数学分析习题集题解

曹 敏 谦

上海交通大学应用数学系

封面设计：童品苗 张建元

校　　对：孙薇荣 裘义端

数学分析习题集

题　　解

上海交通大学印刷厂印刷

内部教材　书号：8112

本解答系根据李荣涑译Б.П.吉米多维奇著“数学分析习题集”(修订本)而作。第十二分册包括第八章重积分和曲线积分中的内容。

目　　录

第八章　重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1°. 二重积分的直接计算法　所谓连续函数 $f(x, y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, 而其和为对所有 i, j 使 $(x_i, y_j) \in \Omega$ 的那些值来求的。

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy。$$

2°. 二重积分中的变量代换　若可微分的连续函数

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v)$$

把平面 xOy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 uOv 上的域 Ω' 及雅可比式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0,$$

则以下公式正确：

$$\iint_{\Omega} f(x, y)dxdy = \iint_{\Omega'} f[x(u,v), y(u,v)]|I|dudv。$$

特别是，根据公式 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$ 变换为 r 和 φ 的情形有

$$\iint_{\Omega} f(x,\ y)dxdy=\iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)r\,drd\varphi。$$

3901. 把积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xydxdy$ 当作积分和的极限，用直线

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算所论积分的值。

解：根据题意，取 $x_i=\frac{i}{n}$，$y_j=\frac{j}{n}$，

$$\Delta x_i=\Delta y_j=\frac{1}{n}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)，则得$$

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xydxdy=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\Delta x_i\Delta y_j$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i\ \ j=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}。$$

3902. 用直线

$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\quad (i,j=0,1,\cdots,n)$$

把域 $1\leqslant x\leqslant 2$，$1\leqslant y\leqslant 3$ 分为许多矩形。作出函数 $f(x,\ y)=x^2+y^2$ 在此域内的积分下和 $\underline{S}$ 和与积分上和 $\overline{S}$。

当 $n\to\infty$ 时，上和与下和的极限等于什么？

解：被积函数为 $f(x,\ y)=x^2+y^2$。根据题意的划分，

则得 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$\Delta y_j=\frac{2}{n}$ $(i, j=1, \cdots, n)$。

若令 $x_i=1+\frac{i}{n}$，$y_j=1+\frac{2j}{n}$，则积分下和为

$$\underline{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{i-1}, y_{j-1})\Delta x_i\Delta y_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{2(j-1)}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\ \frac{2}{n}$$

$$=\frac{2}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]$$

$$=\frac{2}{n}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n\right.$$

$$\left.+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]$$

$$=2\left[2+\frac{6}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{5}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}i^2\right]$$

$$=2\left[2+\frac{6}{n^2}\ \frac{n(n-1)}{2}+\frac{5}{n^2}\ \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$=2\left[2+3-\frac{3}{n}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2n}+\frac{5}{6n^2}\right]$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2};$$

又积分上和为

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_i, y_j)\Delta x_i\Delta y_j$$

$$=\frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]$$

$$=\frac{2}{n}\left[n+(n+1)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right.$$

$$\left.+n+2(n+1)+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}。$$

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}=\lim_{n\to\infty}\overline{S}=\frac{40}{3}。$$

3903．用一系列内接正方形作为积分域的近似域，这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点，并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值。近似地计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较。

解：由对称性并根据题意得

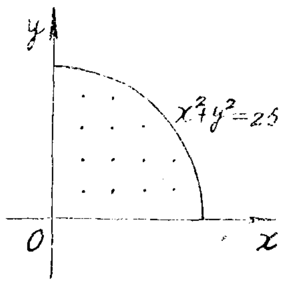

图 3903 题

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x^2+y^2\leqslant 25}}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&=4\left\{\frac{1}{\sqrt{24+1^2+1^2}}+\frac{2}{\sqrt{24+1^2+2^2}}\right.\\
&\quad+\frac{2}{\sqrt{24+1^2+3^2}}+\frac{1}{\sqrt{24+2^2+2^2}}\\
&\quad+\frac{2}{\sqrt{24+1^2+4^2}}+\frac{2}{\sqrt{24+2^2+3^2}}\\
&\quad+\frac{2}{\sqrt{24+2^2+4^2}}+\frac{1}{\sqrt{24+3^2+3^2}}\\
&\quad\left.+\frac{1}{\sqrt{24+3^2+4^2}}\right\}\\
&=4\left[\frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{1}{\sqrt{42}}\right]\\
&\quad+8\left[\frac{1}{\sqrt{29}}+\frac{1}{\sqrt{34}}+\frac{1}{\sqrt{41}}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\sqrt{37}}+\frac{1}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{49}}\right]\\
&\approx 4(0.19612+0.17678+0.15430)\\
&\quad+8(0.18570+0.17150+0.15617\\
&\quad+0.16440+0.15076+0.14286)\\
&=9.87992\approx 9.88_{\circ}
\end{aligned}
$$

