前　　言

为了适应高等教育改革发展的需要，依据全国工科高等数学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》，结合我校多年来的教学实践和教学经验，在对许多教师、学生进行了大量的调查，特别是吸收了国内外同类教材的优点基础上，经充分讨论和研究，我们编写出版了《微积分教程》一书．全书共分上、下两册，另附有习题课指导教材两册．

本书以培养学生能力和提高学生素质为主线，注意对基本理论知识，基本技能和基本方法的分析和训练，又增加了数学建模方面的实例．

本书编写时考虑了与中学数学课程内容的衔接．在文字和内容的叙述上，力求通俗易懂、由浅入深、表达清晰、结构严谨，在直观引入的基础上，再给出严格的定义；在例题的选配上注意了代表性和典型性，以促进学生对概念及定理的理解和深化；在习题配置上，以基本训练为重点，同时也有少量技巧性较强、难度较大的题目，需在教师指导下练习．

本书上、下两册分别由林锰（第一章），范崇金（第二章、第六章），董衍习（第三章），沈艳（第四章、第五章），卜长江（第七章，第九章），马孝珣（第八章），祖国城（第十章），于涛（第十一章）和高玲（第十二章）等同志编写而成．沈继红同志提供了数学建模的素材实例．

全书由陈林珠（上册），高玲（下册）主审和统稿．

在本书的编写过程中，得到了哈尔滨工程大学应用数学系广大教师的帮助和支持，也得到了全校各级有关领导的鼓励和指导，在此一并表示衷心感谢．

由于水平有限，书中难免有不妥之处，恳切希望广大读者指评指正．

编者

2001.3

再版前言

《微积分教程》第一版出版后，在经过教学实践，听取专家、同行们以及广大学生的宝贵意见的基础上，编者对本书的部分内容进行了修改、补充。此外还对“超大纲”的内容进行了小字或加附录的处理。现再次出版。

参加本次修改工作的除原编写组成员外，还有张晓威、王锋、贾念念等同志。

在此，我们向关心本书以及提出宝贵意见和建议的同志们表示衷心的感谢。

编者

2001.7

目　录

第八章　多元函数微分法 …… 1

第一节　多元函数的基本概念 …… 1

第二节　偏导数 …… 9

第三节　全微分及其应用 …… 16

第四节　复合函数的微分法 …… 22

第五节　隐函数的微分法 …… 28

第六节　微分法在几何上的应用 …… 39

第七节　方向导数和梯度 …… 44

第八节　多元函数的极值 …… 49

第九章　重积分 …… 60

第一节　二重积分的概念与性质 …… 60

第二节　二重积分的计算 …… 63

第三节　二重积分的应用 …… 70

第四节　三重积分的概念与计算方法 …… 74

第十章　曲线积分与曲面积分 …… 80

第一节　第一型曲线积分与曲面积分 …… 80

第二节　第二型曲线积分 …… 86

第三节　格林公式　曲线积分与路径无关的条件 …… 91

第四节　第二型曲面积分 …… 99

第五节　奥一高公式　通量与散度 …… 105

第六节　斯托克斯公式　环量与旋度 …… 110

第十一章　无穷级数 …… 119

第一节　常数项级数的基本概念和性质 …… 119

第二节　常数项级数的审敛法 …… 124

第三节　幂级数 …… 133

第四节　函数展开成幂级数 …… 139

第五节　函数的幂级数展开式的应用 …… 145

第六节　傅立叶级数 …… 148

第七节　正弦级数和余弦级数 …… 154

第八节　周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数 …… 158

第十二章　微分方程 …… 162

第一节　微分方程的基本概念 …… 162

第二节　一阶微分方程……165
第三节　可降阶的高阶微分方程……176
第四节　高阶线性微分方程……179
第五节　常系数线性齐次微分方程……182
第六节　二阶常系数线性非齐次微分方程……186
第七节　欧拉方程……190
第八节　常系数线性微分方程组解法举例……191
第九节　微分方程的应用举例……193
习题答案……201

第八章　多元函数微分法

在前面各章中,所讨论的函数都是只有一个自变量的一元函数 $y = f(x)$. 但是在许多实际问题中,经常要考虑多种事物与多种因素的联系,因此有必要把函数概念从一个自变量推广到多个自变量的情形,即多元函数.

