，为了和算术运算相区别，用符号 $\wedge$ 表示逻辑乘，则有

$$N \wedge A = 00000110$$

用 $B = 11110000$ 去和N逐位做逻辑乘，则有

$$N \wedge B = 10110000$$

其中 $N \wedge A$ 是将N的后4位“截取”出来， $N \wedge B$ 则是将N的前4位“截取”出来，因此也有把这种运算称为“掩码”的。为了截取一个数的某些位，只要用一个适当的数去和它进行逻辑乘就可以实现。

如果计算机的一个存贮单元有2个字节，而每个象元亮度值存贮占用一个字节，并用十

六进制数写出，例如：

$$N = 1A1B$$

为了分离出第二个亮度值，取

$$A = 00FF$$

则可得到

$$N \wedge A = 001B$$

为了分离出第一个亮度值，取

$$B = FF00$$

则可得到

$$N \wedge B = 1A00$$

再将 $N \wedge B$ 右移 8 位，就得到第一个亮度值 1A。

使用电路来实现逻辑运算，就成为逻辑电路。逻辑电路是电子计算机的基础，实现各种逻辑运算的各种逻辑元件是电子计算机的细胞。

(二) 线性代数基础知识

图象数字处理方法所涉及的线性代数有关内容，在各种线性代数教科书中都有详细论述。这里为了便于没有时间翻阅详细论著的同志了解这方面的基础知识，简要地介绍行列式、向量、矩阵、特征值与特征向量等概念，以及一些简单的运算。有关的性质，不采用定理的形式加以论证，而是叙述其意义，并通过少量例题帮助理解。如需了解更详细的内容，请看有关教科书或专著。

第一章 行 列 式

中学代数里，解一次联立方程时用到二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

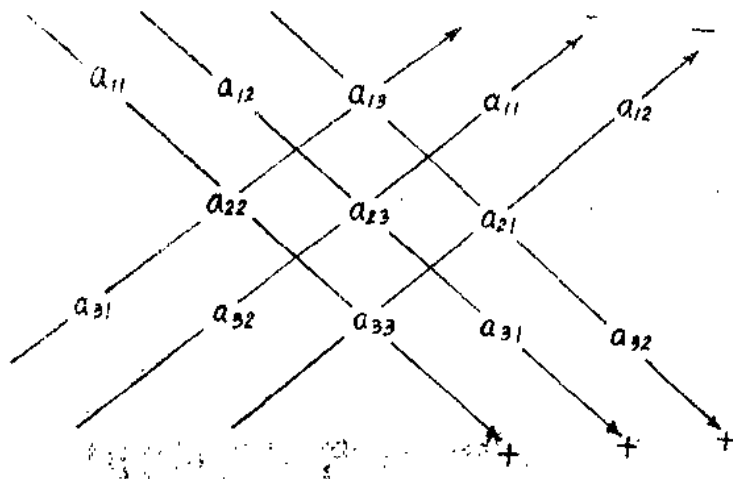
例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 4 \times (-4) = 9 + 16 = 25$$

还用到三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

为了帮助记忆3阶行列式的展开式,可使用下图:



图中有6条斜线,每条线上的3个数之积就是展开式中的一项,该项的正负号标注在这条线的箭头之后。

分析一下这个展开式,可看到它是6项的代数和,每项是3个数之积,这3个数在行列式中既不在同一行又不在同一列。每个乘积中,这里是把第一行的元素作为第一个因子,把第二行的元素作为第二个因子,等等。每项的正负号,决定于这3个因子所在的行、列数,这点放到后面讨论。

多元一次联立方程,叫做线性方程组。如有 n 个未知数,叫做 n 阶线性方程组。研究 n 阶线性方程组的解法时,用到 n 阶行列式。

和2阶、3阶行列式一样, n 阶行列式是将 $n \times n$ 个数排列成 n 行 n 列,放在两条竖线之间,每个数称为行列式的一个元素。它表示若干项的代数和,其中每一项是 n 个元素之积,这 n 个因子是既不在同一行又不在同一列中的。这样的乘积应当有 n 个。

§1.1 排列和逆序

为了确定行列式展开式中各项所冠以的正负号,先讨论排列和逆序。

由1、2、3、...、 n 所构成的一个有序数组称为一个 n 级排列,排列中的某一对数如果大数在前小数在后就称为是一个逆序,一个排列中逆序的总个数称为这个排列的逆序数。

