1946.2

大學叢書

平面測量學

下册

劉友惠著

商務印書館出版

大學叢書

平面測量學

下册

劉友惠著

商務印書館出版

1946·2

(51135·1平)

大學叢書

平面測量學（全二册）

著作者 劉友惠

出版者 商務印書館
上海河南中路二一一號

發行者 中國圖書發行公司
三聯中華商務開明聯營聯合組織
北京鐵絲胡同六十六號

發行所 三聯書店 中華書局 商務印書館 開明書店 聯營書店 各地分店

印刷者 商務印書館印刷廠

1935年5月第1版
1951年4月第6版

定價人民幣40,000元

(滬)5801-7800

平面測量學

下册

第十章

製圖用計算

(Computations for Plotting)

第一節

計算概說

199. 測量之計算 測量之目的在將實地各點之相互關係表於圖上,或更由此獲得各種材料;欲達此目的,必根據野簿所載之實測結果,加以種種計算。故計算誠測量內業中重要工作之一;此而不確,則外業無論如何精密合法,均被抹殺矣。

測量之計算可大分爲二種:(1)製圖所需之計算;如:計算方位、緯經距、省測部分及其他製圖上必需之材料乃至斷面等是也。(2)由實測或製圖結果求各種材料之計算;如:計算面積、土方(體積)及其他各種尺寸乃至高低等是也。

本章就一般計算之原則及製圖所用之計算,分節

述之於下;至第二種之面積、土方等計算,則另設章詳言之。

200. 計算之規律化　凡百計算必立一定之規律(system),按照程序逐步行之;此不特可以短縮計算之時間,亦足以免計算之錯誤。詳言之:計算必用一定大小之紙,按問題性質立一定之計算方式——普通各種計算常列成表,而記其標題於欄之上端或左端——及程序;先將計算上必要之材料抄入,核對無誤後,乃嚴守一定之程序逐步計算,將中途成績及最後結果一一記於一定之地位。如是則計算一次之後,其他同種問題均可機械的按式做行,不必更加考慮;且各種成績臚列一紙,一覽無遺,卽間有錯誤,亦不難按步檢查,終使水落石出。

201. 計算之核對　無論計算如何嫻熟,規律如何整齊,精神作用所在,錯誤終不可免;故各種計算之結果非經核對(check)絕難徵信。規律所以免除錯誤,核對所以發見之也。

核對之法有種種,舉示之則:(1)就所算數字逐步覆校之。(2)稽核所算之結果是否合於關係條件;例如計算三角形之內角,核其總和是否等於180°是也。(3)用不同之計算法,互較其結果;例如用三角法求直角三角形之斜邊,而核之以二邊之自乘是也。(4)用不同之材

料而互較其結果;例如求四邊形之對角線長,而就兩三角形各算其共通邊是也。

此外尚有略核之法以各種粗略算法核對精密之計算;費少許手續卽足以證其無大錯誤,良足多也。譬如;各種精密計算可用計算尺略核之;面體計算可就圖上以面積計(第 235 項參照)略核之;不閉合之經緯距可畫折線於圖以核之;線長可就圖量測以核之是也。

202. 乘除核對法 普通數字之乘除手續甚繁,極易錯誤,如法覆核亦非易事;故有各種簡單之核法存焉。玆舉通用之一法如下:

(I) 乘法核對法 求被乘數、乘數及積之橫和——各個數字相加之和——各減以9之最大倍數;則被乘數及乘數殘餘之積,或更減9之倍數,等於積之殘餘。

例12.

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{橫和} \\
2875 = 22, & \left.\begin{array}{l} 22-9\times 2=4 \\ 12-9 \quad\;\; =3 \end{array}\right\} 4\times 3-9=\underline{\underline{3}} \\
\times\ 273 = 12, & \\
\hline
784{,}875 = 39, & 39-9\times 4=\underline{\underline{3}}
\end{array}
$$

(II) 除法核對法 求被除數、除數、商及殘餘之橫和,減以 9 之最大倍數;則除數及商殘餘之積加殘餘之殘餘,或更減 9 之倍數,等於被除數之殘餘。

例 13. $41.699348 \div 3.1416 = 13.273 + \frac{8912}{31416}$

被除數　$41.699348 = 44 \quad 44 - 9 \times 4 = \underline{\underline{8}}$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{除數} & 3.1416 = 15, & 15 - 9 = 6 \\ \text{商} & 13.273 = 16, & 16 - 9 = 7 \\ \text{殘餘} & 8912 = 20, & 20 - 9 \times 2 = 2 \end{array}\right\} 6 \times 7 + 2 - 9 \times 4 = \underline{\underline{8}}$$

