大學用書

高等動力學

(應用力學續册)

Applied Mechanics
More Dynamics

原著者：Charles E. Smith
譯述者：洪 清 森

發行者 科技圖書股份有限公司

大學用書

高等動力學

(應用力學續册)

Applied Mechanics

More Dynamics

原著者：Charles E. Smith

譯述者：洪 清 森

發行者　科技圖書股份有限公司

3.53

本書為 Smith 教授所著應用力學之續册。原書由 Wiley 書局1976年出版一共三册。已將一二兩册合訂成一本已於本年一月出版。第三册改為續册始於六月出版。

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書　名：高等動力學
原著者：Charles E. Smith
譯述者：洪　清　森
發行人：趙　國　華
發行者：科技圖書股份有限公司
台北市博愛路 185 號二樓
電話：3 1 1 0 9 5 3
郵政劃撥帳號：1 5 6 9 7

六十六年六月初版　　特價新台幣60元

原　　序

十四章與十六章爲動力學之續篇而將運動學和剛體動力學予以推廣。十五章推論矩陣代數與座標轉換。十七章係討論廣義座標與拉格朗日動力學，此係靜力學中虛功法之推廣。十八章係討論系統的動力行爲，包括對線性定常係數模型等性質之詳細分析。

十四、十五與十六章可作爲剛體動力學的課程。十五與十八章可與其他三章獨立開課，作爲系統動力學的課程用。此一課程對振動學與控制系統之進一步研究，提供良好的基礎。

在上册動力學中之第九章、第十章與十一章（除去11-4）以及12-1與12-2節，已包含了剛體動力學的必要基礎。此外，十三章我們竭力建議讀者要詳加研究。對於修過上册的靜力學與動力學課程而具良好基礎的讀者們而言，十七章與十八章將極易吸收。但在十八章中有些例題則需要對電路與電動機械之反應，具有粗淺的認識。

就如在第一册的序言中所說，我强調向量分量之觀念來作爲向量的幾何說明。例如式 14-1 一般推導的方法爲

但在十四章中或其他著書，對該式的導法，用了更多的觀念。這些不同之導法，要在吾人對那些觀念有着更多認識之後才能對此式作一純熟的應用。另一例子，是將歐拉方程式之應用作爲解析剛體動力學的基礎，亦需在吾人對角動量與其依時間之變化情形有所瞭解之後，才能有一較透徹的認識。

至於本書所用的符號方面，向量符號上的小希臘字母代表由字母所表示的參考系上所觀察而得之時間導數。雖然此一表示方法，其他學者不常使用，但此法確能比一般常用逗點表示時間導數的方法，把意義說明得更清楚些。例如 $_{\alpha}\overset{\beta}{\mathbf{H}}$ 即代表從 α 參考系觀察而得之角動量向量，而由 β 參考系來觀察其時間導數之變化。而傳統的 $(\mathbf{H})_{\beta}$ 符號恐怕要費更多的功夫來說明兩個不同參考系間的關係。

謝辭從略。

斯密斯

1975年7月於奧利崗

目　　錄

第十七章　虛功法在動力系統之應用

第十八章　系統之動力行為

附錄C　線段、面積與體積性質

參考書目

14

ROTATIONAL MOTION

旋轉運動

從一參考座標系來觀察物體的運動情形，和由相對運動於前一參考座標的另一座標系來觀察物體的運動情形。兩者間的相互關係，在解許多動力學問題中都需先加予弄清。圖 14 - 1，例舉說明了依軌道運行的衛星平面圓周運動，由於地球對極軸自轉的影響下，發生“扭曲”（distortion）情形。在許多機器裝置中可以找到這樣的例子：即運動系統中的某一部分系統，相對於另一部分系統的運動，可以簡易地決定出來，然而若欲由慣性參考系（inertial reference frame）來觀察，則顯得十分複雜。本章中就將一些處理這一類運動問題的分析方法加以推廣討論。

14.1 向量之導數

吾人將一參考系（reference frame）認爲是空間之點集合，其間每任意兩點的距離皆維持固定不變。因此至少需要不共面的四點才能組成。在此參考系中引入一個適當的座標系統，則以兩端點來定義一個向量，可用一組向量的分量來作爲該一向量的數學描述。

