

高中各科詳解

數學之部

崔東伯編

青年讀書生活社印行

∴ LACM

3 21 11

數學之部

引言

數學是有系統的純粹科學，高中同學，希望打好數學的良好基礎；希望投考大學時，不感覺到數學方面的困難；希望進了大學以後，不會感到數學知識的不夠；其唯一的良法，要在高中的三學年內，按步就班，繼續的努力，多多的奮勉！我敢大膽的說；除此之外，決無良法。今將「投考大學全書」中，關於數學方面，分編五部如下；

(一) 平面幾何之部，

(二) 平面三角之部，

(三) 高等代數之部，

(四) 平面解析幾何之部。

(五) 附錄：

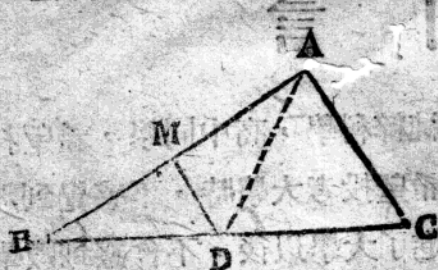
(A) 歷屆大學統考數學試題及解答，

(B) 三十年度國立中央大學新生編級數學試題。



平面幾何之部

1. 三角形ABC若 $AB=2AC$ 求證 $\angle C > 2\angle B$



證：作AB之中垂線MD交BC於D點

則 $\angle ADC = 2\angle B$

又 $AD + DB = 2AD > AB$

$\therefore 2AD > 2AC$ 即 $AD > AC$

$\therefore \angle C > \angle ADC$ $\therefore \angle C > 2\angle B$

$= 2\angle B \therefore \angle C > 2\angle B$

別證：



作AD線使 $\angle ADC = \angle ACD$

則 $AD = AC$

又 $AB < AD + DB$

即 $2AC < AD + DB$

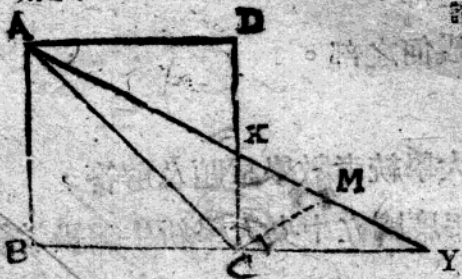
$\therefore BD > AC$ 即 $BD > AD$

$\therefore \angle BAD > \angle B$

今 $\angle C = \angle ADC = \angle B + \angle BAD$

$\therefore \angle C > 2\angle B$

2. 由正方形ABCD之頂點A任何直線與CD交於X點BC之延線交於Y則 $\frac{1}{2}(AX + Ay) > AC$



證：取XY之中點M

則 $AM = AX + XM$ ①

$AM = Ay - My$ ②

① + ② $AM = \frac{1}{2}(AX + Ay)$

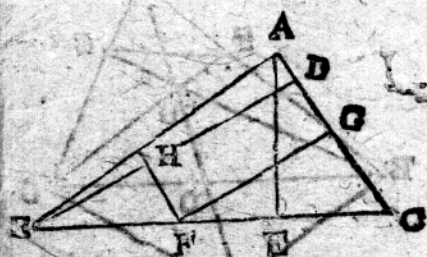
今 $\angle DAX = \angle CyM < 45^\circ$

$\therefore \angle AMC < 90^\circ$

又 $\angle AXD = \angle CXM = \angle XCM > 45^\circ$

$\therefore \angle ACM > 90^\circ$ 故就三角形AMC知 $AM > AC$ $\therefore \frac{1}{2}(AX + AY) > AC$

3. 銳角三角形ABC之兩邊 $BC > AC$ 由A點作 $AE \perp BC$, B點作 $BD \perp AC$ 求證 $AE + BC > BD + AC$