在本章中将在一元函数微分学的基础上讨论多元函数的概念、微分法及其应用. 在讨论中以二元函数为主. 讨论的结果容易推广到多元函数.

第一节　多元函数的基本概念

一、区域

一元函数的定义域是数轴上的点集,二元函数的定义域是坐标平面上点的集合. 为此,先简要地介绍一些概念.

1. 邻域

对于正数 $\delta > 0$ 及点 $P_0(x_0, y_0)$,称点集

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$

或

$$U(P_0, \delta) = \left\{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

为点 P_0 的 δ 邻域,δ 为该邻域的半径,称

$$\mathring{U}(P_0, \delta) = \left\{(x, y) \mid 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

为点 P_0 的空心邻域. 若不需要知道邻域的半径,分别用 $U(P_0)$ 与 $\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的邻域和空心邻域.

2. 区域

设 E 是一个平面点集,P 是平面上的一个点.

(1) **内点**　设点 $P \in E$,若存在点 P 的某邻域 $U(P, \delta)$,使得

$$U(P, \delta) \subset E,$$

则称 P 是 E 的内点(图 8-1).

(2) **边界点**　设点 $P \in E$ 或 $P \overline{\in} E$,如果点 P 的任意邻域 $U(P, \delta)$ 既含有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的边界点(图 8-2). E 的全体边界点的集合称为 E 的边界.

例 1　设 $E = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}$,则凡满足 $1 < x^2 + y^2 < 4$ 的点 (x, y) 是 E 的内点,满足 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 的点 (x, y) 是 E 的边界点. 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 是 E 的边界.

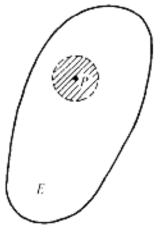

图 8－1

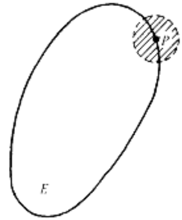

图 8－2

例 2 设 $E=\{(m,n)\mid m,n$ 是自然数$\}$(图 8－3). 因为 E 的每一点都不是它的内点，所以 E 没有内点，E 的所有的点都是它的边界点.

(3) **开集** 如果 E 的点都是它的内点，则称 E 为开集. 因此开集中的任何一点，都存在一个邻域，使得该邻域被包含在这开集中.

(4) **区域** 设 D 是一个开集. 若 D 内任意两点 P、Q 都可以用完全包含在 D 内的折线连结起来，则称 D 是连通开集，又称 D 为区域或开区域(图 8－4). 开区域连同它的边界称为闭区域.

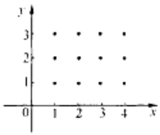

图 8－3

图 8－4

在实际问题中所遇到的二元函数的定义域，大多数是开区域与闭区域，也可能是开区域连同它的一部分边界，我们统称为区域.

例 3 $D_1=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 是闭区域；

$D_2=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是开区域；

$D_3=\{(x,y)\mid xy>0\}$ 是开集，而不是区域.

有界区域 设点集 E. 如果存在以某个点 A 为中心，某个正数 R 为半径的圆域 $U(A,R)$，使得 $E\subset U(A,R)$，则称 E 是有界集. 否则称为无界集. 如例 3 中，D_1 是有界闭区域，D_2 是无界开区域，D_3 是无界开集.

闭区域的直径 设 D 是一个闭区域，则由 D 内任意两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 的距离

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

的最大值 $d(D)=\max\{\rho(P,Q)\}$，称为闭区域 D 的直径.

