初等数学复习及研究——立体几何

（第七章）

馬忠林 编

長春东北师范大学教材教具科

第七章 球面三角法初步

§43. 球面直三角形

类似平面三角法，可以研究球面三角形的解法。球面三角形解法广泛地应用在天文学，測量学，制圖学，以及其它高等数学里。現在首先研究球面直角三角形。

我們已知，球面直角三角形，可分为一直三角形，二直三角形，三直三角形三种。然而三直三角形的各边都是一个象限，二直三角形对直角的边也都是一个象限，並且第三角与第三边的度量相等。因此对这兩种三角形的边与角的度量关系，沒有詳加研究的必要。本章所研究的只是一直三角形。

1° 基本公式:

設ABC(圖131.)是一單位球的球面直角三角形，C是直角，並先假定，A，B，a，d，c都小於直角。用O表示三角形所在球面的球心，連結OA，OB，OC。

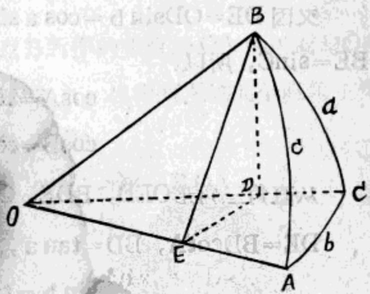

圖 131.

自点B作一平面与OA垂直，假設与平面OAC交於ED，於是∠OEB，∠OED都是直角，因而平面BED与平面OAC垂直。

但C是直角，即平面OBC与OAC垂直，於是BD也与平面OAC垂直，因而∠ODB，∠BDE都是直角。

又$\angle BOC=a$，$\angle AOC=b$，$\angle AOB=c$，$\angle BED=A$，因此在直角三角形OEB中，$\cos C=OE$；在直角三角形OED中，$OE=OD\cos b$；在直角三角形ODB中，$OD=\cos a$；由此得出：

$$\cos c=\cos a\cos b. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

其次从直角三角形ODB，BDE，OEB可知，$\sin a=BD$，$BD=BE\sin A$，$BE=\sin C$，於是得出：

$$\sin a=\sin c\sin A, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\sin b=\sin c\sin B. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

从直角三角形BDE，OED，OEB可知，$\cos A=\frac{DE}{BE}=\frac{OE\tan b}{OE\tan c}$，於是得出：

$$\cos A=\tan b\cot c, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\cos B=\tan a\cot c. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

又因$DE=OD\sin b=\cos a\sin b=\cos a\sin c\sin B$（由（3）），$BE=\sin C$，所以，

$$\cos A=\cos a\sin B, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\cos B=\cos b\sin A. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

从直角三角形OED，BDE，ODB可知，$\sin b=\frac{DE}{OD}$，$DE=BD\cot A$，$BD=\tan a$，於是得出：

$$\sin b=\tan a\cot A, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\sin a=\tan b\cot B. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

將（6），（7）兩式的$\cos a$与$\cos b$代入（1）式，則得出：

$$\cos C=\cot A\cot B. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

公式（1）——（10）虽是在除C以外的其余五个元素都小於直角

的假定下得到的，但事实上，公式（1）—(10) 对任一球面直三角形都适合，现在举出其中兩种情形加以說明。

1．若 a 大於直角，b 小於直角，則从点 B 所作的垂直於 OA 的平面应与 AO，CO 的延長線相交(圖132.)，仍得到上述几个直角三角形，於是，

$$\begin{aligned}\cos C&=\cos\angle BOA\\&=-\cos\angle BOE\\&=-OE\\&=-OD\cos\angle DOE\\&=\cos\angle BOD\cos\angle AOC\\&=-\cos\angle BOC\cos\angle AOC\\&=\cos a\cos b.\end{aligned}$$

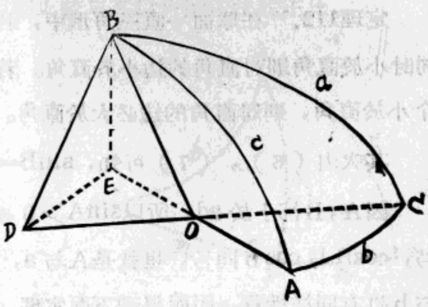

圖 132.