證：於BC上取F點使 $CF = AC$,

$FH \perp BD$, $FG \perp AC$

則 $\triangle AEC \cong \triangle FCG$

$\therefore FG = AE$

又DHFG爲矩形

$\therefore AE = FG = DH$ $\therefore AE$

$+ BC = FG + EF + CF$

又 $BD + AC = BH + HD + AC = BH + FG + FC$

而 $\triangle BFH$ 中 $\angle BHF = \angle R$, $\therefore BF > BH$ $\therefore AE + BC > BD + AC$

4. 四邊形ABCD中一組對角A,C若相等,則其他一組對角BD之等分線必平行

證：BD之等分線交AB於G, /B

之等分線交DC, AD於E, F點

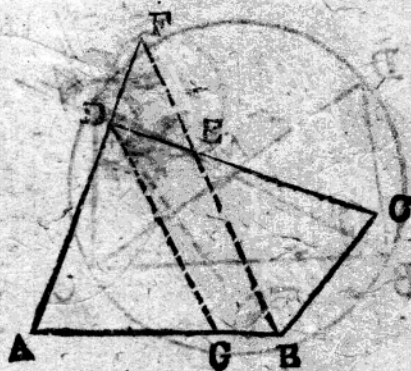
$\angle A = \angle C$ 又 $\angle ABF = \angle EBC$

$\therefore \triangle FAB \cong \triangle EBC$

$\therefore \angle BEC = \angle AFB = \angle DEF$

即 $\triangle DEF$ 爲等腰三角形

$\therefore DG \parallel EB$



5. 三角形ABC中線AD上任取O點連BO, CO, 延長之交AC, AB於E, F點,

求證 $EF \parallel BC$

證： $\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC} = \frac{AF}{BF} \quad (1)$

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle BOC} = \frac{AE}{FC} \quad (2)$$

因D為BC中點故 $\triangle AOB = \triangle AOC$

由(1)(2)知 $\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{CE}$

$\therefore EF \parallel BC$

(注意)若延長OD至G使

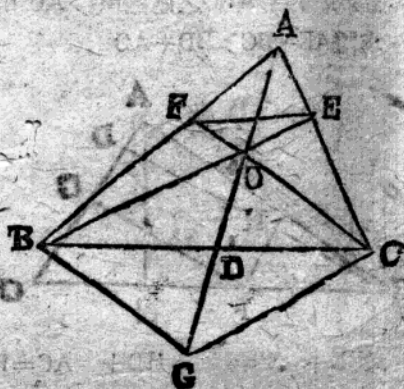
$OD = DG$ 則 $OE \parallel BG$,

$OE \parallel CG$

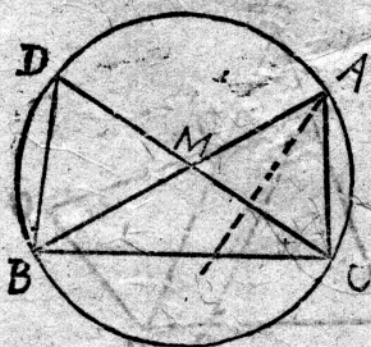
利用平行線亦可證明

直接引Ceva定理更易

證得讀者自證之



6. 三角形ABC若 $\angle A = 2\angle B$ 由頂點C作 $\angle A$ 等分線之垂線CL則CL必為經過三角形ABC之外心



證：CL交外接圓於D點

$$\angle ACM = \angle AMC$$

$$\angle A + 2\angle ACM = 2\angle B$$

$$\text{又 } \angle A + \angle B + \angle ACB = 2\angle B$$

$$\therefore \angle B + \angle ACM + \angle DCB =$$

$$2\angle ACM$$

$$\therefore \angle DCB = \angle ACM - \angle B = \angle A$$

$$\angle B - \angle DCB - \angle B$$

$$\therefore \angle DCB = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$$

7. 三角形ABC之內心為O，內切圓與各邊切點為D, E, F，而ED, AC交於G點。

求證： $AG \perp BG$

證：AO, BO各為 $\angle A, \angle B$ 之等分線。

$$\therefore \angle BOG = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \angle R - \frac{1}{2}\angle C$$