二、多元函数概念

一元函数从数量关系上反映了某一事物在一个因素的作用下的变化规律，但是在许多实际问题中，事物的变化不只由一个因素决定，而是由多个因素决定. 例如，平行四边形的面积 A，由它的相邻两边的长 x 和 y 及其夹角 θ 所决定，即 $A = xy\sin\theta$；又如圆柱体的体积 V，是由它的底半径 r 和高 h 所决定的，即 $V = \pi r^2 h$. 这两例正是多元函数的例子.

二元函数的定义　**设 D 是平面点集，R 是实数集，f 是一个对应规则. 如果对 D 中的每一个点 $P(x,y)$，按照规则 f，在 R 中存在唯一的一个实数 z 和它对应，则称 z 是点 $P(x,y)$ 的函数，记为**

$$z = f(x,y) \qquad \text{或} \qquad z = f(P)$$

这里 x、y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，点集 D 称为函数 z 的**定义域**. 数集

$$\{z \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$$

称为函数 z 的**值域**.

函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的函数值记为 $f(x_0,y_0)$ 或 $f(P_0)$.

类似地可以定义三元函数 $u = f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数，只要把平面点集 D 改为三维空间或 n 维空间中的点集就可以了. 我们简记 n 元函数为 $u = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

例 4　理想气体的状态方程

$$pV = RT \qquad (R\ \text{为常数})$$

描述了气体压强 p，体积 V 和温度 T（绝对温度）之间的变化规律. 根据具体问题的不同要求，可以把压强 p 看成是 T 和 V 的函数：$p = \dfrac{RT}{V}$；或者把 T 看成是 p 和 V 的函数：$T = \dfrac{pV}{R}$；也可以把 V 看成是 p 和 T 的函数：$V = \dfrac{RT}{p}$. 它们都是二元函数.

例 5　函数 $z = 2x + 5y$ 的定义域是

$$D = \{(x,y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\},$$

这是一个无界区域；

函数　$z = \ln(x+y)$ 的定义域是

$$D = \{(x,y) \mid x + y > 0\}$$

（图 8－5），这是一个无界开区域；

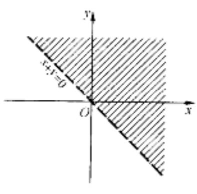

图 8－5

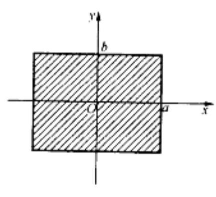

图 8－6

函数 $z = \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b} \quad (a > 0, b > 0)$ 的定义域是

$$D = \{(x,y) \mid |x| \leqslant a, |y| \leqslant b\}$$

(图 8 - 6),这是一个有界闭区域;

函数 $z = \arcsin\frac{y}{x}$ 的定义域是

$$D = \{(x,y) \mid |y| \leqslant |x|, x \neq 0\}$$

(图 8 - 7),这里 D 不是连通的,因此它不是一个区域.

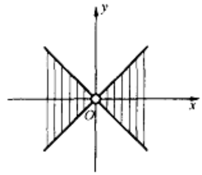

图 8 - 7

二元函数的几何意义

二元函数 $z = f(x,y)$ 能够用三维空间的几何图像表示.

在三维空间中取一个直角坐标系 $o - xyz$,并设函数 $z = f(x,y)$ 的定义域 D 是该坐标系中 xy 平面上的一个点集. 在 D 上取定一点 (x,y), 由于有唯一的一个值 $z = f(x,y)$ 与之对应,于是得空间一点 $P(x,y,z)$. 对于定义域 D 中的每一点,在空间 $o - xyz$ 中都有这样得到的一点 $P(x,y,z)$ 与之对应,称所有这样的点 (x,y,z) 的集合

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$$

为二元函数 $z = f(x,y)$ 的图像,它一般是空间的一块或几块曲面(图 8 - 8). 因此也称 $z = f(x,y)$ 为曲面方程.