因此公式（1）成立。

2．若 a，b 都大於直角，則从点 B 所作的垂直於 OA 的平面与OA 相交，並以 OC 的延長線相交，（圖133.），也得到上述几个直角三角形，於是，

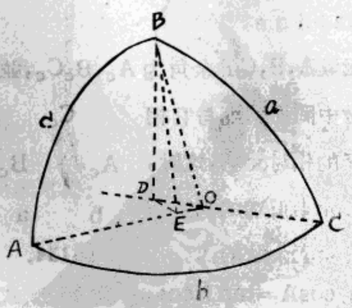

圖 133.

$$\begin{aligned}\cos C&=\cos\angle BOA\\&=OE\\&=OD\cos\angle DOE\\&=\cos\angle BOD\cos\angle DOE\\&=-\cos\angle BOC(-\cos AOC)\\&=\cos a\cos b.\end{aligned}$$

因此公式（1）也成立。

2° 公式的推論:

由(1)式可知，若 $\cos c>0$ 即 $c<d$，則 $\cos a\cos b>0$，所以 $\cos a$ 与 $\cos b$ 同号，即 a，b 同时大於 d 或同时小於 d。若 $\cos c<0$ 即 $c>d$，則 a，b 中一个大於 d，另一个小於 d，因而得到下面定理。

定理112. 在球面一直三角形中，若夾直角的兩边同时大於直角或同时小於直角則对直角的边小於直角。若該兩边之一大於直角，而另一个小於直角，則对直角的边必大於直角。

其次由(6)，(7)可知，$\sin B=\dfrac{\cos A}{\cos a}$，$\sin A=\dfrac{\cos B}{\cos b}$，

因 A，B 都小於 $2d$，所以 $\sin A>0$，$\sin B>0$，即 $\cos A$ 与 $\cos a$ 同号，$\cos B$ 与 $\cos b$ 同号，也就是 A 与 a，或同时大於 d 或同时小於 d；B 与 b 也有同样性質，因而得到下面定理。

定理113. 在球面一直三角形中，斜角与其对边必同时大於直角，或同时小於直角。

3° 納比尔定則。

为了便於記忆，公式(1)——(10)，納比尔(NaPier，英1550——1617.)的兩个定則；方法如下:

設夾直角的兩边是 a，b；另三个元素 A，B，C 的余角为 A_c，B_c，C_c，並排列如圖134，如果將其中某一元素叫做中間元素則与它相鄰的叫做鄰元素，其余兩个元素叫做它的相对元素，这时，

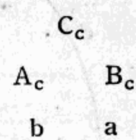

圖134.

1）中間元素的正弦都等於其相鄰元素正切的積。

2）中間元素的正弦都等於其相对元素余弦的積。

例如 $\sin A_c=\tan b\tan C_c$，由此 $\cos A=\tan b\cot c$，此即公式(4)，$\sin C_c=\cos a\cos b$，由此 $\cos c=\cos a\cos b$，此即公式(1)

§ 44. 球面斜三角形

1° 对於斜三角形，有下面几个定则。

正弦定則。球面三角形各边的正弦与其对角的正弦成正比。

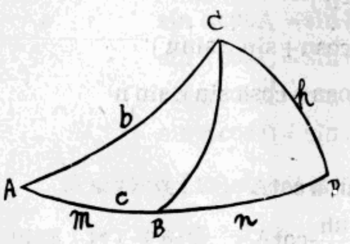

圖 135.

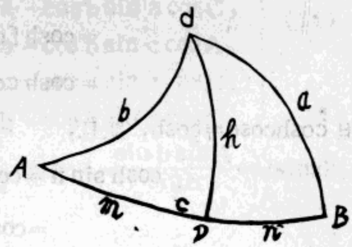

圖 136.

設△ABC 为一球面斜三角形，自任一頂点例如 C 作对边上的高 k，設它的垂足是D。（圖 5）。这时，由球面直角三角形的基本公式可知，

$$\sin h=\sin a \sin B,$$

$$\sin h=\sin b \sin A.$$

由此，

$$\sin a \sin B=\sin b \sin A,$$

或

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}.$$

同理可得:

$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},$$

因此，

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$

2°　边的余弦定則。球面三角形各边的余弦等於另兩边余弦乘积与这兩边正弦及其夾角余弦連乘积的和。

在圖5（及圖6）中:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos h \cos m \\ &= \cos h \cos(c-n)^{*} \\ &= \cos h\,[\cos c \cos n + \sin c \sin n] \\ &= \cos h \cos c \cos n + \cos h \sin c \sin n\end{aligned}$$