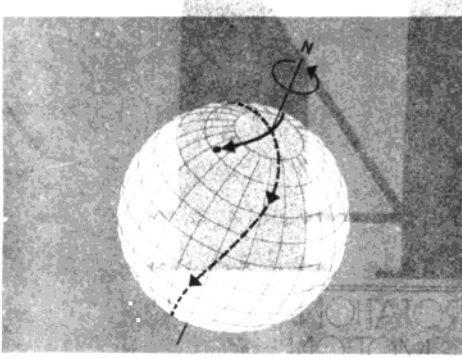


圖 14-1

在本節中，吾人將探究一參考系相對於另一參考系的運動，其對向量的時間導數之影響。

今參考系 β 相對於參考系 α 而旋轉，我們來分析從 α、β 兩個不同參考系中所見向量 **A** 的情形。若向量 **A** 從 β 系來看維持固定不變，故由 β 系來看 **A** 的導數爲零。而由 α 系來看 **A** 乃繼續不斷改變其方向。故由 α 系來看，**A** 的導數即不為零。故由一簡單的向量開始，經由微分吾人可以定義得一個以上的不同向量。向量 **A** 的導數，乃隨向量 **A** 和觀察其改變所在的參考系而決定。

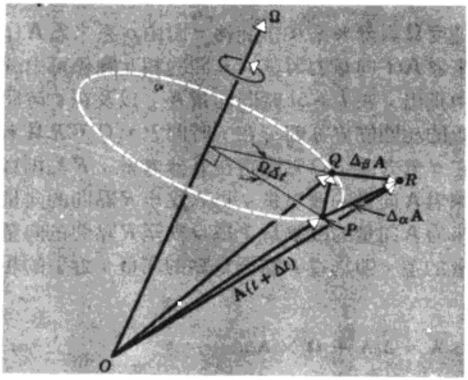


圖 14-2

若參考系 β 對參考系 α 只有相對的移動而無轉動現象，則在 β 觀察而得的向量的導數，將和在 α 觀察而得的相同。這一個結果乃是直接由下述的事實而來：向量僅以參考系中兩端點的相對位置為項以定義之，而不問向量矢頭的位置。

當有一個以上的參考系必須考慮時，吾人以

$$\frac{d_\alpha \mathbf{A}}{dt} = \overset{\alpha}{\dot{\mathbf{A}}} \qquad [9\text{-}2]^*$$

來表示在 α 參考系所觀察而得的 **A** 向量導數。當自始至終僅有一個參考系時，則向量 **A** 之導數可選用下式表示之

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{A}} \qquad [9\text{-}3]$$

在牛頓動力學（Newtonian dynamics）中，即以上式表示由一慣性參考系所觀察而得的導數。純量 p 的導數與參考座標系無關，可選用下式表示之

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p} \qquad [9\text{-}4]$$

*括號內的式子，在先前曾經推廣過。

今設參考系 β 以角速度 Ω 對參考系 α 作旋轉。則由 α 系來看 $\mathbf{A}(t)$ 向量的導數，和由 β 系來看 $\mathbf{A}(t)$向量的導數，其間的相互關係可由圖 14-2 中推廣出來。圖中指出，在 $t+\Delta t$ 時間向量 $\mathbf{A}$，以及在 t 時間和 $\mathbf{A}$ 具同一位置的兩向量的相關位置亦即，在 t 時間 P、Q、R 具有同一個位置。P 點固定在 α 參考系，Q 點固定在 β 參考系，R 點則爲向量 $\mathbf{A}$ 的起點。由 α 系來看 $\mathbf{A}$ 向量的改變量，爲 P 點至 R 點間的向量，以 $\Delta_\alpha \mathbf{A}$ 表之。由 β 系來看 $\mathbf{A}$ 向量的改變量，爲 Q 點至 R 點間的向量，以 $\Delta_\beta \mathbf{A}$ 表示之。此兩者的差，即爲從 P 點至 Q 點的向量，近似的相等於 $\Omega\times\mathbf{A}\Delta t$ 。故

$$\Delta_\alpha \mathbf{A} \approx \Delta_\beta \mathbf{A} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}\Delta t$$

當 $\Delta t \to 0$，此近似式成爲接近正確，而得

$$\frac{d_\alpha \mathbf{A}}{dt} = \frac{d_\beta \mathbf{A}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}$$

或

$$\boxed{\overset{\alpha}{\dot{\mathbf{A}}} = \overset{\beta}{\dot{\mathbf{A}}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}} \tag{14-1}$$

此關係式，對任何包含更多參考系的分析而言，乃是最基本和最重要的。下節中對運動學的一般研討，將把上式應用於位置與速度向量。在第十六章剛體力學的研討上，亦將上式應用到角動量向量（angular momentum vectors）上去。

