樹文院長指正
後學祁開智敬呈

國立西北農學院
農田水利研究部

研究報告之三

粘滯流體之動力

祁開智

民國三十三年八月

粘滯流體之動力

祁開智

目次

標　題

I. 總論

本文係繼前文而作,目的在討論一粘滯流體繞一阻體流動時,在動力方面所引起之問題.所謂粘滯流體,係指一均勻,不可壓縮,並無限廣袤之實際流體.所謂阻體,係指一範圍

有限大小及形狀均不變之物體阻體對於觀察者假設係固定與流體間假設有一相對運動其大小方向為 $\vec{v}_\infty$。流動狀態假設為安定者。由此說明可知吾人所欲討論者為一空間問題亦即實際上最普通之問題。

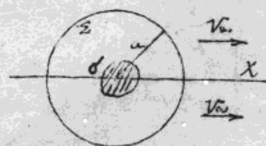

圖 1

研究此問題時吾人將取穿過阻體沿 $\vec{v}_\infty$ 之直線為笛卡坐標之X軸（圖 1）同時亦以之為圓球坐標之極軸或圓柱坐標之旋轉軸。坐標中其他各軸可依右手制選擇之。流區之內界自為阻體之表面 σ；至其外界當先以阻體中任意一點為原點作一半徑為 a 之球面 Σ，稱為控制球面。此控制面為流體之暫時外界。最後令 $a \to \infty$，則球面變為流體之實際外界。

吾人在此文中所取觀點與前文仍保持一貫，即以渦度為最主要之量，認其在流區內係作連續分佈。又在 σ 上完全粘附之特性，在 Σ 上漸趨於 $\vec{v}_\infty$ 之特性，亦均仍舊。惟動力學與運動學性質不同，討論方法自各異，即以邊界條件而言，前文中所述者，因限於當時需要，用於此文時亦欠完備，故粘滯流體之動力學，仍須從頭討論之。

1. 邊界條件之補充

根據完全粘附條件，前文中曾推得渦度之切線分量有 $\vec{n}\times\vec{q}+\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}=0$ 一關係，並曾利用之以求流速之解。至渦度之法線分量則謂未加限制，非真無限制也，蓋當時尚不需不需此類限制也。至在動力學中，此限制不僅需要，實亦為一

---

*"粘滯流體之運動學" 本部研究報告第一號

最重要之特性。令 $\vec{n}\cdot\vec{q}$ 代表此分量。因

$$\vec{n}\cdot\vec{q}=\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{v}=\vec{n}\cdot\nabla v\times\vec{\tau}+v\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{\tau}$$

故在阻體表面上 $\vec{n}\cdot\vec{q}=\vec{\tau}\times\vec{n}\cdot\nabla v$

但 $\nabla v=\vec{n}'\frac{\partial v}{\partial n'}$

$\vec{n}'$ 為與等快面（$v=$ 常數之面）垂直之單位法線。根據 $v=0$ 一條件，吾人知阻體之表面，亦為一等快面。故 n' 在阻體上，係與其表面垂直，即係與 n 取同一方向。由此特性，得

$$\vec{n}'\cdot\vec{\tau}\times\vec{n}=0$$

故 $$\vec{\tau}\times\vec{n}\cdot\nabla v=\vec{\tau}\times\vec{n}\cdot\vec{n}'\frac{\partial v}{\partial n'}=0$$

即在阻體表面上 $\vec{n}\cdot\vec{q}=0$ (1.1)

因之吾人得下列之重要定理：

"粘滯流體中之渦線，不能在阻體表面上開始或終了。"

（定理 1）

此實為初料所未及者，因通常以阻體表面為一不連續面，渦線可在其上開始或終了也。

將此結果與 $\vec{n}\times\vec{q}=\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}$ 一結果相併，得

$$\vec{q}=\vec{n}\vec{n}\cdot\vec{q}-\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{q}=\vec{n}\times\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}=\vec{n}\times\vec{\tau}\,\vec{n}\cdot\nabla v$$

因 $\vec{n}$ 與 $\vec{\tau}$ 互相垂直，$\vec{n}\times\vec{\tau}$ 亦為單位向量，故

$$|q|=\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| \quad \text{或} \quad q^2=\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \qquad (1.2)$$

關於外界上之條件，前文中所言者至為寬疏，只須流速趨於一極限足矣。在動力學中，除承認此條件外，尚需對流速趨近極限之快慢加以限制，方可解決吾人之問題。

C.W. Oseen* 在研究各種旋轉體之阻力時，曾假設在粘滯

---

* Oseen: Neue Methoden und Ergibnisse in der Hydrodynamik. Leipzig, 1927.