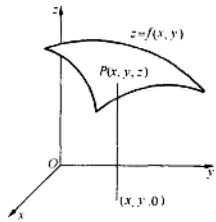

图 8 - 8

例 6 函数 $z = ax + by + c$ 的几何意义是以 $\{a, b, -1\}$ 为法向量,且过点 $(0,0,c)$ 的平面;

函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的几何意义是以原点为中心,以 1 为半径的上半球面;

函数 $z = xy$ 的几何意义是一个双曲抛物面(马鞍面).

三、二元函数的极限

二元函数的极限概念与一元函数的极限概念是相似的,只是自变量的变化过程复杂多了.

考虑函数 $z = f(x,y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 即 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.

设 D 是函数 $z = f(x,y)$ 的定义域, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或非孤立的边界点. 如果令 D 内的动点 $P(x,y)$ 以任意方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$,且不与 $P_0(x_0,y_0)$ 重合时, $f(x,y)$ 无限逼近唯一的一个常数 A,则称动点 $P(x,y)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时函数 $f(x,y)$ 的极限为 A.

与一元函数极限的精确定义相类似,也可以写出二元函数极限的精确定义.

定义 **设 $P_0(x_0,y_0)$ 是二元函数 $f(x,y)$ 的定义区域的内点或边界点, A 是一个确定的数. 如果对任给的正数 ε,总存在正数 δ,使得当**

$$P(x,y) \in \mathring{U}(P_0,\delta) \cap D$$

时,恒有

$$|f(x,y) - A| < \epsilon,$$

则称函数 $f(x,y)$ 在动点 $P(x,y)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时以 A 为极限,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A,$$

也可记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A.$$

对于二元函数 $f(x,y)$,当其中至少有一个自变量趋向无限,例如 $x \to a, y \to +\infty$,函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限,也就是 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x,y) = A$ 的精确定义可以叙述为:对任给的正数 ϵ,总存在正数 δ 和B,使得当 $0 < |x - a| < \delta, y > B$ 时恒有 $|f(x,y) - A| < \epsilon$.至于其他情形可类似写出.

为了区别于一元函数的极限,把二元函数的极限称为**二重极限**[1].

例 7 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

证 因为 $x^2 \leqslant x^2+y^2$ 或 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$,

$$|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2},$$

所以

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}.$$

于是,对于任给 $\epsilon > 0$,存在 $\delta = \epsilon > 0$,使得当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时恒有

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 的定义中,一定要求 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 的方式是任意的.因此,当(x,y)以某一种特殊的方式,如沿一定直线或定曲线趋向于(x_0,y_0)时,$f(x,y)$无限逼近常数 A,我们不能由此断定极限存在.

例 8 设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

证 因为在 x 轴上 $f(x,y) = f(x,0) = 0$,在 y 轴上 $f(x,y) = f(0,y) = 0$,所以当动点沿 x 轴和 y 轴趋向于点(0,0)时有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,0) = 0,$$

---

① 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.在此极限过程中自变量 x,y 必定同时趋向于 x_0,y_0.它与另一种自变量 x,y 以某种顺序趋向于 x_0,y_0 的极限过程是不同的,我们称后一种极限为累次极限.

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(0,y)=0.$$

但当动点(x,y)沿其他直线$y=kx(k\neq 0)$趋向于点$(0,0)$时有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

由于这个极限值随直线$y=kx$的斜率k的值的不同而改变,因此$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

例 9 设$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$,证明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

证 当动点(x,y)沿直线$y=kx$趋向于点$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0;$$

但当动点(x,y)沿抛物线$y=ax^2$趋向于点$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=ax^2\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{ax^4}{x^4+a^2x^4}=\frac{a}{1+a^2}$$

这个极限值随表示抛物线$y=ax^2$的张口方向及大 小的a值而变化.因此$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

此例说明,即使点(x,y)沿任何直线趋向于点(x_0,y_0)时,$f(x,y)$有相同的极限,也不能保证$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在.