習題：

14-1 一向量具有如下的分量

$$\mathbf{A} = \cos \omega t\mathbf{u}_x + \sin \omega t\mathbf{u}_y + bt\mathbf{u}_z$$

其中 x、y 與 z 軸皆固定於 β 參考系。β 系對 α 系以下列的角速度而旋轉。試求

$$_\alpha\mathbf{\Omega}_\beta = 3\omega\mathbf{u}_z$$

與諸式 $\overset{\beta}{\dot{\mathbf{A}}}, \overset{\alpha}{\dot{\mathbf{A}}}, \overset{\alpha\beta}{\ddot{\mathbf{A}}}$, and $\overset{\beta\alpha}{\ddot{\mathbf{A}}}$

14-2 重解 14-1 題，唯 x、y 和 z 軸皆固定於參考系 α 。

14-3 x、y與z軸固定於參考系β上，同時β系對參考系α有一Ω的角速度。故由α系來看單位基向量（unit base vectors）$\mathbf{u}_x$、$\mathbf{u}_y$與$\mathbf{u}_z$的變率為

$$\overset{\alpha}{\dot{\mathbf{u}}}_x = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}_x \qquad \overset{\alpha}{\dot{\mathbf{u}}}_y = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}_y \qquad \overset{\alpha}{\dot{\mathbf{u}}}_z = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}_z$$

但由β系來看其單位基向量的變率為零。試求由α系來觀察下列方程式中每一部分的導函數

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{u}_x + A_y\mathbf{u}_y + A_z\mathbf{u}_z$$

同時由此結果推廣(14-1)式。

14-4 試證明 以得到參考系的轉動率(rotation rate)對純量$\mathbf{A}.\mathbf{B}$的導數沒有影響的結論。

14-5 試證明

$$\mathbf{A} \times \overset{\alpha}{\dot{\mathbf{B}}} + \overset{\alpha}{\dot{\mathbf{B}}} \times \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \overset{\beta}{\dot{\mathbf{B}}} + \overset{\beta}{\dot{\mathbf{A}}} \times \mathbf{B} + {}_{\alpha}\mathbf{\Omega}_{\beta} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

並求式(14-1)與式(9-8)為同一的。

14.2 質點運動學

質點的速度被定義為位置向量（position vector）的導數，其中有兩項與參考系有關。第一：位置向量必須能定出質點與參考系中某一固定點的位置相對，第二：導數必須由同一個參考系來觀察。故，吾人定義由α系觀察而得的P點速度為

$$_{\alpha}\mathbf{v}_P = \overset{\alpha}{\dot{\mathbf{r}}}_{P/A} \tag{14-2}$$

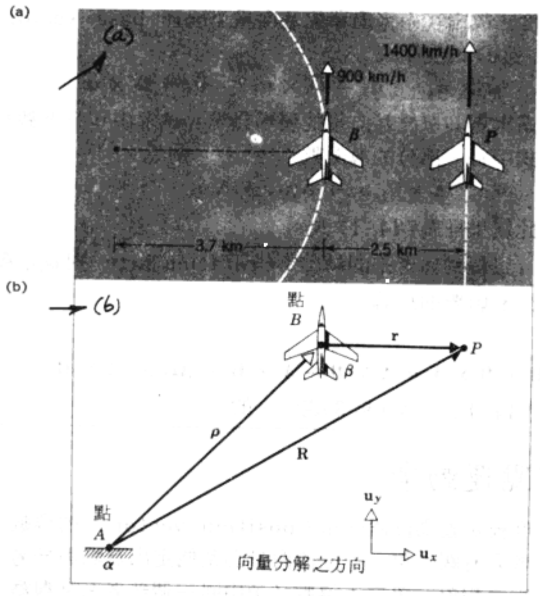
其中A為α參考系中一個任意的固定點。

例題

圖14-3a中飛機β以900公里/小時 的速度作側傾轉彎飛行，轉彎半徑為3.7公里。另一飛機P在圖示的瞬間位置以1400公里/小時的速度飛機β作平行飛行。試問從飛機β來看飛機P的飛行速度為若干？

第二只飛機P在此可當作本問題中所求之點。但飛機β却必須視為三度空間的剛體，或三度空間的參考系。因為飛機β改變了傾斜和方向，影響到由其上觀察而得的質點速度。參考系β，可視為以3.7公里的半徑作旋轉，今取α參考系固定在地面上，定義點A與點B分別固定在系α與系β。如圖14-3b所示。