流動中，離阻體較遠處之流速，與在無窮遠處之流速 v_∞，無甚區別，意即流速趨近於極限甚為迅速。此假設之實驗根據，雖不甚完備，但其在數學方面，所生化繁為簡之效至大，且組所推得之結果，亦無甚疵瑕，實一極方便之假設也。現吾人對於流體之外界決計採用 Oseen 之假設，即當粘滯流體繞一阻體流動時，在離阻體較遠處，可令 $\vec{v}=\vec{v}_\infty$，因 $\vec{v}_\infty$ 為一不變流速，此假設自亦可釋為在遠處 $\vec{v}$ 之導數甚小，可視為一初級之微量，(Small quantity of first order) 其高次方可以不計也。

2. 動力微分方程之選擇

粘滯流體動力學中之基本方程式，自為 Navier—Stokes 方程式，此方程式在安定狀態下，通常寫為

$$\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} \quad ,$$

式中 ρ 代表流體之密度，μ 代表其粘滯係數。依此寫法，所用之從變數，當認為流速 $\vec{v}$ 及壓力 p。以此二者為變數，直接求運動方程式之漸近解，並用以討論粘滯流體之動力者，Oseen 以後，頗不乏人。惟在最普通情形下，運算繁複，諸多不便，今決捨之不用，另作選擇。選擇時，吾人應注意粘滯流動與理想流動之主要區別，為旋渦之存在與否。此區別以運動學而言，為在粘滯流動中，渦度 $\vec{q}$ 不為零；以動力學而言，為在粘滯流動中，Bernoulli 原理不復適用，即總能量 $p+\rho v^2/2$ 隨地而變。吾人可逆料粘滯流動之特徵，將視此二者之特性而定。依此指示，吾人另得二從變數，其一為渦度 $\vec{q}$，其二為總能量在某一點與在無窮遠之差 β，即

$$\beta \equiv (p+\rho v^2/2)-(p_\infty+\rho v_\infty^2/2) \qquad (1.3)$$

為方便起見，β 可稱為能差函數。

以此二者為從變數則 Navier-Stokes 方程式變為

$$\rho\vec{v}\times\vec{q} = \nabla\beta + \mu\nabla\times\vec{q} \qquad (1\cdot0)$$

式中 $\vec{v}$ 可視作微分方程之係數，即取此觀點用此方程式作計算仍不方便，因其中同時含有兩從變數也。變通之法係將此式化為兩個二次偏微分方程。吾人現須自求者，僅為 β 之微分方程，取 (1·0) 之散量，因 $\nabla\cdot\vec{v}=0$，先得

$$\nabla^2\beta = \rho\nabla\cdot\vec{v}\times\vec{q}$$

將同式用 $\vec{v}$ 造無向積，並將 $\vec{v}\cdot\nabla\times\vec{q}$ 展開為 $q^2-\nabla\cdot\vec{v}\times\vec{q}$，得能量方程式

$$\vec{v}\cdot\nabla\beta = \mu\nabla\cdot\vec{v}\times\vec{q} - \mu q^2 \qquad (1\cdot4)$$

由二式消去 $\nabla\cdot v\times q$，得 β 之微分方程為

$$\nabla^2\beta - \frac{\rho}{\mu}\vec{v}\cdot\nabla\beta = \rho q^2 \qquad (1\cdot5)$$

至 $\vec{q}$ 之微分方程，可由 (1·0) 式之轉量求得之。其結果為

$$\nabla^2\vec{q} - \frac{\rho}{\mu}\vec{v}\cdot\nabla\vec{q} = -\frac{\rho}{\mu}\vec{q}\cdot\nabla\vec{v} \qquad (1\cdot6)$$

