附：

# 武汉市历届数学竞赛试题解答

附：

# 武汉市历届数学竞赛试题解答

# 附：武汉市历届数学竞赛试题解答

## 第一届（1956年）

1．设 $n$ 为正整数，问有多少方法可将 $n$ 表为三个正整数的和？但相加次序不同时，作为是不同的方法（例如 $n=5$ 时，$5=1+2+2=2+1+2$ 算是两种不同的方法）。

解：三相加数第一数为

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1的有 $n-2$ 种： | 2的有 $n-3$ 种： | ………… |
| 即 | $1+1+(n-2)$ | $2+1+(n-3)$ | ………… |
| | $1+2+(n-3)$ | $2+2+(n-4)$ | ………… |
| | ……………… | ……………… | ………… |
| | $1+(n-2)+1$ | $2+(n-3)+1$ | ………… |
| | $(n-3)$的有2种： | $(n-2)$的有1种： | |
| | $(n-3)+2+1$ | $(n-2)+1+1$ | |
| | $(n-3)+1+2$ | | |

故总共有 $1+2+\cdots\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 种方法。

2．甲自A站骑自行车与一辆三轮车同时出发，十分钟后甲的弟弟某乙因甲忘记了带钱，另骑一车从A地出发去追甲，追到甲交给钱后立刻按去时速度赶回来，在回程5里处又

遇见了三轮车。设甲的速度每小时24里，而乙的速度二倍于三轮车，试求乙的速度。

解：设三轮车的速度每时为 x 里，则乙的速度每时为 2x 里，又设乙距A站 y 里处追及甲，在追及时，乙走了 $\frac{y}{2x}$ 时，甲走了 $\frac{y}{24}$ 时，但甲先行10分钟 $=\frac{1}{6}$ 时，故得：

$$\frac{y}{24}-\frac{y}{2x}=\frac{1}{6}, \quad \text{即} \quad y=\frac{4x}{x-12} \qquad (1)$$

又乙自动身到回程遇三轮车时一共走了 y+5 里，而三轮车只走了 y-5 里，且比乙多走10分钟，故得：

$$\frac{y+5}{2x}=\frac{y-5}{x}-\frac{1}{6}, \quad \text{即} \quad y=15+\frac{x}{3} \qquad (2)$$

由(1)、(2)得：$x^2+21x-540=0$，

$(x-15)(x+36)=0$。得 $x=15$(里)。

答：乙的速度是每小时30里。

3. 设 a，b，c 各为一三角形三角 A、B、C 的对边，试证

$$\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)}{\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{C}{2}+B\right)}=\frac{a+c}{a+b}.$$

证：$\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)$

$$=\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\cos C+\cos^2\frac{B}{2}\sin C$$

$$=\frac{1}{2}\sin B\cos C+\frac{1}{2}(1+\cos B)\sin C$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(B+C)+\sin C]$$

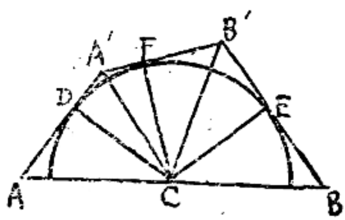
$$=\frac{1}{2}(\sin A+\sin C)$$

$$=\frac{1}{4R}(a+c)。R为外半径。$$

同样 $\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{C}{2}+B\right)=\frac{1}{4R}(a+b)$。取此值得本题的证。

4．设线段 AB 的长为 $2l$，中点为C。以C为心，小于 $l$ 的任意长为半径，在 AB 上作一半圆，并自A、B作这半圆的切线，切点分别记为 D、E。若 DE 弧上任意一点 F 处的切线与自 A、B 所作的切线分别相交于 A′、B′，证明：$AA'\cdot BB'=l^2$。

证：连图中各半径，




则见 $\angle BCE=\angle ACD$（对称关系），

$\angle DCA'=\angle FCA'$，

$\angle B'CE=\angle B'CF$（切线性质），

故有 $\angle BCE+\angle DCA'+\angle B'CE=90°$。

即 $\angle BCB'=90°-\angle DCA'=\angle AA'C$。

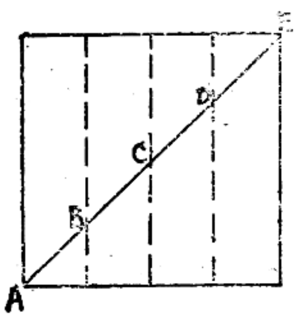
由是在　$\triangle AA'C$ 与 $\triangle BCB'$ 中，