$$\text{又 } CE = CD \quad \therefore \angle CDE = \angle CED$$

$$2\angle CDE + \angle C = 2\angle R$$

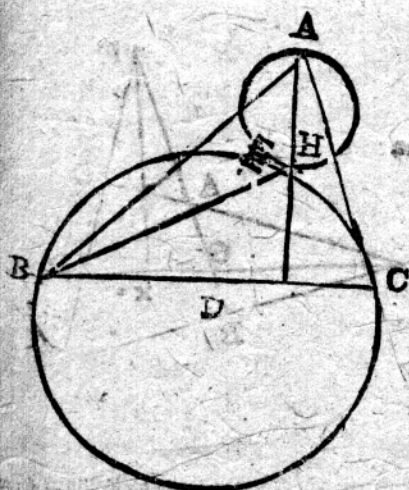
$$\therefore \angle CDE = \angle R - \frac{1}{2}\angle C$$

$$\text{而 } \angle CDE = \angle BDG \quad \therefore \angle BDG = \angle BOG$$

$$\therefore BCDG \text{ 內接於圓 } \therefore \angle ODB = \angle R$$

$$\therefore \angle OGB = \angle R \quad \therefore BG \perp AG$$

8. 三角形ABC之垂心為H，底邊BC之中點為D以AH為直徑之圓與△HBC之外接圓交於E點，求證：A, E, D三點在一直線上



證：AE之延長線與HBC圓交於

F，連HF，因AH為徑

$$\therefore \angle AEH = \angle R \quad \therefore \angle HEF =$$

$\angle R$ 即HF為ECH圓之徑

$$\therefore \angle HCF = \angle HBF = \angle R$$

又 $CH \perp AB$, $BH \perp AC$

$$\therefore AB \parallel CF \quad AC \parallel BF$$

則 ABFC為平行四邊形，即

AF通過BC之中點D即

A, E, D三點成一直線

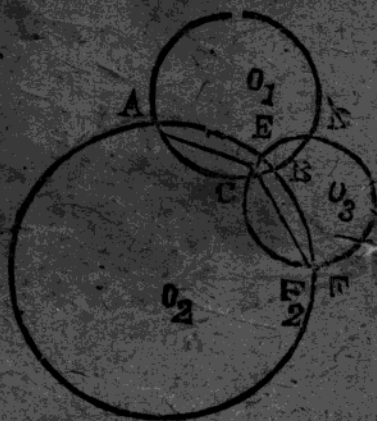
9. 兩兩相交之圓 求證：共

公共弦線交於一點

證：三圓為 O_1, O_2, O_3 ，公共弦為AB, CD, EF，設AB, CD交於P點，連EP交 O_2 圓於 F_2 及 O_3 圓於 F_3

就 O_1 圓 $AP, BP = CP, DP$ (1)

就 O_2 圓 $AP, BP = EP, F_2P$ (2)



就 O_3 圓 $CP, DP=EP, F_3P$

(3)

由(1)(2)(3)知 $EP, F_2P=EP$

F_3P

$F_2P=F_3P$ 而 F_2 在 O_2 圓, F_3 在 O_3 圓

$\therefore F_2, F_3$ 必與 F 點合

$\therefore AB, CD, EF$ 同交於 P 點

10. 四邊形 $ABCD$ 對邊之延長線交於 E, F 點若 $\angle E, \angle F$ 之等分線

直交時,求證四邊形 $ABCD$ 必內接於圓

證:就圖 $\angle F$ 之等分線與

AB, CD 及 $\angle E$ 之等

分線交於 G, H, K , 因 EK

$\perp FGH$

$\therefore EGH$ 為等腰三角形

$\therefore \angle AGH = \angle DHG$

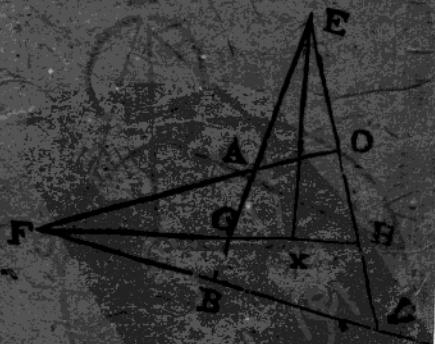
$\angle C = \angle DHG - \frac{1}{2} \angle F$

