概率论基本知识

（供舰艇枪炮干部用）

中国人民解放军 海军司令部

一九八二年

说　明

本教材是按第一水面舰艇学校一九七九年枪炮部门长班用的《概率论基本知识》教材翻印的，其中第三章第六节“普阿松分布律”由射击教研室专门编写。

概率论是一门从数量方面研究大量偶然性现象的集体规律的数学学科。近数十年来，概率论得到了迅速的发展，并被广泛地应用于生产实践和军事科学领域中，它同射击学又有着不可分割的联系。进行误差分析，研究射击规律，制定射击方法，都需要依据概率论提供必要的数量分析，因此它是研究和掌握射击学的重要工具。

本教材阐述了概率论的一般理论，它是各级舰炮专业干部学习和掌握舰炮射击原理和战斗使用方法的专业基础。在学习中应联系工作实际加深理解、并运用掌握的理论指导专业工作和射击训练。本教材供在职舰炮专业干部自学用，也可作为专业集训之基本教材。

海军司令部

一九八二年

目　　录

第一章　概率论的基本概念及基本定理

概率论是从数量方面研究随机现象的规律性的一门数学分科。

概率论中所研究的随机现象，指的是在一定条件下，可能出现也可能不出现、可能这样出现也可能那样出现的现象。例如对地面目标射击时，发射一发炮弹，可能命中，也可能不命中；弹丸可能落在这一点，也可能落在那一点。再如，用测距仪测量目标距离时，可能得到这样的结果，也可能得到那样的结果等等都是随机现象。

从表面上看，个别的随机现象是否出现，怎样出现，似乎没有什么规律。但如果在同一条件下进行多次实验，就会发现随机现象遵循着一定的规律。例如在同一条件下进行多次发射，就会发现所有的弹丸落点都围绕某一中心（散布中心），对称分布在一个椭圆状的范围内，而且越靠近中心分布越密集。

概率论就是在大量重复实验（或观察）的条件下，探求随机现象规律性的数学工具。我们掌握了它，就可以用来研究射击理论、分析射击误差和预计射击效果等。

本章着重叙述概率论中的一些基本概念和基本定理，为学习以后各章打下必要的基础。

第一节　事件及其概率

一、事件及其分类

1.事件

任何一门科学，都有它自己的一些基本概念。例如算术中的基本概念是数，几何学中的基本概念是点、线、面；概率论中也有类似的基本概念，这就是事件。

在一定条件下，实验可能产生的一切结果称为事件。例如射击时命中目标和不命中目标，都是事件。

2.事件的分类

在实际生活中，所出现的事件可能有各式各样，但归纳起来可分为以下三类：

（1）必然事件

在一定条件下，每次实验肯定会出现的事件，称为必然事件。例如从全部储存爆破弹的弹药箱中，取出的炮弹必然是爆破弹，这就是必然事件。必然事件通常用符号U 表示。

（2）不可能事件

在一定条件下，每次实验肯定不会出现的事件，称为不可能事件。例如从全部储存爆破弹的弹药箱中，取出一发空炸榴弹，这就是不可能事件。不可能事件通常用符号V 表示。

（3）随机事件

在一定条件下，每次实验可能出现也可能不出现的事件，称为随机事件。例如对某一目标射击时，命中目标这个事件，可能出现也可能不出现，这就是随机事件。随机事件

通常用符号A、B、C……表示。

随机事件通常简称为事件，它是概率论研究的主要对象。

二、事件的概率

不同的事件，其出现的可能性是不同的，有的可能性大些，有的可能性小些。例如在同一条件下连续向某目标发射两发炮弹，命中一发这个事件比命中两发这个事件可能性就要大些。

为了比较各个事件的可能性，需要给予每一事件一个数值，使可能性越大的事件有较大的数值。这种用来表示事件出现可能性程度的数值，就叫做事件的概率。事件A的概率用符号P(A)表示。

必然事件出现的可能性最大，我们规定它的概率等于1，即：

$$P(U) = 1$$

不可能事件出现的可能性最小，我们规定它的概率等于0，即：

$$P(V) = 0$$

对任一事件A来说，则有：

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \qquad (1-1-1)$$

第二节　计算事件概率的方法

研究事件，主要是计算事件的概率。根据计算结果，就能预测某事件在实验中出现的可能性。

计算事件概率的方法通常有以下三种：

一、直观方法（又称古典方法）

这种计算方法是建立在实验的各种可能结果（即事件）都具有“同等可能性”前提下得出的。先举二例来说明。

例1：向空中抛一枚均匀的钱币，分别求钱币落地时出现正面和出现反面的概率。

解：因钱币是均匀的，凭直观判断可知，钱币落地时，出现正面和出现反面两种结果具有同等可能性，即各占$\frac{1}{2}$。

如果用P(A)表示出现正面的概率，用P(B)表示出现反面的概率，则有：

$$P(A)=\frac{1}{2}; \qquad P(B)=\frac{1}{2}$$

例2：箱内有红、黄、白、蓝颜色旗各一面，今任意取出2面，求取出的2面旗中有一面是红旗的概率。

解：从上述4面旗中任意取出2面，全部可能结果有6种，即红黄、红白、红蓝、黄白、黄蓝。这6种结果出现的可能性都是相同的，即具有同等可能性。6种结果中有一面是红旗的占3种，即红黄、红白、红蓝，故取出的2面旗中有一面是红旗的概率为：