多數書中，已有此式，惟未見充分利用耳。

(1·0)(1·5)(1·6) 三式為以後討論之基礎，今總稱之為動力方程式。其形式雖仍不簡單，但為吾人目的計，已足用矣。

在阻體表面上，因 $v^2=0$，總能量與壓力實際上無區別，各式化為

$$\nabla p + \mu\nabla\times\vec{q} = 0 \qquad (1\cdot7)$$

$$\nabla^2 p = 0 \qquad (1\cdot8)$$

$$\nabla^2\vec{q} + \frac{\rho}{\mu}\vec{q}\cdot\nabla\vec{v} = 0 \qquad (1\cdot9)$$

式 (1·8) 係將 $\nabla^2\frac{v^2}{2}$ 展開為 $v\nabla^2 v+(\nabla v)^2$ 後應用 $q^2=(\nabla v)^2$ 一關係而得者。

在離阻體較遠處 $\vec{v}-\vec{v}_\infty$，β，$\vec{q}$，及三者之各級導數均為初級之微量，其各種相乘之積，自為高級之微量。將式中各項之數量級先決定之，次將同級之項歸併，吾人得以初級微

量為限,各微分方程之形式為

$$\rho\vec{v}_\infty \times \vec{q} = \nabla p + \mu\nabla\times\vec{q} \qquad (1.10)$$

$$\nabla^2 p - \frac{\rho}{\mu}\vec{v}_\infty\cdot\nabla p = 0 \qquad (1.11)$$

$$\nabla^2\vec{q} - \frac{\rho}{\mu}\vec{v}_\infty\cdot\nabla\vec{q} = 0 \qquad (1.12)$$

最後之二式均係線微分方程,且每式只含有一從變數,不難用通常方法解之,化為二次微分方程之方便處,由此亦可見一班矣。

3. 微分方程之漸近解

吾人次一問題,為解(1·11)(1·12)兩微分方程式,如用笛卡坐標,令 $p = p_0 e^{\frac{\rho V_\infty x}{2\mu}}$, $\vec{q} = \vec{q}_0 e^{\frac{\rho V_\infty x}{2\mu}}$, 則兩式可化為所謂標準形式。依法微分,並消去共同因子,得 p_0 及 $\vec{q}_0$ 之微分方程為

$$\nabla^2 p_0 - k^2 p_0 = 0 \qquad \left(k = \frac{\rho V_\infty}{2\mu}\right) \qquad (1.13)$$

$$\nabla^2\vec{q}_0 - k^2\vec{q}_0 = 0 \qquad (1.14)$$

二式之適用仍只限於離阻體較遠之區域,吾人所欲求之解,其精確程度,自亦只限於此,故稱之為漸近解。今試先解 $\nabla^2 p_0 - k^2 p_0 = 0$

以阻內任意一點為原點,用圓球坐標 r, θ, φ, 則原微分方程變為

$$\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial p_0}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p_0}{\partial\varphi^2}\right\} - k^2 p_0 = 0$$

$$(1.13a)$$

其解之正常形式(Normal form)為

$$p_0 = \sum_n\sum_m Y_n^m Z$$

Y_n^m 代表 n 級 m 次之球面函數,即

$$Y_n^m = p_n^m(\cos\theta)(a_n^m \cos m\phi + b_n^m \sin m\phi)$$

如令 $R = k r$， Z 之微分方程則為

$$\frac{d^2 Z}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{dZ}{dR} - \left[1 + \frac{n(n+1)}{R^2}\right] Z = 0 \qquad (1\cdot13b)$$

此微分方程可有若干解，惟在無窮遠處（$r = R = \infty$）β_0 必須為零；故吾人所應取之解只能為 $Z_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{K_{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{R}}$，$K_{n+\frac{1}{2}}$ 即所謂"第二種貝色變函數"（Modified Bessel's Function of the second kind）*，其級數展開式為

$$K_{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2R}}\, e^{-R}\left\{1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n(n+1)\{n(n+1)-2\}\cdots\{n(n+1)-i(i-1)\}}{i!\ 2^i\ R^i}\right\}$$