圖 14-3



由位置關係

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}$$

微分之得

$$\overset{\alpha}{\dot{\mathbf{R}}} = \overset{\alpha}{\dot{\boldsymbol{\rho}}} + \overset{\alpha}{\dot{\mathbf{r}}} \qquad \text{(a)}$$

由 α 系觀察所得的 R 與 ρ 量的導數，可由已知條件立刻求得如下，

$$\overset{\alpha}{\dot{\mathbf{R}}} = {}_{\alpha}\mathbf{v}_P = 1400 \text{ km/h } \mathbf{u}_y \qquad \text{(b)}$$

$$\overset{\alpha}{\dot{\boldsymbol{\rho}}} = {}_{\alpha}\mathbf{v}_B = 900 \text{ km/h } \mathbf{u}_y \qquad \text{(c)}$$

但吾人欲求的速度為由 β 參考系所觀得的 r 導數，而非 $\overset{\alpha}{\dot{\mathbf{r}}}$。今應用式（14-1）於 r 上，得

$$\overset{\alpha}{\dot{\mathbf{r}}} = \overset{\beta}{\dot{\mathbf{r}}} + \left(\frac{900 \text{ km/h}}{3.7 \text{ km}} \mathbf{u}_z\right) \times (2.5 \text{ km } \mathbf{u}_x) \qquad \text{(d)}$$

將(b)、(c)與(d)式代入(a)式得

$$1400\ \text{km/h}\ \mathbf{u}_y = 900\ \text{km/h}\ \mathbf{u}_y + \overset{\beta}{\dot{\mathbf{r}}} + \frac{(900)(2.5)}{3.7}\ \text{km/h}\ \mathbf{u}_y$$

解求所需的速度，得

$${}_{\beta}\mathbf{v}_P = \overset{\beta}{\dot{\mathbf{r}}} = -108\ \text{km/h}\ \mathbf{u}_y$$

故飛機P由飛機β看來，乃是以每小時 108 公里的速率向後落荒飛去。

在α參考系中，P點的加速度，被定義爲α系觀察而得的P點速度的導數：

$${}_{\alpha}\mathbf{a}_P = {}_{\alpha}\overset{\alpha}{\dot{\mathbf{v}}}_P = \overset{\alpha\alpha}{\ddot{\mathbf{r}}}_{P/A} \tag{14-3}$$

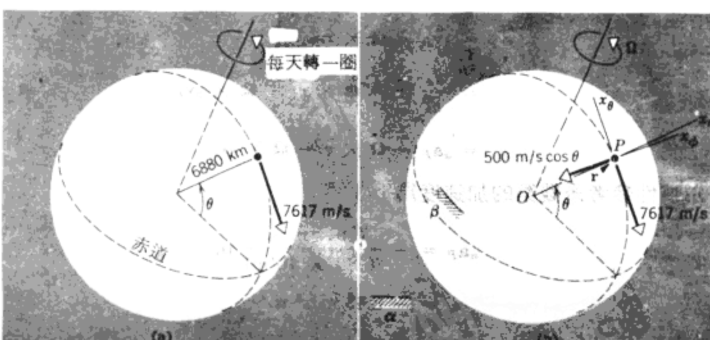
例題

一衞星從一慣性參考系中觀察，以一 7617 分/秒的速度運行於一半徑爲 6880 公里的圓極軌道（circular polar orbit），如圖 14-4a 所示。試解由地球面上觀察所得的速度與加速度爲若干？

今吾人視此慣性參考系爲由此參考系看來。地球每天繞其極軸旋轉一周，同時此參考系每年亦繞太陽一周的情形。

如圖 14-4b所示，吾人以參考系α代表此慣性座標系，固定於地球表面的參考系爲β，O點爲地球的中心（對α、β系皆固定不變。

圖 14-4



）P 點固定於衛星上，令向上、向東、與向北方向分別以 x_r、x_ϕ 與 x_θ 表示。則由地面觀察而得的速度被定義為

$$ {}_\beta\mathbf{v}_P = \overset{\beta}{\mathbf{r}} $$

但由式（14-1）

$$ \overset{\beta}{\mathbf{r}} = \overset{\alpha}{\mathbf{r}} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} $$

其中 β 系對 α 系的角速度為

$$ \mathbf{\Omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ h}} (\cos\theta\, \mathbf{u}_\theta + \sin\theta\, \mathbf{u}_r) $$

$$ = 7.272 \times 10^{-5} \text{ rad/s} (\cos\theta\, \mathbf{u}_\theta + \sin\theta\, \mathbf{u}_r) $$