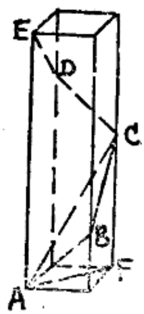
$\angle AA'C=\angle BCB'$（刚才证出），

且　$\angle A'AC=\angle CBB'$（对称关系），所以它们相似。

因之　$AA':AC=BC:BB'$，而　$AA'\cdot BB'=AC\cdot BC=l^2$。（证毕）

5．将图中正方形依着点线折成一个正方形棱柱面，因之对角线就成为一条绕在柱面上的折线 ABCDE，试求这折线相邻各段间的夹角。




证：设正方形每边的长为4a，则折成柱形后底棱之长为a，显然折线相邻各段间的夹角是相等的。

即　$\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE$。

又　$AB=BC=\frac{1}{4}$对角线$=a\sqrt{2}$，连AC及AF，则因$\triangle ACF$为直角三角形，有　$AC^2=AF^2+FC^2=(a\sqrt{2})^2+(2a)^2=6a^2$。

由余弦定理，在$\triangle ABC$中

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

$$= \frac{2a^2 + 2a^2 - 6a^2}{4a^2} = -\frac{1}{2},$$

∴ $\angle ABC = 120^\circ$（答）．

# 第二届（1957年）

## 初　　赛

1．设 $a+b+c=abc$ 证明：

$$a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-a^2)(1-c^2)$$
$$+c(1-a^2)(1-b^2)=4abc.$$

证：$a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-a^2)(1-c^2)$

$$+c(1-a^2)(1-b^2)$$
$$=(a+b+c)-ab^2-ac^2-ba^2-bc^2$$
$$-ca^2-cb^2+abc(bc+ca+ab)$$
$$=abc-ab^2-ac^2-ba^2-ba^2-ca^2$$
$$-cb^2+(a+b+c)(bc+ca+ab)$$
$$=4abc.$$

2．设 $a_1$，$a_2$，……，$a_n$，$b_1$，$b_2$，……，$b_n$ 都是实数，并且

$$a_1^4+a_2^4+a_3^4+\cdots\cdots+a_n^4=p^4,$$
$$a_1^3b_1+a_2^3b_2+a_3^3b_3+\cdots\cdots a_n^3b_n=p^3q,$$
$$a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+\cdots\cdots+a_n^2b_n^2=p^2q^2,$$
$$a_1b_1^3+a_2b_2^3+a_3b_3^3+\cdots\cdots+a_nb_n^3=pq^3,$$
$$b_1^4+b_2^4+b_3^4+\cdots\cdots+b_n^4=q^4.$$

证明：$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3=\cdots\cdots=a_n:b_n=p:q$。

证：由所给第一及第五关系式，可见 $p^2$ 与 $q^2$ 都是实数，于是由第三关系式，$pq$ 是实数，因而 $p:q$ 也是实数。如果 $p$ 与 $q$ 同是零，那么

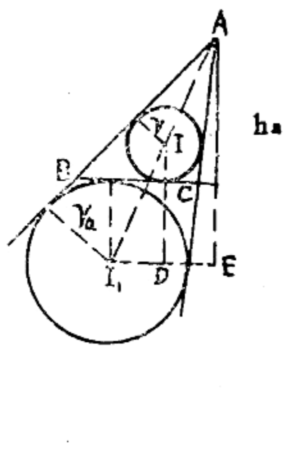
$$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n=b_1=b_2$$
$$=b_3=\cdots\cdots=b_n=0.$$

如果 $p$ 与 $q$ 不同是零，例如说 $p$ 不等于 0，那么令 $p=qr$，在这里 $r$ 是一实数，以 $1$，$-4r$，$6r^2$，$-4r^3$，$r^4$ 分别乘所经第一、二、三、四、五关系式两边，然后把这关系式相加就得到：

$$(a_1-b_1r)^4+(a_2-b_2r)^4+(a_3-b_3r)^4+$$
$$\cdots\cdots+(a_n-b_nr)^4=0.$$

所以 $a_1-b_1r=a_2-b_2r=a_3-b_3r=\cdots=a_n-b_nr=0$。于是本题得证。

3．设 $r$ 与 $h_a$ 分别表示△ABC 的内切圆半径与 BC 边上的高，$r_a$ 表示与 BC 边相切，且与 AB 和 AC 的延长线相切的傍切圆半径，证明：