因吾人所需者僅為漸近解，不必將每項算入；故今將 $K_{n+\frac{1}{2}}$ 寫為

$$K_{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2R}}\, e^{-R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

得

$$Z_n = \frac{e^{-R}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

$$\beta_0 = \frac{e^{-R}}{R}\sum Y_n^m\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

因 $x = r\cos\theta$ 最後得

$$\beta = \frac{e^{R(\cos\theta - 1)}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum Y_n^m$$

$$= \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^m(a_n^m \cos m\phi + b_n^m \sin m\phi) \qquad (1\cdot15)$$

欲解 $\nabla^2\vec{q} - \frac{1}{\nu}\vec{v}_\infty\cdot\nabla\vec{q} = 0$ 一式，最簡單之法，自係將 $\vec{q}$ 化為笛卡分量，每一分量所滿足之微分方程，與 β 所滿足者相同，其解可由 β 之解立即推得之。此法簡則簡矣，但為吾人目

---

* 可參考 Whittaker and Watson: Modern Analysis pp 373·374

的討,並不適宜,蓋吾人不能以獲得一解為止,尚須用之以作進一步之討論,若用此法,共將得六組之係數,其間有若干種關係存在,欲其可資應用,勢必將此種種關係一一決定,其繁難程度,有不可想像者,作者最後發現如不將$\vec{q}$化為笛卡分量,而化為圓柱分量,則一切均較簡單,因此法甚為特別,茲從詳述之:

令
$$\vec{q} = \vec{i} q_x + \vec{\varsigma}_1 q_\varsigma + \vec{\Phi}_1 q_\phi$$

$\vec{i}$係沿 $\vec{v}_\infty$,其方向不變;ς,ϕ為在與此方向垂直平面內之極坐標,$\vec{\varsigma}_1\ \vec{\Phi}_1$為其單位向量,因

$$\vec{\varsigma}_1 = \vec{j}\cos\phi + \vec{k}\sin\phi, \qquad \vec{\Phi}_1 = -\vec{j}\sin\phi + \vec{k}\cos\phi$$

得此二向量之導數中不等於零者,為

$$\frac{\partial \vec{\varsigma}_1}{\partial \phi} = \vec{\Phi}_1 \qquad \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \phi} = -\vec{\varsigma}_1$$

以圓球坐標 r, θ, ϕ 為變數,將 $\nabla^2 i q_x$, $\nabla^2 \vec{\varsigma}_1 q_\varsigma$ 及 $\nabla^2 \vec{\Phi}_1 q_\phi$

用 $$\nabla^2 a\vec{A} = a\nabla^2\vec{A} + 2\nabla a\cdot\nabla\vec{A} + \vec{A}\nabla^2 a$$

一式展開之,並將單位向量之各種導數代入,得

$$\nabla^2 \vec{i} q_x = i\nabla^2 q_x$$
$$\nabla^2 \vec{\varsigma}_1 q_\varsigma = \varsigma_1\nabla^2 q_\varsigma + \frac{2\vec{\Phi}_1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial q_\varsigma}{\partial\phi} - \vec{\varsigma}_1\frac{q_\varsigma}{r^2\sin^2\theta}$$
$$\nabla^2 \vec{\Phi}_1 q_\phi = \vec{\Phi}_1\nabla^2 q_\phi - \frac{2\vec{\varsigma}_1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial q_\phi}{\partial\phi} - \vec{\Phi}_1\frac{q_\phi}{r^2\sin^2\theta}$$

將三式加之,代入 $\nabla^2\vec{q} - k^2\vec{q} = 0$ 一式中,令每一分量等於零,得

$$\nabla^2 q_x - k^2 q_x = 0$$
$$\nabla^2 q_\varsigma - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial q_\phi}{\partial\phi} - \frac{q_\varsigma}{r^2\sin^2\theta} - k^2 q_\varsigma = 0 \qquad (1\cdot14a)$$
$$\nabla^2 q_\phi + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial q_\varsigma}{\partial\phi} - \frac{q_\phi}{r^2\sin^2\theta} - k^2 q_\phi = 0 \qquad (1\cdot14b)$$

q_x之微分方程與β之微分方程完全相同,其解自為

$$q_x = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+o\left(\tfrac{1}{R}\right)\right\}\sum_n\sum_m P_n^m\left(a_n^m\cos m\phi + b_n^m\sin m\phi\right) \qquad (1\cdot16)$$