又 $\angle FAG = \angle AGH - \frac{1}{2} \angle F$

$\angle F = \angle DHG - \frac{1}{2} \angle F$

$\therefore \angle C = \angle FAG \therefore A, B,$

C, D 四點同在一圓上



11. 四邊形 $ABCD$ 之對邊 AB, DC 交於 E , 又 BC, AD 交於 F , 則三角形 BCE, DCF, ADE, ABF 之外接圓同交於一點示證

證:作三角形 BCE, DCF 之外接圓除 C 點外於 G 點結 EG, CG

$FD = \angle CGD, \angle ABF = \angle CGE$ 因 $\angle A + \angle CFD + \angle ABF = 2/R$

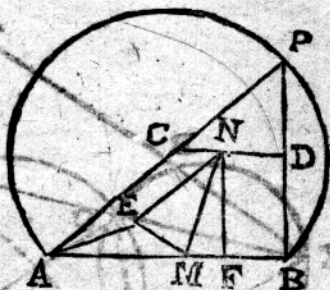
中線

13. 相離兩定圓A, B 其公共外切線CD

公共內切線EF則 $\overline{CD}^2 - \overline{EF}^2$ 爲

定量求證,

證: 兩圓半徑各爲a, b. 作 $AG \parallel CD$
交BD於G點 $BH \parallel EF$ 交AE之
延線拉H



$$\overline{CD}^2 = \overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BG}^2$$

$$= \overline{AB}^2 - (b-a)^2$$

$$\overline{EF}^2 = \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AH}^2$$

$$= \overline{AB}^2 - (b+a)^2$$

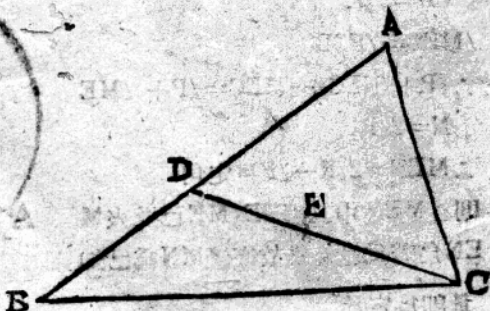
$$\therefore \overline{CD}^2 - \overline{EF}^2 = 4ab = \text{定量}$$

14. 三角形ABC之一邊AB上取D點連結CD 三角形ACD BCD之內切

圓若切CD於同一
點E則D點之位置
如何

證: $\triangle ACD$ 及 $\triangle BCD$
之內切圓若於E
點與CD切則

$$\text{就 } \triangle ACD \quad 2DE \\ = AD + DC - AC$$



$$\text{又就 } \triangle BCD \quad 2DE = BD + DC - BC$$

$$\therefore AD + DC - AC = BD + DC - BC$$

$$\therefore AD = BD + AC - BC$$

$$\text{或 } 2AD = AD + BD + AC - BC = AB + AC - BC$$

$\therefore D$ 點為三角形內切圓與 AB 之切點

15. 底邊及面積一定之三角形中等邊三角形之周為最小其頂角為最大求證

證：題云面積一定故頂

點 A 必在 BC 之平行線

線 XY 上求 C 之對

稱點 C 結 BC 交 XY

於 D 則

$$DC = DC,$$

$$AC = AC,$$

$$\therefore AB + AC > BC, \text{ 即 } A$$

$$B + AC > DB + DC$$

$$\angle YDC = \angle C, \angle DY = \angle X$$

$$\angle DB = \angle DBC = \angle DCB$$

$\therefore DB = DC$ 即 $\triangle DBC$ 為等腰三角形而 $\triangle DBC$ 之周小於 $\triangle ABC$ 之周故 $\triangle DBC$ 之周為最小