由以上讨论可以看出,二元函数的极限比一元函数的极限的情况要复杂得多.因此,在求二元函数极限时要注意两点:(1)一定要保证极限是在动点(x,y)在xy平面上以任意方式趋向于点(x_0,y_0)的前提下求出的.就是说不能限制点(x,y)趋向于点(x_0,y_0)的方式.(2)只有在已证明极限存在的前提下,才可取特殊的方式使点(x,y)趋向于点(x_0,y_0)来计算极限.

二元函数极限的四则运算法则与一元函数极限的四则运算法则类似.

例 10 当把x或y看作自变量x,y的二元函数时,对任何实数x_0,y_0显然有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x=x_0,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y=y_0,$$

于是运用极限运算法则可得

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kx^my^n=kx_0^my_0^n\quad (k\text{ 为常数},m,n\text{ 为非负整数}).$$

例 11 计算$\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+xy+y^2)$.

解 由例 10 及极限运算法则得

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+xy+y^2)&=\lim_{(x,y)\to(2,1)} x^2+\lim_{(x,y)\to(2,1)} xy+\lim_{(x,y)\to(2,1)} y^2\\&=4+2+1=7.\end{aligned}$$

例 12 计算$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$.

解 因为$\left|\sin\dfrac{1}{xy}\right|\leqslant 1$,而当$x\to 0,y\to 0$时,$x^2+y^2\to 0$,所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0.$$

四、二元函数的连续性

定义　设点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的定义区域 D 的一个内点或边界点($P_0\in D$)，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0), \tag{1}$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

若对于定义区域 D 的内点或边界点 $P_0(x_0,y_0)$，等式(1) 左端的极限不存在，或虽存在但不等于 $f(x_0,y_0)$，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的间断点.

例如，由例 7 可知函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0) 连续；而由例 8 可知，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0) 不连续.

若函数 $f(x,y)$ 在定义区域 D(开区域或闭区域) 上的每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

和一元连续函数一样，二元连续函数也有类似的四则运算法则与复合函数的连续性. 如当 $x\neq 0$ 时，函数

$$f(x,y)=e^{-xy}\frac{\sin xy}{x}$$

是处处连续的.

定义　**由一个变量 x 或 y 的基本初等函数经过有限次四则运算与复合步骤而构成的能用一个解析式子表示的函数，称为二元初等函数.**

定理　**二元初等函数在其定义区域上连续.**

因而初等函数在其定义区域内的每点处求极限，其极限值就等于该点处的函数值.

例 13　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\frac{1}{2})}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}=\arcsin\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(0,\frac{1}{2})}=\frac{\pi}{6}.$

在有界闭区域上的二元连续函数，和闭区间上的一元连续函数一样，有以下一些重要性质.

定理 1(有界性定理)　若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上有界. 即存在正数 M，使得在 D 上恒有 $|f(x,y)|\leqslant M$.

定理 2(最大值和最小值定理)　若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上必取得最大值和最小值. 即在 D 上存在点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，使得对 D 上任意点 $P(x,y)$ 恒有

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2),$$

也就是说 $f(x_1,y_1)$、$f(x_2,y_2)$ 分别是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值和最大值.

定理 3(介值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续,$P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 为 D 中满足条件 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 的两点,则对任何满足不等式

$$f(x_1,y_1)<k<f(x_2,y_2)$$

的实数 k,必存在 D 中的点 $P_0(x_0,y_0)$,使 $f(x_0,y_0)=k$.

定理 4(一致连续定理) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 必在 D 上一致连续.

所谓 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续是指:对任给的正数 ε,总存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对于 D 中任何两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$, 只要 $|P_1P_2|<\delta$, 就恒有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$.

习题 8-1

1. 求下列各函数的函数值:

(1) $f(u,v)=u^v$,求 $f(xy,x+y)$;

(2) $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,求 $f(x+y,x-y,xy)$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求 $f(1,\dfrac{y}{x})$;

(4) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,求 $f(tx,ty)$.