但 $\cos h \cos u = \cos b$，並且，

$$\begin{aligned}\cos h \sin n &= \cos h \tan h \cot A \\ &= \cos h \frac{\sin h}{\cos h} \cot A \\ &= \sin b \sin A \frac{\cos A}{\sin A} \\ &= \sin b \cos A,\end{aligned}$$

所以，

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos h + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

推論1，在球面三角形ABC中，

$$\left.\begin{aligned}\cot a \sin b &= \cos b \cos c + \sin c \cot A, \\ \cot b \sin a &= \cos c \cos A + \sin A \cot B, \\ \cot c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \cot C, \\ \cot c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C, \\ \cot b \sin a &= \cos a \cos c + \sin c \cot B, \\ \cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

---

* 在圖136. 中应为 $\cos a = \cos h \cos (n-c)$ 。

將（12）式中的第三式及 $\sin c = \sin a \dfrac{\sin c}{\sin A}$ 代入（12）的第一式，則可得到（13）中的第一式。

推論 2，在球面三角形 ABC 中，

$$\left.\begin{aligned}
\sin a\cos B&=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A,\\
\sin b\cos C&=\sin a\cos c-\cos a\sin c\cos B,\\
\sin c\cos A&=\sin b\cos a-\cos b\sin a\cos C,\\
\sin a\cos C&=\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A,\\
\sin b\cos A&=\sin c\cos a-\cos c\sin a\cos B,\\
\sin c\cos B&=\sin a\cos b-\cos a\sin b\cos C,
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

以 $\sin b$ 乘（13）式中的第二式后，再代入 $\dfrac{\sin b\sin A}{\sin B}=\sin a$ 則可得到（14）中的第一式。

3° 角的余弦定則。在球面三角形中，各角余弦等於另兩角余弦乘积的負值与这兩角正弦及其夾边余弦連乘积的和。

設球面三角形ABC的極三角形为 $A'B'C'$，这时，

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A',$$

但 $a'=\pi-A,\ b'=\pi-B,\ c'=\pi-C,\ A=\pi-a.$

所以，$-\cos A=\cos B\cos C-\sin B\sin C\cos a$，因此，

$$\left.\begin{aligned}
\cos A&=\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos C,\\
\cos B&=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b,\\
\cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c,
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

推論 1. 在球面三角形ABC中，

$$\left.\begin{aligned}
\cot A\sin B&=-\cos B\cos C+\sin c\cot a,\\
\cot B\sin B&=-\cos C\cos a+\sin a\cot b,\\
\cot C\sin A&=-\cos A\cos b+\sin b\cot c,\\
\cot C\sin B&=-\cos B\cos a+\sin a\cot c,\\
\cot B\sin A&=-\cos A\cos c+\sin c\cot b,\\
\cot A\sin C&=-\cos c\cos b+\sin b\cot a.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

推論 2. 在球面三角形ABC中，

$$\left.\begin{aligned}\sin A\cos b&=\sin C\cos B+\cos C\sin B\cos a,\\ \sin B\cos c&=\sin A\cos C+\cos A\sin C\cos b,\\ \sin C\cos a&=\sin B\cos A+\cos B\sin A\cos c,\\ \sin A\cos c&=\sin B\cos C+\cos B\sin C\cos a,\\ \sin B\cos b&=\sin C\cos A+\cos C\sin A\cos b,\\ \sin C\cos a&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\cos c.\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

§45. 半 角 公 式

由余弦定則可知，$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$，

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

但，
$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A,$$

所以
$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos b\cos c+\sin b\sin c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin b\sin c}.$$

設 $a+b+c=2s$，則 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，$s-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$，

$$s-b=\tfrac{1}{2}(c+a-b),\quad s-c=\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

代入前式化簡后則得到：

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},\\
\sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin a\sin b}},\\
\sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}.
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

其次，由於 $2\cos\frac{A}{2}=1+\cos A$

$$=1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}.$$

化簡后則得到：

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},\\
\cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}},\\
\cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}.
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

最后由（18）（19）可以推出：

$$\left.\begin{aligned}
\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}},\\
\tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-d)}},\\
\tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}.
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

〔註〕因为球面三角形各角均小於 π，所以各角之半的正弦，余弦，正切都是为正値，因此在（18），（19），（20）各式的根号前都取正号。

§46. 半边公式

設球面三角形 $A'B'C'$ 是球面三角形 ABC 的極三角形。这时，

$$A'=\pi-a,\ B'=\pi-b,\ C'=\pi-c,$$

$$a'=\pi-A,\ b'=\pi-B,\ c'=\pi-C,$$

設　　$A+B+C=2s$，則 $a'+b1+c'=3\pi-2s$.