至 q_ρ 及 q_ϕ 兩微分方程,因 q_ρ 與 q_ϕ 之互相夾雜,似覺棘手;但若改用複變數,則此類微分方程,不難迎刃而解。將 q_ϕ 式以 i $(=\sqrt{-1})$ 相乘後與 q_ρ 式相加,令

$$W = q_\rho + i q_\phi$$

則得 W 之微分方程為

$$\nabla^2 W + \frac{2i}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial W}{\partial\phi} - \frac{W}{r^2\sin^2\theta} - k^2 W = 0$$

或 $$\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial W}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2} + 2i\frac{\partial W}{\partial\phi} - W\right)\right\} - kW = 0$$

吾人所需之解,其形式自必為

$$W = Z(r)\,\Theta(\theta)\,e^{im\phi}$$

將此式代入微分方程中,並將 Z 及 Θ 兩從變數用通常方法分離之,以 λ 為分離常數,並令 $x = \cos\theta$, $R = kr$, 得

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left\{\lambda - \frac{(m+1)^2}{1-x^2}\right\}\Theta = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{dZ}{dR} - \left(\frac{\lambda}{R^2} + 1\right)Z = 0$$

Θ 一式為副 Legendre 多項式 (associated legendre's polynomials) 之微分方程,以 $n(n+1)$ 為 λ 之特殊值,其解為

$$\Theta = P_n^{m+1}(x)$$

至 Z 一式,使 $\lambda = n(n+1)$ 後,與前 (1·13b) 相同,其解仍為

$$Z_n = \frac{e^{-R}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

將各解併之,得 W 之解為

$$W = \sum_n\sum_m C_n^m P_n^{m+1} e^{im\phi}$$

令 $$C_n^m = A_n^m - iB_n^m$$

與 $e^{im\phi}$ 相乘後,將虛實兩部分開之,最後復以 $e^{R\cos\theta}$ 乘之,得

$$q_\theta = \frac{e^{R(R\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot17)$$

$$q_\phi = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi+A_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot18)$$

此q_θ及q_ϕ之漸近解也。可注意者即兩解中只含有兩組係數，又P之上指數非m而為m+1，其比較簡單之原因，即在於此。茲將求得之四漸近解，綜列於下，以便查閱：

$$\beta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^m(a_n^m\cos m\phi+b_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot15)$$

$$q_x = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^m(a_n'^m\cos m\phi+b_n'^m\sin m\phi) \quad (1\cdot16)$$

$$q_\theta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot17)$$

$$q_\phi = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi+A_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot18)$$

4. 漸近解中之條件

上列四解並非各不相干或毫無限制者。蓋其間尚有若干條件須經滿足也。此條件計有三種，茲分別討論之：

一為式(1·10)所含之條件，即在解之適用範圍內，

$$\rho\vec{V}_\infty\times\vec{q} = \nabla\beta+\mu\nabla\times\vec{q}$$

用圓球坐標及圓球分量，並以R(=kr)代替r，此條件相當於三無向條件，

$$-2Rq_\phi\sin\theta = \frac{R}{\mu}\frac{\partial\beta}{\partial R}+\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}q_\phi\sin\theta-\frac{\partial q_\theta}{\partial\phi}\right\} \quad (1\cdot10a)$$

$$-2Rq_\phi\cos\theta = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}+\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial q_r}{\partial\phi}-\frac{\partial R q_\phi}{\partial R}\right\} \quad (1\cdot10b)$$

$$2R(q_r\sin\theta+q_\theta\cos\theta) = \frac{1}{\mu\sin\theta}\frac{\partial\beta}{\partial\phi}+\left\{\frac{\partial Rq_\theta}{\partial R}-\frac{\partial q_R}{\partial\theta}\right\} \quad (1\cdot10c)$$