此外

$$ \overset{\alpha}{\mathbf{r}} = {}_\alpha\mathbf{v}_P = -7617 \text{ m/s } \mathbf{u}_\theta $$

與

$$ \mathbf{r} = 6.88 \times 10^6 \text{ m } \mathbf{u}_r $$

將以上諸值代入得

$$ {}_\beta\mathbf{v}_P = \overset{\alpha}{\mathbf{r}} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} $$

$$ = -7617 \text{ m/s } \mathbf{u}_\theta - 500 \text{ m/s} \cos\theta\, \mathbf{u}_\phi $$

由地面求觀察而得的加速度定義為

$$ {}_\beta\mathbf{a}_P = {}_\beta\overset{\beta}{\mathbf{v}}_P $$

再利用式（14-1），將 a 代以速度分析之，可寫成

$$ {}_\beta\overset{\beta}{\mathbf{v}}_P = {}_\beta\overset{\alpha}{\mathbf{v}}_P - \mathbf{\Omega} \times {}_\beta\mathbf{v}_P $$

$$ = \frac{d_\alpha}{dt} (\overset{\alpha}{\mathbf{r}} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) - \mathbf{\Omega} \times {}_\beta\mathbf{v}_P $$

$$ = {}_\alpha\mathbf{a}_P - \mathbf{\Omega} \times \overset{\alpha}{\mathbf{r}} - \mathbf{\Omega} \times {}_\beta\mathbf{v}_P $$

由慣性參考系觀察的加速度為

$$ {}_\alpha\mathbf{a}_P = -\frac{(7617 \text{ m/s})^2}{(6.88 \times 10^6 \text{m})} \mathbf{u}_r $$

$$ = -8.43 \text{ m/s}^2\, \mathbf{u}_r $$

上式剩餘諸項，可由速度分析而得：

$$
\begin{aligned}
-\mathbf{\Omega}\times\overset{\alpha}{\dot{\mathbf{r}}}-\mathbf{\Omega}\times{}_{\beta}\mathbf{v}_P &= -\mathbf{\Omega}\times({}_{\alpha}\mathbf{v}_P+{}_{\beta}\mathbf{v}_P)\\
&= -(7.272\times10^{-5}\ \text{rad/s})(\cos\theta\,\mathbf{u}_\theta+\sin\theta\,\mathbf{u}_r)\\
&\quad\times(-15\,234\ \text{m/s}\,\mathbf{u}_\theta-500\ \text{m/s}\cos\theta\,\mathbf{u}_\phi)\\
&= -(0.04\cos\theta\sin\theta\,\mathbf{u}_\theta\\
&\quad-1.11\sin\theta\,\mathbf{u}_\phi-0.04\cos^2\theta\,\mathbf{u}_r)\text{m/s}^2
\end{aligned}
$$

將這些值代入上式可得在地面上觀察而得的加速度爲

$$
{}_{\beta}\mathbf{a}_P=[0.04\cos\theta\sin\theta\,\mathbf{u}_\theta-1.11\sin\theta\,\mathbf{u}_\phi-(8.43+0.04\cos^2\theta)\mathbf{u}_r]\text{m/s}^2
$$

其中看來有點異樣的 $-1.11\sin\theta\,\text{m/s}^2\,\mathbf{u}_\phi$ 向西加速度分量但在圖 14－1 的路徑曲率中是十分顯明而易解的。

速度的關係通式和加速度的關係通式：一般由運動參考系所做對於速度與加速度的描述，可由式（14－1）求得。就如在前面所學的例題一般。由此式可將物理量直接代入以減少對這類問題的分析程序。

如圖 14－5，設一 P 點的運動，吾人由兩個不同的參考系觀察之，A 點和 B 點分別固定於 α 和 β 參考系上。β 對 α 的運動有如圖 $\rho(t)$ 同時參有 Ω 角速度的轉動。旋轉軸爲一通過 B 點之軸。在 14－4 節中

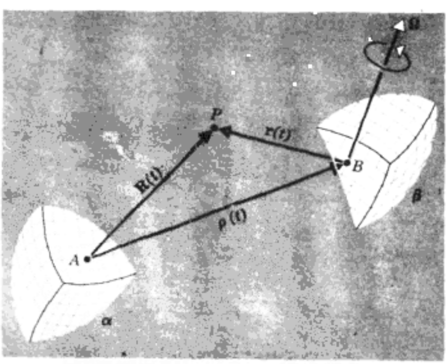


圖 14-5