$$P_{红}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

利用这种同等可能性的性质，我们可以很容易地得到计算事件概率的直观方法。

如果在一次实验中，全部同等可能结果数为n个，其中有利于事件A的可能结果数为m个，则事件A出现的概率P(A)为：

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1-2-1)$$

公式（1—2—1）即为直观方法计算事件概率的公式。

应用直观方法计算事件的概率，必须具备以下几个条件：

1.一次实验中全部可能结果数为有限个；

2.各个可能结果的出现具有同等可能性；

3.各可能结果的出现是互斥的（任何两个结果都不能同时出现称为互斥）。

事件A的概率P(A)具有如下的特性：

1.因 $0 \leqslant m \leqslant n$，故 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

2.P(A)是个不名数；

3.P(A)与实验无关，条件一定时，它是个常数，且在事先就可以求出。

二、几何方法

如果实验的全部同等可能结果数及有利于事件A的可能结果数不是有限个时，就不能用公式（1—2—1）计算事件的概率。在这种情况下，我们可以利用能够表示有利于事件A的可能结果数及全部同等可能结果数的几何量（长度、面积、体积等）来计算事件A的概率。

若以G代表全部同等可能结果数的几何量，g代表有利于事件A的可能结果数的几何量，则事件A出现的概率为：

$$P(A)=\frac{g}{G} \qquad (1-2-2)$$

这种利用几何量之比求出的事件概率，又称为几何概率。

例：设炸弹落在面积为800平方米的某院内每一点的可

能性都是相等的，院内有一面积为200平方米的仓库，求炸中仓库的概率。

解：全部同等可能落点的总面积为800平方米，而有利落点面积为200平方米，故炸中仓库的概率应是两个面积之比，即：

$$P_{炸中}=\frac{200}{800}=0.25$$

三、统计方法

在实践中，有许多事件出现的可能性并不都是相等的。例如火炮射击时，弹丸落于目标周围各点的可能性就不相等。在这种情况下，我们不能采用上述两种方法来计算事件的概率，而应该根据实验结果用统计方法求出。为了导出这种方法，首先研究事件的出现率。

1.事件的出现率

在相同条件下进行多次实验后，事件A出现的次数（K）与全部实验次数（n）之比，称为事件A的出现率，记作 $P^*(A)$，即：

$$P^*(A)=\frac{K}{n} \qquad (1-2-3)$$

例：向目标连续发射10发炮弹，获得3发命中弹，求“命中”这一事件的出现率（在射击中通常称为命中率）。

解：总共发射10发炮弹，即实验次数n＝10；命中3发，即“命中”事件出现次数K＝3，故命中率为：

$$P^*=\frac{3}{10}=0.3$$

在日常生活中，也经常用到事件的出现率。例如，某种产品的合格率，人口的增长率，考试的及格率等。

事件A的出现率$P^*(A)$具有如下的特性：

（1）因$0\leqslant K\leqslant n$，故$0\leqslant P^*(A)\leqslant 1$；

（2）$P^*(A)$是个不名数；

（3）$P^*(A)$只能在实验后才能求出，而且它的数值随实验次数的改变而改变；

（4）当实验次数很多时，$P^*(A)$逐渐趋向稳定，即围绕一个常数作微小摆动。

为了证实事件出现率具有稳定性，很早以前，就有人作过掷铜币的实验，其结果如下表（表1—2—1）：

表1—2—1

掷铜币次数	出现正面次数	正面出现率
4040	2048	0.5069
8178	4989	0.5004
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

实验结果证明，正面出现率稳定到常数0.5。

2.统计方法

当实验次数不断增加时，事件的出现率稳定到一个常数，使我们很自然地联想到，这个常数是否就是该事件的概率？事实正是如此，在上面掷铜钱的实验中，正面出现率所稳定到的常数0.5，正是正面出现的概率。进一步研究还可以从理论上证明这种规律，这就是概率论中有名的贝努利定