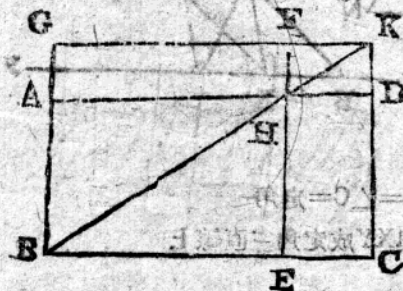
又若經過 BCD 作圓則此圓切 XY 於 D 故 A 點在圓外故 $\angle D > \angle A$ 故等腰三角形 BDC 之頂角為最大

16. 一定面積之矩形中以正方形之周圍為最小

證： $ABCD$ 為矩形， EFG 為等積正方形就圖

$$FG = EC, DH$$

若延長 GF, CD 交於 K , 則易知 BHK 三點為共線



以直線上任取 C' 點作 $\angle C'AB' = \angle CAB'$ 而 AB' 交 XY 於 B' 結 $B'C'$ 因 $\angle C'CY = \angle A = \angle B'AC'$ 故 $ABCC'$ 內接於圓

故 $\angle AC'B' = \angle ACB \therefore \triangle AB'C' \sim \triangle ABC \sim \triangle CMN$ 即 CC' 上之點適合條件

18. 二定點 A, B 任意點 P 若 $PA:PB = m:n$ 求 P 點之軌跡

解(Ⅰ)內外分 AB 於 M, N 使 $AM:BM = AN:BN = m:n$

P 為適合條件之點結 P

A, PB, PM, PN

因 $MA:MB = PA:PB$

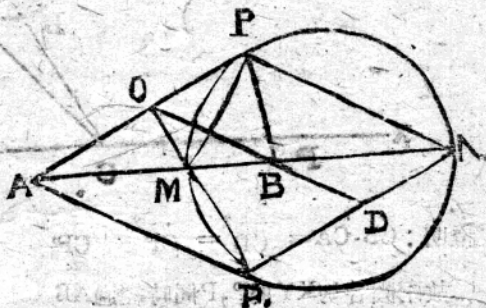
故 PM 等分 $\angle APB$

同理 P 等分 $\angle APB$ 之外

角 故 $\angle MPN = \angle R$

即 P 點在 MN 為直徑

之圓上



(Ⅱ)此圓上任取 P' 點經過 B 線作 $P'A$ 之平行線交 $P'M$ 及 $P'N$ 於

C, D 點 $P'A:BC = AM:BM = m:n = AN:BN = AP':BC$

$\therefore BC = BD$ 就圖 B 為直三角形 $P'CD$ 斜邊之中點

$\therefore BC = P'B \therefore P'A:P'B = P'A:BC = MA:MB = m:n$

故 P' 點適合條件故 MN 為直徑之圓即所求之圓

19. 定圓弧 AB 上求 P 點 使 $PA:PB = m:n$

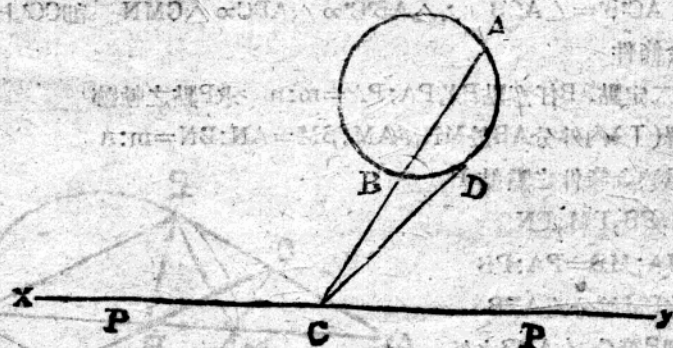
解：參用上之軌跡題內外分點 M, N 為經之圓與定圓弧之交點 P' 即所求之點(證明略)

注意：本題求 AB 之內分 M 設弧 APB 之共軌弧中點 C 結 CH 交弧 AB 於 P 則 P 為所求之點(已知底邊頂角及兩邊之比作三角形即屬此題)