$$h_a=\frac{2r_ar}{r_a-r}.$$

解法一：设三角形ABC 三边的长分别是 a，b，c，由三角法求得：

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

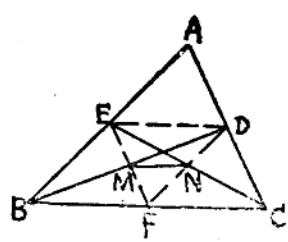
$$r=\frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(a-b)(s-c)}.$$

$$r_a=\frac{1}{s-a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

在这里 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。由此可推出求证的关系式。

解法二：设 I 与 $I_1$ 分别是△ABC 的内切圆与切 BC 边的傍切圆的圆心，过 $I_1$ 作直线 $I_1E$ 平行于 BC，又作 AE 与 ID 垂直于 $I_1E$。由图可见 $r_a:r=AI_1:AI$。另一方面，$AI_1:II_1=AE:ID=(h_a+r_a):(r+r_a)$，因此 $r_a:r=(h_a+r_a):(h_a-r)=(h_a+2r_a):h_a$。于是 $(r_a-r):r=2r_a:h_a$，而本题得证。

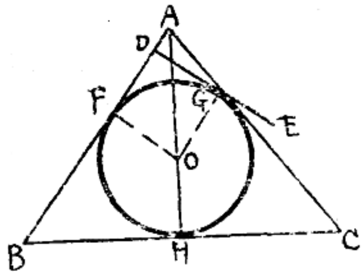
4．设△ABC 两中线 BD、CE 的中点分别是 M，N。求 MN 与 BC 两线段的长度的比值。




证：联 ED、EM、DN，那么 EM、DN 与 BC 在它的中点相交。其次，显然 EM＝MF，DN＝NF，所以 $MN=\frac{1}{3}ED=\frac{1}{4}BC$。也就是 $MN:BC=\frac{1}{4}$。

5．一正圆锥体有一半径为 r 的内切球。如果已知一个与这球相切，并且与圆锥一母线相垂直平面到锥顶的距离是

$\frac{1}{3}r$，求这一圆锥的体积。




解：过圆锥顶点到底的垂线 AH 与所给的母线 AB 作一截面，设这平面与所给平面交于 DE。过内切球的中心O作OF与OG分别垂直于AB与DE，我们有$AO=\sqrt{AF^2+OF^2}$，$AF=\frac{4}{3}r$，因而求得 $AH=\sqrt{\left(\frac{4}{3}r\right)^2+r^2}+r=\frac{5}{3}r+r$ $=\frac{8}{3}r$，于是 $BH=\frac{OF}{AF}\cdot AH=\frac{r}{\frac{4r}{3}}\cdot\frac{8}{3}r=2r$。

因此圆锥的体积$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{8}{3}r\cdot(2r)^2=\frac{32}{9}\pi r^2$。

## 决　　赛

1．某甲有票面额五分的人民币 2 张，一角的 3 张，五角的 9 张。试问某甲付款时可以付出几种不同的价钱？

解：由于3张一角与2张五分的票子所能付出的各种价钱与8张五分的票子所能付出的价钱完全相同。因此某甲所持之人民币可以当作五分的票子8张，五角的票子9张。从8张五分的票子中取1张，2张，……，8张或者1张也不取，共有9种取法，而从9张五角的票子中取1张，2张，……，9张或者1张也不取，共有10种取法。但当两种票子完全不取时，价钱为0，无意义。因此某甲所能付出不同的价钱为$9\times10-1=89$种。