將圓球分量以圓柱分量表示之，得

$$q_r = q_x\cos\theta+q_\theta\sin\theta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}L$$

$$q_\theta = -q_x\sin\theta + q_z\cos\theta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\} M$$

$$q_\phi = q_\phi \qquad = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\} N$$

又 β $$= \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\} J$$

式中L,M,N,J代表含有球面函數之部分,内中不含R。

今試以(1·10a)式為例,將條件所示之結果計算之:

$$\frac{\partial\beta}{\partial R} = e^{R(\cos\theta-1)} J\left[\left\{\frac{1}{R}(\cos\theta-1)-\frac{1}{R^2}\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}+\frac{1}{R}O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial q_\theta\sin\theta}{\partial\theta} = e^{R(\cos\theta-1)}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\left\{-N\sin^2\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial N\sin\theta}{\partial\theta}\right\}$$

$$\frac{\partial q_\phi}{\partial\phi} = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\frac{\partial M}{\partial\phi}$$

消去共同因子$e^{R(\cos\theta-1)}$得(1·10a)式之條件為

$$-2\sin\theta N\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\} = \frac{J}{\omega}\left[\left\{(\cos\theta-1)-\frac{1}{R}\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\left\{\left(-N\sin^2\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial N\sin\theta}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial M}{\partial\phi}\right\}$$

吾人可想像式中$O(\frac{1}{R})$等,均為$\frac{1}{R}$之級數,如是則式中各項可依$\frac{1}{R}$之冪排列之。因式中關係對於任何R均適用,故$\frac{1}{R}$每冪之係數,必均為零。依此法得$\frac{1}{R^0}$之係數所應滿足之條件為

$$-2N\sin\theta = \frac{J}{\omega}(\cos\theta-1) - N\sin\theta$$

即 $-N\sin\theta = \frac{J}{\omega}(\cos\theta-1)$ 或 $-q_\phi\sin\theta = \frac{\beta}{\omega}(\cos\theta-1)$

以後各冪之係數,自當有類似之條件,但不必一一具算,因吾人原解之精確程度,只盡於此也。

其餘二條件,可用同樣方法計算之,計算後得最低係數所應滿足之條件為

$$q_\phi(1+\cos\theta) = -\beta/\mu \sin\theta$$

及

$$L\sin\theta = -M(1+\cos\theta)$$

因 $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$-q_\phi\sin\theta = \frac{J}{\mu}(\cos\theta-1)$ 與 $q_\phi(1+\cos\theta) = -\frac{J}{\mu}\sin\theta$

並無區別,故(1·10)式之三條件,實際上只得兩結果,即

$$q_\phi\sin\theta = \frac{\beta}{\mu}(1-\cos\theta) \quad 或 \quad q_\phi(1+\cos\theta) = -\frac{\beta}{\mu}\sin\theta \quad (1{\cdot}19)$$

$$q_r\sin\theta = -q_\theta(1+\cos\theta) \quad 或 \quad q_r(1-\cos\theta) = -q_\theta\sin\theta \quad (1{\cdot}20)$$

二為 $\nabla\cdot\vec{q} = 0$ 所含之條件,用圓球分量及圓球坐標,此條件為

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R^2 q_r + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial q_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial q_\phi}{\partial\phi}\right) = 0$$

用上節所述方法計算之,得最低係數所應滿足之條件為

$$(\cos\theta-1)q_r - \sin\theta\, q_\theta = 0$$

或

$$(1-\cos\theta)q_r = -q_\theta\sin\theta$$

此即(1·20)式所示者。故 $\nabla\cdot\vec{q} = 0$ 並不產生新關係,將各種結果並論之,吾人得下列之定理:

"在所設之精確範圍內,四解間共有二關係,即(1·19)(1·20)兩式所示者。"

(定理2)

由(1·20)一式,吾人可推得在精確範圍內,圓球分量與圓柱分量之關係為

$$\begin{aligned} q_r &= q_x \\ q_\theta &= -q_\rho \\ q_\phi &= q_\phi \end{aligned} \qquad (1{\cdot}21)$$