203. 速算法　欲求計算之速成,可用各法如下:(1) 數字計算用簡縮法;(2) 删除無謂之精密;(3) 利用各種計算表;(4) 利用圖解法;(5) 利用計算機械(詳見第十四章第一節)。

204. 數字之簡縮算法　數字之計算普通莫不以對數是賴,以法簡而精密故也。若因特種關係不能不用算術的算法者,則宜用簡縮算法,以節時間;玆就最常用之乘、除、平方、開方述一二簡縮算法於下:

(I)　**縮乘法**(abridged multiplication)　兩數相乘只求得 n 位之積者,法:先顚倒乘數之位次,置其右端——首位——於被乘數第 $n+1$ 位之直下;次依序以各位之乘數乘該位直上之被乘數,更用心算以該位乘數乘該位以下之被乘數,求其應進至該位之近似整值,書其結果於被乘數第 $n+1$ 位之直下;由此向左更照普通乘法次第乘之,書其結果於左;最後求如是所得各部分積之和,以四捨五入去其末位。

例 14. 48.6678×1.0623, 求其積至四位:

$$\begin{array}{l}
48.6678 \\
\underline{32601} \\
48668 = 48667 \times 1 + 1 \ (8 \times 1 = 8 \text{ 故得 } 1) \\
2920 = 486 \times 6 + 4 \ (6 \times 6 = 36 \text{ 故得 } 4) \\
97 = 48 \times 2 + 1 \ (6 \times 2 = 12 \text{ 故得 } 1) \\
\underline{14 = } 4 \times 3 + 2 \ (8 \times 3 = 24 \text{ 故得 } 2) \\
51.699 = 51.70 \ (\text{確數爲 } 51.69980394)
\end{array}$$

(II) **縮除法** (abridged division) 兩數相除欲得 n 位之商者,法:先按照普通除法求第一位之商;後即不將被除數之次位移下,而依次削除除數之末位,如法求以下之商。但以各位之商乘除數時,仍須以心算乘該削除之數,求其所應上進之近似整值,加之於末位。如是求商至 $n+1$ 位,以四捨五入去其末位。

· **例 15.** $41.649348 \div 3.1416$, 求其商至四位:

$$\begin{array}{l}
3.1416)41.699348 \,|\underline{13.273} = 13.27 \ (\text{確數爲 } 13.270) \\
\underline{31416} = 31416 \times 1 \\
10283 \\
\underline{9425} = 3141 \times 3 + 2 \ (6 \times 3 = 18 \text{ 故得 } 2) \\
858 \\
\underline{628} = 314 \times 2 + 0 \ (1 \times 2 = 2 \text{ 故得 } 0) \\
230 \\
\underline{220} = 31 \times 7 + 3 \ (4 \times 7 = 28 \text{ 故得 } 3) \\
10 \\
\underline{9} = 3 \times 3 + 0 \ (1 \times 3 = 3 \text{ 故得 } 0) \\
1
\end{array}$$

(III) **平方簡法**　以N爲原數,r爲加減於原數可使成整數之數,則平方可以下二式求之。

數小者:　$N^2=(N+r)(N-r)+r^2$ ……………… (36)

數大者:　$N^2=(N\pm r)^2\mp 2(N\pm r)r$ ……………… (37)

例 16.　$84^2=(84-4)(84+4)+4^2=80\times 88+16=7056$。

例 17.　$(8\frac{1}{2})^2=(8\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(8\frac{1}{2}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2=9\times 8+\frac{1}{4}=72\frac{1}{4}$。

例 18.　$(99.92)^2=(99.92+0.08)^2-2(99.92+0.08)\times 0.08$

$=10000-16=9948.0$(確數爲 9948.0064)。

(IV) **開方簡法**　以N爲原數,S爲最近似之整平方數,$r=\sqrt{S}$;則平方根可以下二式求之。

數小者:　$\sqrt{N}=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{r}+r\right)$; ……………… (38)

數大者:　$\sqrt{N}=r+\frac{N-S}{2r}$ ……………… (39)