2．方程$x^2=1(n\geq2)$的几个根是1，$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_{n-1}$，证明

$$(1-a_1^2)(1-a_2^2)(1-a_3^2)\cdots(1-a_{n-1}^2)$$

当n为偶数时等于0，当n为奇数时等于n。

证：由题设即有$x^n-1=0$，

亦即 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=0$。

因 1，$a_1$，$a_2$，…，$a_{n-1}$为$x^n=1$之根，

故 $(x-1)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n-1)=0$，

从而我们有（韦达公式）

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=-1,$$

$$a_1a_2+\cdots+a_1a_{n-1}+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}=1,\ \cdots\cdots,$$

$$a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}=(-1)^{n-1}.$$

故 $(1-a_1^2)(1-a_2^2)(1-a_3^2)\cdots(1-a_{n-1}^2)$

$$=[(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})]$$

$$\cdot[(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_{n-1})]$$

$$=[1+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+(a_1a_2+\cdots$$

$$+a_{n-2}a_{n-1})+\cdots+(a_1a_2\cdots a_{n-1})]\cdot[1-(a_1$$

$$+a_2+\cdots+a_{n-1})+(a_1a_2+\cdots+a_{n-2}a_{n-1})+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}]$$

$$=[\underbrace{1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}}_{n}](\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})$$

$$=[\underbrace{1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}}_{n}]n.$$

因此，不难看出，当 n（注意 $n\geq2$）为偶数时，上式等于 0；当 n 为奇数时，上式等于 n。这就完全证明。

3．消去下列方程中的 x 与 y：$\sin x+\sin y=a$，$\cos x+\cos y=b$，$\mathrm{ctg}x\cdot\mathrm{ctg}y=c$。

解：第一式和第二式各自两边平方再相加，就得到

$$2+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)=a^2+b^2,$$

即 $$\cos(x-y)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2) \qquad (A)$$

再以所给的第二式除第一式，并使用和差化积的公式就有：

$$\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{a}{b},$$

即 $$\mathrm{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b} \qquad (B)$$

至此，注意（A）、（B）两式即是

$$x-y=\arccos\frac{a^2+b^2-2}{2}.$$

$$x+y=2\mathrm{arc\,tg}\frac{a}{b}.$$

故有：$x=\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{a^2+b^2-2}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)$，

$$y=\frac{1}{2}\left(2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\arccos\frac{a^2+b^2-2}{2}\right).$$

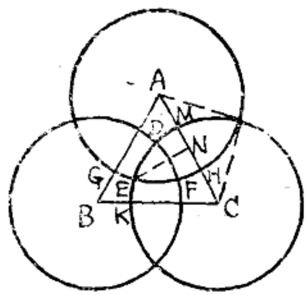
最后，以 x、y 代入题中所给的第三式就是：

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{a^2+b^2-2}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)$$

$$\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\arccos\frac{a^2+b^2-2}{2}\right)$$

$$=c.$$

4．一正三角形的每边长是 2a，以各点为中心，$\sqrt{2}a$ 为半径作三圆，求三圆公共部分的面积。




解：设已给定 △ABC（如图），我们要求面积DEF，由题设可知面积 ABC $=\sqrt{3}a^2$；同时可知扇形面积

AGH $=\frac{1}{3}\pi a^2$。

现在令面积 BGEK = x，面积 EKLF = y，于是我们就得到

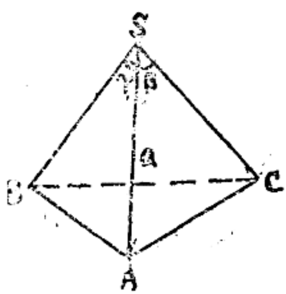
$$2x+y=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi\right)a^2 \qquad (1)$$

再由假设又可知$\angle ECA=\frac{\pi}{4}$，因此我们不难看出面积 EHM = 2(面积 ECM − 面积 ECN) = $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$，因而 $3x+2y=$面积 ABC − 面积 EHM $=\left(\sqrt{3}+1-\frac{\pi}{2}\right)a^2$。从这一式子中减去（1）式，我们得到 $x+y=\left(1-\frac{\pi}{6}\right)a^2$。

因此我们最后求得

面积 DEF = 面积 ABC − $3(x+y)=\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}-3\right)a^2$。

5．三面角 S—ABC 的三个面角分别是$\angle BSC=\alpha$，$\angle CSA=\beta$，$\angle ASB=\gamma$，求这三面角的三个二面角的大小。