以下来计算 I 的精确值。如果采用极坐标，则此积分是非常容易计算的。但在刚开始讨论二重积分的时候，往往只限于用直角坐标。下面的计算就在这样的限制下进行。

$$
\begin{aligned}
I&=4\int_0^5 dx\int_0^{\sqrt{25-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\\
&=4\int_0^5 \ln\left[\,y+\sqrt{24+x^2+y^2}\,\right]_0^{\sqrt{25-x^2}}dx\\
&=4\int_0^5 [\ln(7+\sqrt{25-x^2})-\ln\sqrt{24+x^2}\,]dx_{\circ} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$\int_0^5 \ln(7+\sqrt{25-x^2})\,dx = x\ln(7+\sqrt{25-x^2})\Big|_0^5$$

$$+\int_0^5 \frac{x^2dx}{(7+\sqrt{25-x^2})\sqrt{25-x^2}}$$

$$=5\ln 7+\int_0^5 \frac{x^2(7-\sqrt{25-x^2})dx}{(24+x^2)\sqrt{25-x^2}}。$$

$$\int_0^5 \ln\sqrt{24+x^2}\,dx=\left[x\ln\sqrt{24+x^2}\right]_0^5$$

$$-\int_0^5\frac{x^2dx}{24+x^2}=5\ln 7-\int_0^5\frac{x^2dx}{24+x^2}。$$

代入 (1) 式得

$$I=4\left[\int_0^5\frac{x^2(7-\sqrt{25-x^2})dx}{(24+x^2)\sqrt{25-x^2}}+\int_0^5\frac{x^2dx}{24+x^2}\right]$$

$$=28\int_0^5\frac{x^2dx}{(24+x^2)\sqrt{25-x^2}}。$$

先设 $x=5\sin t$，然后再设 $\mathrm{tg}\, t=u$ 得

$$\int_0^5\frac{x^2dx}{(24+x^2)\sqrt{25-x^2}}=25\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\,dt}{24+25\sin^2 t}$$

$$=25\int_0^{+\infty}\frac{\frac{u^2}{1+u^2}\cdot\frac{du}{1+u^2}}{24+\frac{25u^2}{1+u^2}}$$

$$=25\int_0^{+\infty}\frac{u^2du}{(u^2+1)(49u^2+24)}$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{u^2+1}-\frac{24}{49u^2+24}\right]du$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{24}{49}\cdot\frac{7}{\sqrt{24}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt{24}}{7}\right)。$$

故得　　$I=2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13.19$。

3904. 用直线 $x=$常数，$y=$常数，$x+y=$常数把域 S 分为四个相等的三角形，并取被积函数在每个三角形的中线交点的值。近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

其中 S 表由直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的三角形。

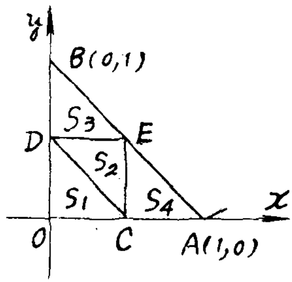

图 3904 题

解： 如图，用直线 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 和 $x+y=\frac{1}{2}$ 把三角形域 S 分为四个面积相等的三角形 S_1，S_2，S_3，S_4。A，B，C，D，E 的坐标依次为 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，因此 S_1，S_2，S_3，S_4 的中线的交点（即重心）的坐标为 $\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$ $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{1}{6},\ \frac{2}{3}\right)$ $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{6}\right)$。由此得

$$\iint_S \sqrt{x+y}\, dS$$

$$\approx \iint_{S_1} \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}\, dS + \iint_{S_2} \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\, dS$$

$$+ \iint_{S_3} \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}\, dS + \iint_{S_4} \sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\, dS$$

$$= \frac{1}{8}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{6}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{30}}{24} \approx 0.402。$$

另一方面，所论积分的精确值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\, dS = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (x+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x\sqrt{x})dx = \frac{2}{3}-\frac{4}{15} = 0.4。$$

3905．把域 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子域 $\Delta S_i (i=1, 2, \cdots, n)$。对于怎样的值 δ 能保证不等式：

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right| < 0.001$$

成立？其中 $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$。

解：据假设 $S=\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$，故

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}\sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}\sin(x_i+y_i)dS\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|dS。$$

由于S的面积为π，故只需对所有的子域上，能使

$$|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$$

$$(x,\ y)\text{和}(x_i,\ y_i)\in\Delta S_i,$$

则有 $$\left|\iint\limits_{S}\sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

成立。由于

$$|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|$$

$$=2\left|\sin\frac{x-x_i+y-y_i}{2}\cos\frac{x+x_i+y+y_i}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_i+y-y_i}{2}\right|$$

$$<2\cdot\frac{|x-x_i+y-y_i|}{2}\leqslant|x-x_i|+|y-y_i|$$

$$\leqslant\sqrt{2}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\leqslant\sqrt{2}\,\delta,$$