再設　　$a'+b'+c'=2s'$，

則　　$s'=\frac{3}{2}\pi-s,\ s'-a'=\frac{\pi}{2}-(S-A), s'-b'=\frac{\pi}{2}(S-B),$

$$s'=c'=\frac{\pi}{2}-(S-C).$$

由（19）　　$\cos\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin s'\sin(s'-a')}{\sin b'\sin c'}},$

所以　　$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin(\frac{3}{2}\pi-s)\sin[\frac{\pi}{2}(s-A)]}{\sin(\pi-B)\sin(\pi-c)}}.$

化簡后則得到:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos s\cos(S-A)}{\sin B\sin C}},\\ \sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos s\cos(S-B)}{\sin A\sin C}},\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos s\cos(S-C)}{\sin A\sin B}}.\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

其次由（18） $\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s'-b')\sin(s'-c')}{\sin b'\sin c'}}$,

所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin[\frac{\pi}{2}-(S-B)]\sin[\frac{\pi}{2}-(s-c)]}{\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)}}$.

化簡否則得到:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}},\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-C)\cos(S-A)}{\sin A\sin C}},\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}.\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

最后由（21），（22）可以推出:

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos s\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}},\\ \tan\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos s\cos(S-B)}{\cos(S-C)\cos(S-A)}},\\ \tan\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos s\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}.\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

〔註〕 $\because 3\pi>2r>\pi.\therefore\frac{3\pi}{2}>s>\frac{\pi}{2}$，由 $\frac{\pi}{2}>S-A$, $\frac{\pi}{2}>S-B$,

$\frac{\pi}{2}>S-C$，所以（21）与(23)中“$-\cos s\cos(S-A)$”（或“$-\cos s\cos(S-B)$”，“$-\cos s\cos(S-C)$”）必为正値。

因此其平方根必为实数。

和平面三角法一样，从上面的基本公式，便可以得出其它一系列球面三角公式，限於篇幅，这里不再叙述。

習　題　一

在球面直角三角形 ABC(∠C（为直角）內:

1．求証：$\tan^2\frac{1}{2}a=\tan\frac{1}{2}(c+b)\tan\frac{1}{2}(c-b)$.

2．求証：$\tan^2\frac{1}{2}a=\tan\left(\frac{1}{2}(A+B)-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left[\frac{1}{2}(A-B)+\frac{\pi}{4}\right]$.

3．求証：$\tan^2\frac{1}{2}c=-\cos(A+B)\sin(A-B)$.

4．求証：$\sin^2\frac{c}{2}=\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}$.

5．求証：$\sin(c-b)=\tan^2\frac{A}{2}\sin(c+b)$.

習　題　二

1．在△ABC中。若A＝a，則B与b或相等或相补，C与c亦然。

2．在△ABC中，若 $b+c=\pi$，則 $\sin 2B+\sin 2C=0$.

3．在△ABC中。C为直角。試証：当

$\cos A=\cos^2 a$ 时，$b+c=\frac{\pi}{2}$ 或 $b+c=\frac{3\pi}{2}$.

(b,c均$<\frac{\pi}{2}$)(b,c都$>\frac{\pi}{2}$).

習 題 三

1．在球面等边三角形ABC中，求証：$\sec A = 1 + \sec a$.

2．設D为球面三角形ABC之BC边上一点，

求証 $\cos AD \sin BC = \cos AB \sin DC + \cos AC \sin BD$.

3．設D为球面三角形ABC中AB边之中点.

求証：$\cos AC + \cos BC = 2\cos\frac{1}{2}AB\cos CD$.

習 題 四

1．在等边球面三角形中，求証$2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2}=1$.

2．在等边球面三角形中，求証$\tan^2\frac{a}{2}=1-2\cos A$.

3．在球面三角形中求証：

① $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{\sin(s-a)}{\sin s}$.

② $\sin(s-a)=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\sin a$.

③ $\sin s=\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\sin a$.

④ $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{C}{2}$.

4. 在球面三角形中，

已知$A=B=2C$，求証

$$\cos a\cos\frac{a}{2}=\cos\left(c+\frac{a}{2}\right).$$