例 19.　$\sqrt{84}=\frac{1}{2}\left(\frac{84}{9}+9\right)=\frac{1}{2}(9.33+9)$

$=9.17$(確數爲 9.1652)。

例 20.　$\sqrt{47}=\frac{1}{2}\left(\frac{47}{7}+7\right)=\frac{1}{2}(6.71+7)$

$=6.86$(確數爲 6.8557)。

例 21.　$\sqrt{32200}=179+\frac{32200-32041}{2\times 179}$

$=179.444$(確數爲 179.44358)。

205. 無謂精密之删除　材料中所現之數字,其位

數時或超出必需者之上;又確實者只有若干位,根據此數以計算,只能得確實數字若干位。此等不必需無意義之數字羅列於計算及其結果中,一見似乎極其精密;實則毫無意義,不特多費手續,反滋錯誤,且足引人誤解,以爲實際量測有如是之精密。故凡百計算,必依其性質決定某種數字只須用若干位不至有妨結果之精度,而將不必需之數字削去;某種計算只能得確實結果若干位,而將無意義之計算略去。

刪除無用之數字應以下述觀念爲根據:(1)實測之數量決非絕對精確;蓋一次之測量絕不能得眞值故也。(2)計算所得之結果絕不能比實測所得者更爲精密。(3)計算不確之數字,並非欲得其絕對精度,乃其相應之精度;此則非只就各數取同一位數,不問各數全體之位數各有若干,所能達到目的者也。

不確之數字影響於計算結果者甚大,故各種數字必知其確實者之位數。一般野簿等所記載,無特別說明者,概認末位爲不確之數字。故實際測至小數點以下若干位,而結果適成整數時,必照位數補0以表之。譬如:長度測至$\frac{1}{1000}$呎止,所得結果適爲1.34呎者,必加0作1.340以表之;否則將以爲只測至$\frac{1}{100}$呎止,而認4爲不確之數字矣。

計算應得確實數字之位數,乃以材料之確實數字位數爲依歸;根據誤差理論得一般法則如下:**對於加減,若中有一數確實數字只至第 n 位止,則全體結果之確實數字亦只至第 n 位止;對於乘除,若有一因數確實數字只有 n 個,則積之確實數字普通亦只 n 個,最多不能超出 $(n+1)$ 個,商之確實數字絕對不能超出 $(n-1)$ 個。**

例22.　今有四量,實測之結果爲 6843.2 呎, 253 呎, 282.42 呎及 1200 呎,前三量均以末位爲不確數字;最後一量則只測至 100 呎止,因之後三位爲不確數字。求四量之和及前二量之積。

按上述法則,第四量之 100 呎位數字卽非確實,故總和之100呎位亦不能得確實數字;因之100呎位以下之數字均須删除,得算式如下:

$$
\begin{array}{r}
6840 \\
250 \\
280 \\
\underline{1200} \\
8570
\end{array}
=8600\text{ 呎}
$$

又第二量只有 2 個確實數字,故前二量之積確實數字亦只二個;因之用縮乘法置乘數之首位於被乘數第三位之下,得式如下:

$$\begin{array}{r} 6843.2 \\ \underline{352} \\ 1369 \\ 342 \\ \underline{20} \\ 1{,}731{,}000 = 1{,}730{,}000 \end{array}$$ 平方呎。

例23. 直角三角形之底邊爲 428.63 呎,其降角測至分止爲 44°24′;求其垂邊。

tan 44°24′=0.97927, tan 44°25′=0.97984,是角度差 30″時,正切眞數之第四位約差3;故知確實數字只有三個。因之去雙方之末位,用縮乘法乘之,得 428.6×0.9793=419.72;或因確實數字只應三個,更去其末位作 419.7 呎。

206. 計算表之利用 計算表普通最必需者爲對數表及三角函數眞數表,此外如距絲計算表、緯經距表、乘除表、平方立方表、土方表等亦宜盡量利用之。

各種計算務用對數,前已言及之矣;而所用對數表及眞數表之位數則各因計算之精度而異。一般確實數字三個或角度求至分止者用四位表;確實數字四個、角度求至 30″ 止者用五位表。苟中間計算複雜,層節甚多,宜更多用一位。然多用一位費時卽不少;普通測量之計算鮮有用至六位者也。

用對數以作三角計算,往往有數種公式均可適用;

何去何從則有標準如下:**由眞數求角度者,宜用變化迅速,即表差數大之函數,由角度求眞數者,宜用變化遲緩,即表差數小之函數。**正餘切變化常大於正,餘弦,故求角宜用前者,求邊宜用後者。

207. 圖解法之利用　用圖解法以求結果,時或較計算爲速,且亦能得相當之精度,故亦宜利用之。譬如:求曲線之長度,高低之坡度等,可畫於圖上以尺量之;面積可畫地形於方眼紙,而數其方眼數;等高線之中間各點可以間插法就圖上求得之是也。