其簡單性有非初料所及者。或以為兩種分量間之關係既如

是簡單。若在開始時即用圓球分量，豈不更較直接，殊不知用圓球分量，則(1.12)一微分方程複雜為分，直無法求得其解。欲直接者反將不達矣。

$\beta, q_x, q_\rho, q_\phi$ 四量之間既有二關係，吾人固可以任意二量為主量，將其他各量化為此二量之函數。惟此二主量之選擇，對於以後計算，關係至大，如何選擇最為方便，是應細加考慮者。現吾人決計選擇 q_ρ 及 q_ϕ 二者為主量，最大原因，係因此二量共只有兩組之係數，其他任何二量均無同樣特性，至算法之難易等等，猶其餘事也。

以 q_ρ 及 q_ϕ 為準，其他各量可按下法化之

$$\beta = \mu \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} q_\phi = \mu \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} q_\phi \tag{1.22}$$

$$q_x = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} q_\rho = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} q_\rho = q_r$$

式中以 $\sin\theta$ 為分母，並不引起問題，因 q_ρ 及 q_ϕ 之解中所含者為 P_n^{m+1}，其值為 $\sin^{m+1}\theta \frac{d^{m+1}P_n(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^{m+1}}$，而 m 之值最小為零，故 P_n^{m+1} 中均有 $\sin\theta$ 一因子，可與分母中之 $\sin\theta$ 相消也。*

三為在表面上 $\vec{n}\cdot\vec{q}=0$ 所含之條件。$\vec{n}\cdot\vec{q}=0$ 一特性，乍視之似無法利用，蓋吾人之解，並不適用於阻體表面也。實

---

* 在平面問題中情形則不然，該處僅有 β 及 q_z 二量，其漸近解為

$$\beta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{\sqrt{R}} \sum a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

$$q_z = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{\sqrt{R}} \sum A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

用本節中之方法，得二者之關係為

$$\beta = \mu \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} q_z$$

由式知欲避免使 β 在 $\theta=0$ 處變為無窮大，則需有

$$\sum A_n = 0$$

一條件以限制 q_z 之解。此條件在求動力及力矩時，均需利用，實為平面問題中最主要之一結果。

則不然,因 $\nabla\cdot\vec{q}=0$,吾人可用散量定理在流區内積分,得

$$\int_{\tau}\nabla\cdot\vec{q}\,d\tau=\int_{\sigma}\vec{n}\cdot\vec{q}\,d\sigma+\int_{\Sigma}\vec{n}\cdot\vec{q}\,d\sigma=0$$

即
$$\int_{\Sigma}\vec{n}\cdot\vec{q}\,d\sigma=0 \qquad (1\cdot23)$$

因在 σ 上 $\vec{n}\cdot\vec{q}$ 已自為零也。在 Σ 上 $\vec{n}$ 係沿控制球面之半徑,故 $\vec{n}\cdot\vec{q}=q_r$,最後令控制球面之半徑 a 趨於無窮大,得第三種條件為

$$\lim_{a\to\infty}a^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}q_r\sin\theta\,d\theta\,d\phi=0$$

或
$$\lim_{R\to\infty}R^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}q_r\sin\theta\,d\theta\,d\phi=0$$

因 $q_r=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}q_s=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\qquad\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi)$

故此條件為

$$\lim_{R\to\infty}Re^{-R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e^{R\cos\theta}(1+\cos\theta)\sum_n\sum_m P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi)d\theta d\phi=0$$

令所需之積分為 I,先向 ϕ 積分,得

$$I=2\pi\int_0^{\pi}e^{R\cos\theta}(1+\cos\theta)\sum_n P_n^1A_n^0\,d\theta$$

因 $P_n^1=\sin\theta\dfrac{dP_n}{d\cos\theta}$, $\sin\theta d\theta=-d\cos\theta$ 令 $\cos=x$ 得

$$I=2\pi\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1+x)\sum_n\frac{dP_n}{dx}A_n^0\,dx$$

$$=2\pi\sum_n A_n^0\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}dx$$

式中之積分,未免生疏;惟因與此類似之積分,以後將屢見不鮮,茲特將此類積分之求法,及其所代表函數之特性,在此就便說明之:

吾人已知*

$$\int_{-1}^{1} e^{Rx} P_n dx = \sqrt{\frac{2\pi}{R}}\, I_{n+\frac{1}{2}}(R)$$

$I_{n+\frac{1}{2}}$ 代表虛變數之貝色函數 (Bessel function with purely imaginary argument) 具漸近展開式為+

$$I_{n+\frac{1}{2}}(R) = \frac{e^R}{\sqrt{2\pi R}}\left[1+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \frac{n(n+1)\{n(n+1)-2\}\cdots\{n(n+1)-i(i-1)\}}{i!\ \ 2^i\ \ R!}\right]$$

今令 $S_n(R) = \int_{-1}^{1} e^{Rx} P_n dx$

於是得 $S_n(R)$ 之漸近展開式為

$$S_n(R) = \frac{e^R}{R}\left[1-\frac{n(n+1)}{2R}+\frac{n(n+1)\{n(n+1)-2\}}{8R^2}-\cdots\cdots\right] \quad (1A)$$

為吾人目的計,級數之首三項即已足用矣。

P_n之種種特性,比較熟悉,吾人可利用其循環公式 (Recurrence formulae),以求S_n之循環公式。先取

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

一式,得

$$\int_{-1}^{1} e^{Rx}(P'_{n+1}-P'_{n-1})dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} e^{Rx}P_n dx = (2n+1)S_n$$

將左邊之項分部積分之第一循環公式

$$S_{n-1} - S_{n+1} = (2n+1)\, S_n / R \quad (1B)$$

次取 $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$

得 $(2n+1)\int_{-1}^{1} e^{Rx} x P_n dx = (n+1)\int_{-1}^{1} e^{Rx} P_{n+1} dx + n\int_{-1}^{1} e^{Rx} P_{n-1} dx$

$$= (n+1)S_{n+1} + nS_{n-1}$$

---

* 參考 whittoker and watson: Modern analysis P. 398

+ 同上 P. 373

但 $\int_{-1}^{1} e^{Rx} x P_n dx = \frac{dS_n}{dR}$ 故得第二循環公式為

$$\frac{dS_n}{dR} = \frac{(n+1)S_{n+1} + nS_{n-1}}{2n+1}$$

利用第一循環公式此式可寫為

$$\frac{dS_n}{dR} = S_{n+1} + \frac{nS_n}{R} = S_{n-1} - (n-1)\frac{S_n}{R} \qquad (1C)$$

(1A)(1B)(1C)三公式對於吾人目的已經足用,其他特性,不必具述。

欲求 $\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}dx$,先作分部積分,得

$$\int e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}dx = 2e^{R} - \left\{R\left(S_n + \frac{dS_n}{dR}\right) + S_n\right\}$$
$$= 2e^{R} - \left\{R(S_n + S_{n+1}) + (n+1)S_n\right\}$$

將 S_n 之漸近展開式代入,併項後得

$$\int e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}dx = \frac{n(n+1)}{R}e^{R}\left[1 - \frac{n(n+1)}{4R} + \cdots\cdots\right]$$

故 $\lim\limits_{R\to\infty} R^2 \iint q_n \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \lim\limits_{R\to\infty} R e^{-R} 2\pi \sum\limits_n A_n^0 \frac{n(n+1)}{R} e^{R}\left[1 - \frac{n(n+1)}{4R} + \cdots\right]$

$$= 2\pi \lim_{R\to\infty} \sum_n n(n+1) A_n^0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{4R^2} + \cdots\cdots\right]$$
$$= 2\pi \sum_n n(n+1) A_n^0$$

由是得第三種條件為

$$\sum_n n(n+1) A_n^0 = 0 \qquad (1\cdot 24)$$

以上三種條件,為在最普通情形下漸近解所應滿足之條件。以後種種結論均係直接或間接根據此種條件,故其重要性實不亞於漸近解本身也。

5. 漸近解之討論

渦度之漸近解求得矣,吾人自欲尋問其中所含之意義