例如4213是一个4级排列,其中的逆序有42,41,43,21,共有4个,这个排列的逆序数是4。再如4级排列2431的逆序数是4,5级排列45321的逆序数是9。

我们用 $a_1 a_2 \dots a_n$ 表示一个 n 级排列,它的逆序数记为 $N(a_1 a_2 \dots a_n)$,逆序数是排列的

函数。

3阶行列式的展开式中的每一项是3个元素的乘积。把这3个元素按行号的顺序来写，例如 $a_{13}a_{22}a_{31}$ ，即让行下标为1的元素写在最前面，第二个是行下标为2的元素，等等，那么，这3个元素的列下标（第二个下标）就构成一个3级排列。例如上面那一项的列下标是321，是一个3级排列。它的逆序数 $N(321) = 3$ 。再如乘积 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 的列下标排列是231，它的逆序数 $N(231) = 2$ 。查看每一项的列下标排列的逆序数，可以看出，凡该项前面冠以正号的，该逆序数为偶数；凡该项前面冠以负号的，该逆序数为奇数。我们把这个规律用于定义 n 阶行列式展开式各项应冠以的正负号。

§1.2 n 阶行列式的定义

$n \times n$ 个数构成的 n 阶行列式是指

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或简记为 $D = |a_{ij}|$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)，它代表 $n!$ 项的代数和，这些项是一切可能的取自不同行与不同列的 n 个元素的乘积，每项前面的正负号则由当该项的 n 个因子按行下标顺序写出时其列下标排列的逆序数所决定，这个逆序数为偶数时取正号，为奇数时取负号，即

$$D = |a_{ij}| = \sum (-1)^{N(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$$

其中 α_i 是每项第 i 个因子的列下标。

(例1) 依照定义写出4阶行列式的展开式。

含有 a_{11} 的各项，它的另外3个因子应当取自第2至4行和第2至4列，即它们是这3行3列构成的行列式的展开式中每项的3个因子。含有 a_{12} 、 a_{13} 、 a_{14} 的各项也可用同样的方法写出，因此展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$$

$$\begin{aligned} & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{aligned}$$

这个展开式是 $4! = 24$ 项的代数和，其中每项的 4 个因子是按所在行号的顺序写出的，因此该项前面的正负号可由其列下标排列的逆序数所决定。如式中第一项列下标排列的逆序数 $N(1\ 2\ 3\ 4) = 0$ ，该项前面写正号，第二项列下标排列的逆序数 $N(1\ 3\ 4\ 2) = 2$ ，该项也取正号，第四项列下标排列的逆序数 $N(1\ 2\ 4\ 3) = 1$ ，该项取负号。

(例 2) 计算五阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix} \quad (a, b, c, d, e \neq 0)$$

这个行列式的展开式共有 $5! = 120$ 项，但其中只有一项 $abcde$ 不为 0，该项应取正号，所以

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix} = abcde$$

(例 3) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \quad (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} \neq 0)$$

这个 4 阶行列式的展开式有 $4! = 24$ 项，而其中只有一项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 不包含因子 0，且该项取正号，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

这样的行列式称为上三角行列式，其主对角线（从左上角到右下角的对角线）以下的元素全为 0，其值等于主对角线元素之积。

由 n 阶行列式的定义可知，第一，行列式是有特定形式的一个代数式的简单的记法，它的计算结果应当是一个数值，因此在算式或方程中行列式可以作为一个数出现。第二，依照定义的规则计算行列式的值是很烦琐的，当 n 较大时计算量是很可观，因此需要有实用有效的计算方法。为此先讨论行列式的性质。

§ 1.3 行列式的性质

性质 1 行列式的行与列互换（即将行变作列），其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这种行与列的互换，称为转置。行列式 D 的转置矩阵记为 D^T ，且有 $D^T = D$ 。

例如若有三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

它的转置行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

显然

$$D = D^T = 6$$

由性质 1 可知，与行列式的行有关的性质，对于列同样适用。

性质 2 交换行列式的两行（或列），行列式改变符号，其绝对值不变。

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

性质 3 以任意数乘行列式，等于用同一数乘行列式的任一行（或列）的各个元素，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k a_{i1} & k a_{i2} & \cdots & k a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

因此，如果行列式某一行（或列）的各元素有公因子，则可将此公因子提到行列式记号之外。

性质 4 若行列式有一行（或列）的元素都是 0，则行列式等于 0。

性质 5 行列式某一行（或列）的各元素若都等于某两数之和，则行列式可化为两个行列式之和，有