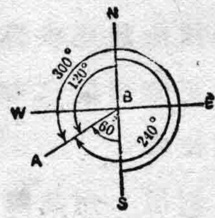
圖表 (diagram)　即由圖解法而來,猶之由計算而得計算表,亦宜利用之;如絲距表圖,緯經距表圖,土方表圖之類是也。

第二節
緯經距之計算

208. 角距　爲計算便利計,一切角度向右即向時針方向測去者以之爲(+),向左即向時針反對方向測去者以之爲(−)。以此適用於方位,則 *N. E* 及 *S. W.* 爲(+), *N. W.* 及 *S. E* 爲(−);在全圓方位則始終爲(+)。

如第212圖所示,通過線 *AB* 之一端 *B* 作子午線 *NS*,則由 *N* 及 *S* 各向左右量去可得四角;此等角度皆稱之

第 212 圖



爲 AB 線之**角距**(angular distance) 故表示角距必言正負,及起點之爲 N. 抑爲 S; 譬如: 圖中四角必表以 $N240°+$ $N120°-$、$S60+$、$S300°-$ 是也。

角距在 90° 以內者卽爲方位,由 N 向右量去者卽全圓方位也。

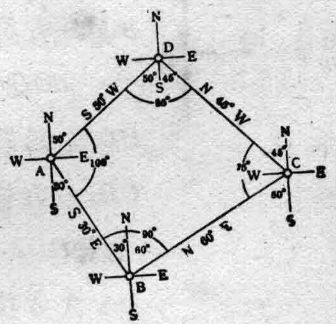
209. 方位之計算　改角距爲方位,法先察角距起點之爲N抑爲 S, 及向左抑向右;次假定此角如量旋轉於該方向,視其超過若干象限,以定方位之在何象限;最後乃由角距之數字定方位角。全圓方位乃角距之一種;故改全國方位爲象限方位爲法亦復無異。

今假定有一羣折線,第一線之方位及各線間之夾角爲已知,則各線之方位可依次計算得之。法:先依前項之規定,定第一線方位及兩線間夾角之符號;次求此方位與夾角之代數和,冠以方位之首字,而附以所得之符號,卽得第二線之角距;最後乃如法將此角距改爲方位。第二線之方位旣得,則以其後方位爲根據,如法求第三

線之方位。餘准此。

折線用偏角法測角者(第 73 項參照),計算方位之法亦與此同;所異者惟第二線以下始終仍用前方位耳。

第 213 圖



例 24. 有折線 $ABCD$, AB 之方位為 S 30° E, 各線間之角度如第 213 圖所示;令求各線之方位。

按照上法依次求之,得計算式如下:式中括弧內之文字乃該線之後方位也。

角　度　向　左

AB 之方位＝S. 30° E. −

BAD ＝ 100° −

AD 之角距＝S. 130° −

AD 之方位＝N. 50° E. ＋ (S. W.)

ADC ＝ 95° −

DC 之方位＝S. 45° E. − (N. W.)

DBC ＝ 75° −

CB 之角距＝N. 120° −

CB 之方位＝S. 60°W. ＋ (N. E.)

CBA ＝ 90° −

AB 之方位＝N. 30°W. − (核對)

角 度 向 右

AB 之方位$=$S. $30°$ E.$-$(N. W.)

ABC $=$ $\underline{90°}$ $+$

BC 之方位$=$N. $60°$ E.$+$(S. W.)

BCD $=$ $\underline{75°}$ $+$

CD 之角距$=$S. $135°$ $+$

CD 之方位$=$N. $45°$W.$-$(S. E.)

CDA $=$ $\underline{95°}$ $+$

DA 之方位$=$S. $50°$W.$+$(N. E.)

DAB $=$ $\underline{100°}$ $+$

AB 之角距$=$N. $150°$ $+$

AB 之方位$=$S. $30°$ E.$-$(核對)

210. 緯距及經距 通過一線之兩端作二線與子午線成垂直,則此二線間之垂直距離謂之**該線之緯距** (latitude);通過一線之兩端作二子午線,則其間之垂直距離謂之**該線之經距** (departure)。緯經距之符號可由該線之方位定之。若該線之方位爲 N 則緯距爲(+),方位爲 S 則緯距爲(−);又方位爲 E 則經距爲(+),方位爲 W 則經距爲(−)。

又一點向一子午線之垂直距離謂之**該點之子午線距離** (meridian distance);一線中點之子午線距離謂