解：如图，设以 SA、SB、SC 为棱的三个二面角分别地是 $\lambda$，$\mu$，$\nu$，作平面 ABC 与 SA 垂直，并与直线 SB 及 SC 相交于 B、C。设 SA = a，因而很容易看出

$$SC=a\sec\beta,\qquad SB=a\sec\gamma,$$

$$AC=a\operatorname{tg}\beta,\qquad AB=a\operatorname{tg}\gamma.$$

再根据余弦定理我们有：

$$BC^2=a^2\sec^2\beta+a^2\sec^2\gamma-2a^2\sec\beta\sec\gamma\cos\alpha,$$

又对△ABC应用余弦定理我们有：

$$\cos\lambda=\cos\angle BAC$$

$$=\frac{a^2\mathrm{tg}^2\beta+a^2\mathrm{tg}^2\gamma-(a^2\sec^2\beta+a^2\sec^2\gamma-2a^2\sec\beta\sec\gamma\cos\alpha)}{2a^2\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}$$

$$=\frac{\sec\beta\sec\gamma\cos\alpha-1}{\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

对于 $\cos\mu$，$\cos\nu$ 我们可以推出类似相当的表示式，所以我们有：

$$\lambda=\cos^{-1}\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\mu=\cos^{-1}\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha},$$

$$\nu=\cos^{-1}\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

# 第三届（1958年）

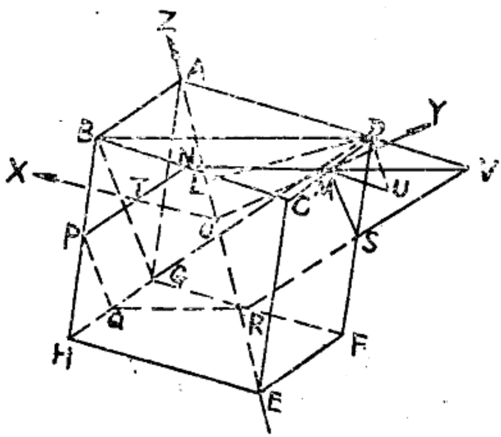
## 初　　赛

1．已知任意一个整数，将其数字相加，其和可为一位数或多位数，如不是一位数，又将其和的数字相加，象这样做下去，最后得到一位数为止．若该一位数是2，3，5，6四数中的一个，那么原给的整数，决不可能是正整数的平方或立方，求证．

证：因为任意的整数可表示为五种形式：$9n$，$9n\pm1$，$9n\pm2$，$9n\pm3$，$9n\pm4$，故各数的平方可写作 $(9n)^2=9k$，$(9n\pm1)^2=9k+1$，$(9n\pm2)^2=9k+4$，$(9n\pm3)^2=9k$，$(9n\pm4)^2=9k+7$（这里 $k=0, 1, 2, \cdots\cdots$）；

各数的立方可写作 $(9n)^3=9k$，$(9n\pm1)^3=9k+1$，$(9n\pm2)^3=9k+8$，$(9n\pm3)^3=9k$，$(9n\pm4)^3=9k+1$。但一整数若按题设手续进行下去，最后得到的一位数必为原数被 9 除的余数，而上面所列的诸余数内，却没有 2，3，5，6 四个数，所以原给的整数不是正整数的平方或立方。

2．有一个立方体，边长为 a，今连两对角顶为轴而旋转，问所得旋转体的体积是多少？




解：如图 ABCD—EFGH 为正立方体，以 AE 为轴而旋转，令 AE 的中点为 O，轴 AE 与面 BDG 相交于 L，得 $DL\perp AE$，在 $\triangle ADE$ 中，$\angle ADE$ 为直角，$\angle AED=\angle ADL$，

$AE=\sqrt{3}a$，$DE=\sqrt{2}a$，$AO=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$DL=a\cos\angle ADL$

$=a\sin\angle EAD=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$AL=\sqrt{a^2-DL^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

$MO=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$OL=\frac{\sqrt{3}}{2}a-$

$\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

∴　直圆锥 A—BDG 的体积 $=\frac{\pi}{3}DL^2\cdot AL$

$=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

今过中心O作BDG的平行平面，必平分DC，CB，BH，HG，GF，FD 于 M，N，P，Q，R，S，且 MNPQRS 为正六边形，边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$，令 NP 的中点为 T，以 OT，OM，OA 为轴 x，y，z。由正六边形得M的座标为$\left(0，\frac{\sqrt{2}}{2}a，0\right)$. 再由D作 DU⊥面 xOy 于 U，得 $UD=OL=\frac{\sqrt{3}}{6}a$. MU∥TO，且其长等于$\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2}$，即$\frac{\sqrt{6}}{6}a$（∵U为△MSV 的重心），于是 D的座标为$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}a，\frac{\sqrt{2}}{2}a，\right.$