2. 设 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$. 证明:若 $u>0,v>0$,则

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

3. 求下列各函数的定义域,并画出定义域的图形:

(1) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$;

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;　　(4) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$;

(5) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;　　(6) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(7) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad(R>r>0)$;

(8) $u=\ln(xyz)$;　　(9) $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$；　　(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

5. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

第二节　偏　导　数

一、偏导数

一元函数 $f(x)$ 关于 x 的导数，表示 $f(x)$ 沿 x 轴方向的变化率，这是一个十分重要的概念. 对于多元函数，同样需要讨论它的变化率，但由于自变量的增多，情况要比一元函数复杂，常常需要考虑各个方向的变化率. 对此，我们可以先考虑函数关于其中一个自变量的变化率，也就是突出函数的某一个自变量，而让其余的自变量暂时固定(即看作常数)，然后来讨论这个实质上是一元函数的变化率. 这就是下面所要介绍的多元函数的偏导数.

定义　**设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义，如果对于 $U(P_0)$ 内位于直线 $y=y_0$ 上的任一点 $P(x_0+\Delta x,y_0)$，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏增量**

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

与自变量 x 的增量 Δx 的比的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称这个极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.z_x\right|_{(x_0,y_0)},\ f_x(x_0,y_0)\ \text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$$

等.

同样，若对于 $U(P_0)$ 内位于直线 $x=x_0$ 上的任一点 $P(x_0,y_0+\Delta y)$，极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称这个极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 对 y 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.z_y\right|_{(x_0,y_0)},\ f_y(x_0,y_0)\ \text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}$$

等.

由定义可知，$f_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 对 x 的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$，而 $f_y(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x_0,y)$ 对 y 的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上每一点 (x,y) 都存在对 x(或对 y) 的偏导数，就得到函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上对 x(或对 y) 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),z_x,f_x(x,y)(\text{或}\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}f(x,y),z_y,f_y(x,y)).$$

偏导函数也简称为偏导数.

由于多元函数关于某一个自变量求偏导数时，是先把它的其余自变量都看作常量，使之变成一元函数后再求导数的，因而一元函数的求导公式和求导法则也适用于求多元函数的偏导数.

例1 设 $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3$，求 $f_x(1,3)$ 及 $f_y(2,0)$.

解 求 $f_x(x,y)$ 时把 y 看作常量，得到

$$f_x(x,y)=3x^2+4xy,$$

于是

$$f_x(1,3)=3\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot 3=15;$$

为求 $f_y(2,0)$，亦可先令 $x=2$ 得

$$f(2,y)=8+8y-y^3,$$

然后对 $f(2,y)$ 在 $y=0$ 处求导，得

$$f_y(2,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(2,y)\Big|_{y=0}=(8-3y^2)\Big|_{y=0}=8.$$

例2 求 $z=x^y(x>0)$ 的偏导数.

解 把 y 看作常量，函数 z 成为 x 的幂函数，于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1};$$

把 x 看作常量，函数 z 成为 y 的指数函数，于是得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

例3 求 $u=\sin(x+y^2-\mathrm{e}^z)$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 看作常量，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x+y^2-\mathrm{e}^z);$$

把 x 和 z 看作常量，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x+y^2-\mathrm{e}^z);$$

把 x 和 y 看作常量，得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\mathrm{e}^z\cos(x+y^2-\mathrm{e}^z).$$

例4 对于理想气体状态方程 $pV=RT$（R 为常量），证明

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证 由第一节例4可知，理想气体的状态方程 $pV=RT$（R 为常量）中，每一个变量都可以是其余两个变量的函数. 于是，由 $p=\frac{RT}{V}$ 得

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2};$$

由 $V = \frac{RT}{p}$ 得

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p};$$

由 $T = \frac{pV}{R}$ 得

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}.$$

从而

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

这是热力学中的一个重要关系式. 该关系式顺便地指出了偏导数记号$\frac{\partial f}{\partial x}$不能被看作 ∂f 和 ∂x 的商,它是一个整体记号,不能像一元函数 $y = f(x)$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$那样可以把 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 拆开运算,否则$\frac{\partial p}{\partial V}, \frac{\partial V}{\partial T}, \frac{\partial T}{\partial p}$ 的积应当等于 1.