20. 經過兩定點與定直線相切作圓

作圖：經過 AB 作任意圓結 AB 交 XY 於 C 由 C 點作此圓之切線 CD 次以

C為中心CD為半徑作圓交XY於P, P' 點若經過ABP及ABP'作圓即所求之圖



$$\text{證明：} CB \cdot CA = \overline{CD}^2 = \overline{CP}^2 = \overline{CP'}^2$$

故兩圓各切XY於P, P'同時經過AB

A ——— B

討論(1) AB兩點必在 XY 同側否則

經過AB之圓必與交本題不能做AB若與XY交有兩解

(2) AB若與 XY 平行，上之作法不能點引用故作圖如下

X ——— Y

作圖：作AB中垂線與XY交於P經過ABP三點作圖即得

證明：略

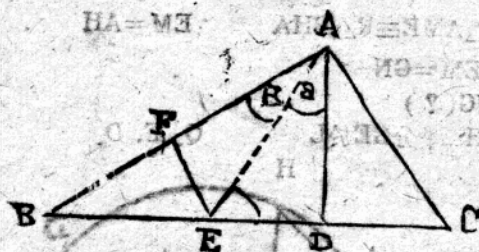
21. AD為直角三角形斜邊上之高

求證 $AD + BC > AB + AC$

證 作 $\angle BAD$ 之分角線AE交BC於E

又自E作 $EF \perp AB$ 則 $\triangle ADE \cong \triangle AFE$ (?)

$\therefore AD = AF$



則 $\angle AEC = \angle ABE + \angle BAE$

而 $\angle CAD = \angle ABC$ (?)

則 $\angle AEC = \angle CAD + \angle DAF$

$= \angle CAE \therefore CE = AC$

$\therefore AD + BC = AD + BE + CE$

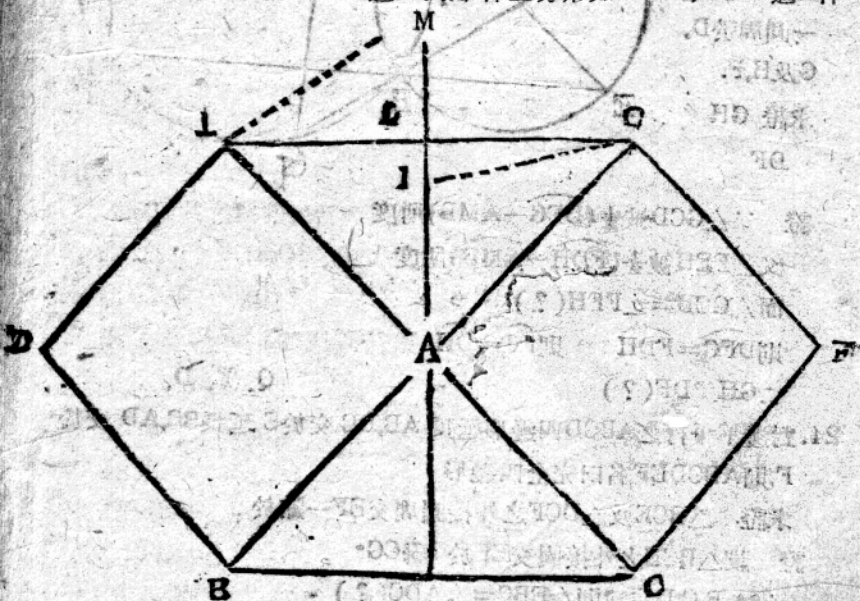
前已證明 $AD = AF$ $CE = AC$ 而 $BE > BF$ (?)