故当 $\sqrt{2}\,\delta<\frac{\varepsilon}{\pi}$ 时，(1)式便能成立。

由题设，$\varepsilon=0.001$，则 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\,\pi}\approx 0.000225$。

故若取 $\delta=0.00022$，即能保证下式成立

$$\left|\iint\limits_{S}\sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001。$$

计算积分（3906-3908 题）：

3906. $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy$。

解： $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy=\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$。

3907. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy$。

解： $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{3}(x^3-x^6)dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 (x^4-x^7)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{40}$。

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$。

解： $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$

$=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{\pi a^3}{3}$。

3909. 设R为矩形

$$a\leqslant x\leqslant A,\quad b\leqslant y\leqslant B,$$

证明等式

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy=\int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy。$$

证： 将区间[a, A]任意分为m个子区间，其分点为$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=A$，又将区间[$b$, B]任意分为n个子区间，其分点为$b=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=B$。

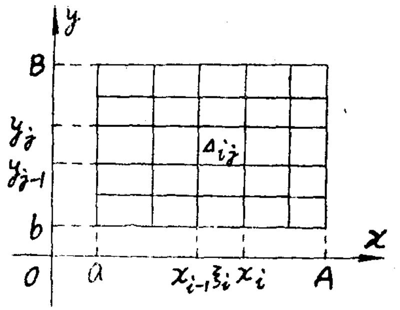

图 3909 题

作与坐标轴平行的直线 $x=x_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 以及 $y=y_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$，它们把矩形域 R 分为 mn 个子矩形域。

设 Δ_{ij} 为子矩形域 $[x_{i-1},\ x_i;\ y_{j-1},\ y_j]$，其边长为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 和 $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$。

设 $f(x,\ y)=X(x)Y(y)$ 在 Δ_{ij} 上的上确界和下确界分别为 M_{ij} 和 m_{ij}，又设 ξ_i 为区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上任一点，则有

$$m_{ij}\Delta y_j\leqslant\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,\ y)dy\leqslant M_{ij}\Delta y_j。$$

令 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 然后相加得

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta y_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,\ y)dy$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta y_j,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta y_j\leqslant\int_b^B f(\xi_i,\ y)dy$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta y_j。$$

乘 Δx_i 再令 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 然后相加得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{m}\Delta x_i\int_b^B f(\xi_i, y)dy$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j。 \qquad (1)$$

记 λ 为 $\Delta_{ij}(i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n)$ 的最大直径，则当 $\lambda\to 0$ 时，由（1）式得

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

$$\leqslant \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i\int_b^B f(\xi_i, y)dy$$

$$\leqslant \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j,$$

即 $$\iint_R f(x, y)dxdy \leqslant \int_a^A dx\int_b^B f(x, y)dy$$

$$\leqslant \iint_R f(x, y)dxdy。$$

故得 $$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^A dx\int_b^B f(x, y)dy,$$

即 $$\iint_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A dx\int_c^d X(x)Y(y)dy$$

$$= \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy。$$

3910. 设：

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y),$$

计算

$$I = \int_a^A dx\int_b^B f(x, y)dy。$$

解： $I = \int_a^A F'_x(x, y)\Big|_{y=b}^{y=B} dx$

$$
\begin{aligned}
&=\int_a^A [F'_x(x, B)-F'_x(x, b)]dx \\
&=[F(x, B)-F(x, b)]_a^A \\
&=F(A, B)-F(A, b) \\
&\quad -F(a, B)+F(a, b)。
\end{aligned}
$$

推广到三次积分的情形，参阅 4086 题。

3911．设 $f(x)$ 为在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续函数。证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

此处仅当 $f(x)=$常数时等号成立。

提示 研究积分

$$\int_a^b dx\int_a^b [f(x)-f(y)]^2dy。$$

证：根据提示，由于积分

$$\int_a^b dx\int_a^b [f(x)-f(y)]^2dy\geqslant 0,$$

即
$$\int_a^b dx\int_a^b [f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)]dy\geqslant 0,$$

故得
$$\int_a^b dx\int_a^b f^2(x)dy+\int_a^b dx\int_a^b f^2(y)dy$$
$$\geqslant 2\int_a^b dx\int_a^b f(x)f(y)dy,$$

因此便有
$$2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx\geqslant 2\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$$

即
$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx。$$

其次，若 $f(x)\neq$常数，则必有 x_1，$y_1(a\leqslant x_1<y_1\leqslant b)$ 使 $f(x_1)\neq f(y_1)$。由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

故若取
$$\varepsilon=\frac{|f(y_1)-f(x_1)|}{3},$$