偏导数的几何意义　二元函数 $z = f(x,y)$ 的几何图像一般是三维空间中的曲面. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是这曲面上的一点, 其中 $z_0 = f(x_0, y_0)$. 过 P_0 作平面 $y = y_0$,它与曲面的交线

$$C_1:\begin{cases} y = y_0, \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

是平面 $y = y_0$ 上的曲线.

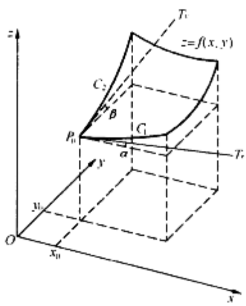

图 8－9

函数 $z = f(x,y)$ 在点(x_0, y_0)关于 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 的导数, 因而也就是曲线 C_1 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率,即 T_x 与 x 轴正向所成倾角 α 的正切

$$f_x(x_0, y_0) = \tan\alpha$$

(图 8 － 9).

同样,偏导数 $f_y(x_0, y_0)$ 是平面 $x = x_0$ 与曲面 $z = f(x,y)$ 的交线

$$C_2:\begin{cases} x = x_0, \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$(其中 $z_0 = f(x_0, y_0)$) 处的切线 T_y 对 y 轴的斜率

$$f_y(x_0, y_0) = \tan\beta$$

(图 8 － 9).

由一元函数可导必连续的结论可知,若 $f(x,y)$ 在点(x_0, y_0) 关于 x(或 y) 可导,则 $f(x,y)$ 在点(x_0, y_0) 关于 x(或 y) 连续. 不过此时并不能推出 $f(x,y)$ 在点(x_0, y_0) 是连续的,这是因为偏导数只是刻划函数沿 x 轴及 y 轴方向的变化率,并不能给出函数沿其它方向的变化情况.

例 5　函数　$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$　在点(0,0)的两个偏导数存在.事实上,由偏导数定义可得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

但由上节知 $f(x,y)$ 在点(0,0)不连续.

二、高阶偏导数

由于函数 $z=f(x,y)$ 的偏导函数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 仍然是自变量 x、y 的函数,因此如果 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 关于 x 或 y 的偏导数也存在,则称函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶偏导数.按照对变量求导次序的不同,二元函数有四个二阶偏导数,通常记作

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、三两个偏导数都称为二阶混合偏导数.

类似地可以定义更高阶的偏导数.例如,$z=f(x,y)$ 关于 x 的三阶偏导数是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f_{xxx}(x,y),$$

关于 x 的 $n-1$ 阶偏导数 $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$ 再对 y 求偏导数,便是函数 $z=f(x,y)$ 的一个 n 阶混合偏导数

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}=f_{x^{n-1}y}(x,y).$$

二阶及二阶以上的偏导数统称为函数的高阶偏导数.

例 6　求函数　$z=e^{xy}$ 的二阶偏导数.

解　因为　$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$,　$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$,

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}=(1+xy)e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}=(1+xy)e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

例 7 求函数 $z = \arctan \dfrac{y}{x}$ 的二阶偏导数.

解 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$,

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

值得注意的是以上两例中,每个函数的两个二阶混合偏导数恰好都相等,即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

这表明了函数的混合偏导数与先对 x 或先对 y 求导的顺序无关.这个结论并不是偶然的,但也不是无条件的.

例 8 函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 的两个一阶偏导函数是

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$$

由此可以求得 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的关于 x 和 y 的两个不同顺序的混合偏导数是

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x,0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

因此

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

此例表明关于混合偏导数相等的结论并不对任意函数都成立.那么,在什么条件下,混合偏导数与求导次序无关?

定理 **设函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的邻域内有连续的二阶混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$,则必有**

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

这一定理建立了多元函数的偏导数可交换求导次序的理论根据.由此可以推知,若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 有直到 n 阶的各个连续偏导数,那么就可简写偏导数为