$\therefore AD + BE + CE > AF + AC + BF$

$\therefore AD + BC > AB + AC$

Q. E. D.

22. 在ABC三角形之AB, AC邊上向外作正方形如AEDF, ACFC過A作



BC邊生之高AH延長HA必平分GE

證 設HA交GE於L自E, G作HL之垂線EM, GN $\therefore \angle EAM = \angle AB$

H (?) $\angle AME = \angle BHA$

$\therefore AE = AB$ $\therefore \triangle AME \cong \triangle BHA$ $\therefore EM = AH$

同理 $GN = AH$ 而 $EM = GN$

則 $\triangle LME \cong \triangle LNG(?)$

$\therefore LE = LG$ 即 HA 平分 GE 於 L

Q. E. D.

23. 兩圓相交

於 A, B 過一

圓周兩定點

C, E 各作直

線 CA, CB 及

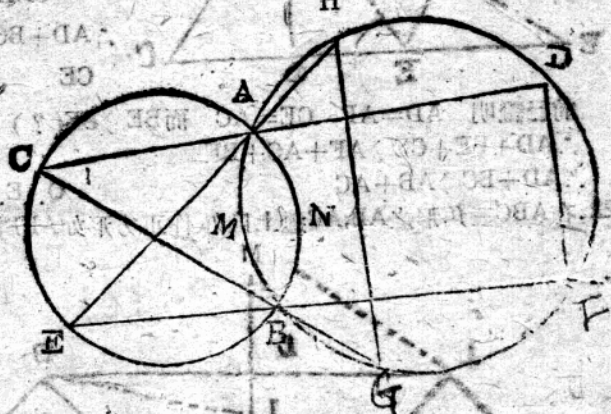
EA, EB 交他

一圓周於 $D,$

G 及 $H, F.$

求證 $GH \parallel$

DF



證 $\because \angle GCD$ 被 $\frac{1}{2}(\widehat{DFG} - \widehat{AMB})$ 所度

又 $\angle FEH$ 被 $\frac{1}{2}(\widehat{FDH} - \widehat{AMB})$ 所度

而 $\angle GCD = \angle FEH(?)$ 則 $\widehat{DFG} = \widehat{FDH}$

則 $\widehat{DFG} = \widehat{FDH}$ 則 $FG = DH$

$\therefore GH \parallel DF(?)$

Q. E. D.

24. 對邊不平行之 $ABCD$ 四邊形延長 AB, DC 交於 E , 延長 BC, AD 交於

F , 則 $ABCDEF$ 名曰完全四邊形

求證 $\triangle BCE$ 及 $\triangle DCF$ 之外接圓周交 EF 一點於

證 設 $\triangle BCE$ 之外接圓交 EF 於 G 聯 CG

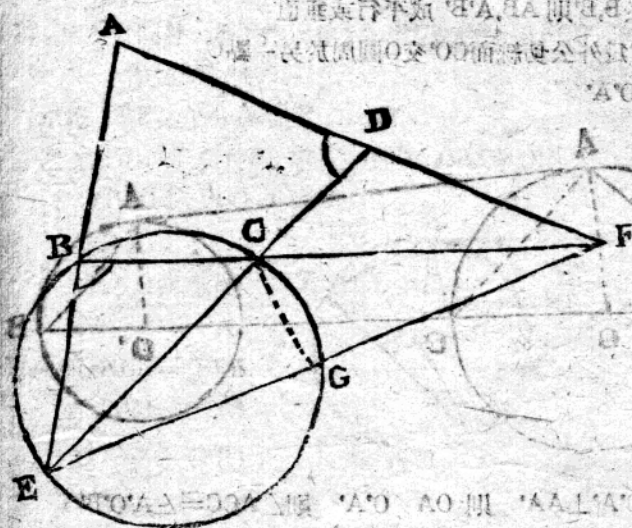
$\because A, B, C, D$ 共圓則 $\angle EBC = \angle ADC(?)$

又 B, E, G, C 共圓則 $\angle FGC = \angle EBC = \angle ADC$

$\therefore F, D, C, G$ 共圓但過 F, D, C 之圓祇有一無二

則 $\triangle DCF$ 之外接圓亦交 EF 於 G 點

Q. E. D.



附記 本圖

可證 $\triangle A$

BF, DCF,

ADE, BC

E 四圓共

點

(並且與

原題中

設原四邊

形 ABCD

內接於圓

的條件

無關)

此四圓所共之點名曰密爾爾點(Miguel Point)

25. AOB 爲圓之直徑, O 爲圓心 C 爲圓外任意一點聯 CA, CB 交圓周於 P, R 聯 OP, OR

求證 OP, OR 爲 $\triangle CRP$ 外接

圓之切線

證 聯 PR $\because A, B, R, P$ 共圓

$\therefore \angle CRP = \angle A(?)$

$\angle ORB = \angle B(?)$

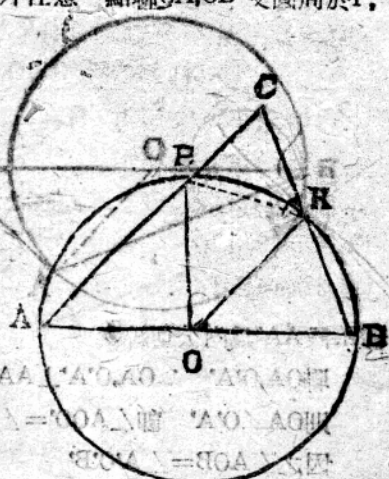
$\therefore \angle PRO = \angle C$

$\therefore OR$ 爲 CRP 圓之切線(?)

同理 OP 亦爲切線 Q.E.D.

26. AA' 爲相離兩圓 $\odot O, \odot O'$ 之公

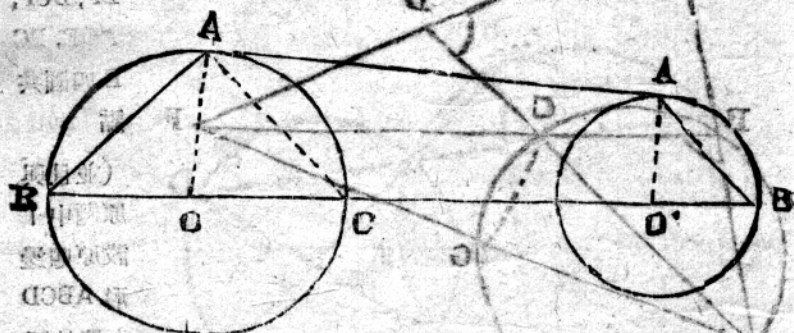
切線, 中心線 OO' 兩端延長各



交圓周於B, B' 則 AB, A'B' 成平行或垂直

證1. 設 AA' 為外公切線而 OO' 交 O 圓周於另一點 C

又聯 OA, O'A'

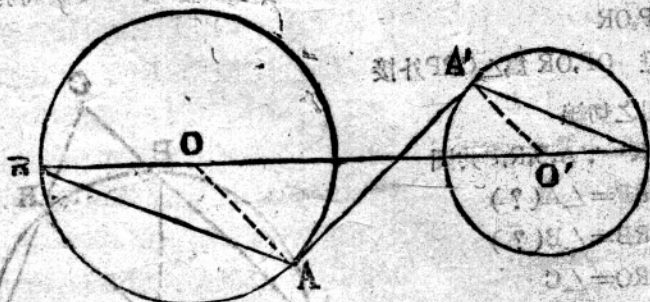


則 $OA \perp AA'$, $O'A' \perp AA'$ 則 $OA \parallel O'A'$ 則 $\angle ACC = \angle A'O'B'$

$\therefore \angle ACO = \angle A'B'O' \therefore A'B' \parallel AC$

設 BA, B'A' 延長交於 P 則 $\angle B'PB = \angle CAB$

$\therefore \angle CAB = R^\circ \therefore \angle B'PB = R^\circ \therefore AB \perp A'B'$



證2. 設 AA' 為內公切線

聯 OA, O'A' $\therefore OA \perp AA'$

則 $OA \parallel O'A'$ 即 $\angle AOO' = \angle A'O'O$

因之 $\angle AOB = \angle A'O'B'$

各角相等