理。

于是我们得到计算事件概率的统计方法，即取相同条件下多次实验的事件出现率，作为事件的概率。用这种方法得到的概率，称为统计概率。

例：为了知道某炮手发射一发炮弹的命中概率，可以根据它过去在相同条件下多次射击的记录来求出。设过去射击300发，命中50发，求一发命中概率。

解：射击300发，命中50发，故命中率为：

$$P^* = \frac{50}{300} \approx 0.167 = 16.7\%$$

由事件出现率的稳定性，得到一发命中概率为：

$$P = P^* = 16.7\%$$

需要指出的是，当实验次数不多时，事件出现率的变化是很大的，这时的出现率并不反映事件出现可能性程度，因此不能把它作为事件的概率。

3.事件出现率与概率的区别和联系

事件出现率和事件概率是两个不同的概念，它们在意义上有区别，但在数值上有紧密联系。

事件出现率与事件概率的区别是：事件出现率是在多次实验中事件出现的比例数。它只能在实验后才能求得，而且它的数值随实验次数不同而不同。事件概率表示在实验中事件出现可能性大小的一个数。它是一个客观存在的数值，且与实验无关。条件一定时，它是个常数，且在事先就可以求出。

但是，事件出现率和事件概率在数值上是有紧密联系的。我们可以把多次实验后求得的事件出现率当作事件的概

率；反过来，我们也可以根据已知的事件概率，来预测在相同条件下多次实验时该事件的出现率。例如，某炮在多次实验（射击）中，命中率为28%，则可将0.28作为该炮的一发命中概率，也就是说，在一次发射中，命中目标的可能性为28%。反之，若已知该炮的一发命中概率为0.28，那末可以预料，在多次发射中，将有28%的弹丸命中目标。

第三节　互斥事件的概率相加定理

在上一节中，我们介绍了计算事件概率的各种方法。但是在实际中，往往会遇到一些比较复杂的问题，直接运用上述方法计算事件的概率将会发生困难，有的甚至成为不可能。但是，事件之间往往是有联系的。我们虽不能直接求出某事件的概率，但可以根据与它相联系的已知事件的概率，采用数学运算方法间接求出。采用间接方法计算事件的概率，是以一系列定理为依据的，其中最基本的定理就是概率相加定理和概率相乘定理。本节主要介绍互斥事件的概率相加定理。

一、互斥事件

在一次实验中，有数个事件均可能出现，但其中某一事件出现后，其余事件都不能出现，也就是说，这些事件的出现是互相排斥的，这些事件称为互斥事件（又称不相容事件）。

例如，向目标发射一发炮弹，得近弹、得远弹和得命中弹这三个事件就是互斥事件。

又如，弹药箱中存有“±”、“+”和“-”三种符号

的炮弹各若干发，若任意取出一发，取出的是“±”号弹、“+”号弹和“-”号弹这三个事件也是互斥事件。

在一次实验中，如果只有两个事件可能出现，而这两个事件又是互斥的，这样的事件称为对立事件。对立事件是互斥事件的特殊情况。

例如，掷钱币时，出现正面和出现反面便是对立事件；向目标发射一发炮弹，命中与不命中也是对立事件。

二、互斥事件的概率相加定理

为了便于理解互斥事件的概率相加定理，首先研究一个例子。

例：某区队有30名学员，其中射击技能优秀的8人，良好的12人，一般的10人，今任意抽一名学员去参加射击，问抽到良好以上的概率是多少？

解：任意抽一名学员，不外三种情况：射击技能或是优秀的，或是良好的，或是一般的，它们都是互斥事件。但是，不论是优秀的，还是良好的，对“良好以上”这一事件的出现都是有利的。

从例中知道，30名学员中抽到任何一名都是同等可能的，即全部同等可能结果数为30；而有利于“良好以上”这一事件出现的可能结果数为 $8+12=20$。所以，抽到良好以上的概率为：

$$P=\frac{8+12}{30}=\frac{8}{30}+\frac{12}{30}$$

可以发现，$\frac{8}{30}$正好是抽到优秀的概率；$\frac{12}{30}$正好是抽

到良好的概率。也就是说，抽到良好以上的概率，恰好等于抽到优秀和抽到良好的概率的和。

从上例可以看出，把有利于所求事件出现的各个互斥事件的概率相加，就得到所求事件的概率。

互斥事件的概率相加定理如下：

有数个互斥事件，当其中某几个事件的出现有利于所求事件的出现时，则所求事件的概率，就等于这几个事件的概率之和。其公式为：

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots + P_n \qquad (1-3-1)$$

式中P_1、P_2、P_3……P_n为有利于所求事件的各互斥事件的概率。

例：设中央弹道通过点目标的远方，弹丸落在1、2、3……8各区域内的概率如图（1—3—1）所示，今发射一发，求得近弹和得远弹的概率各是多少？

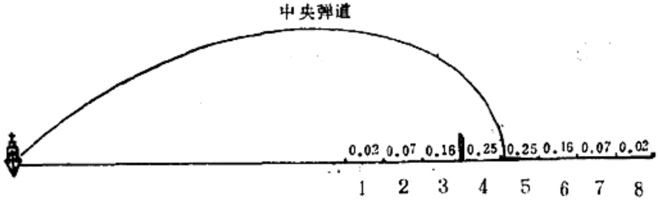

图1—3—1

解：发射一发，弹丸可能落在1—8任一区域内，但只能落在其中一个区域，所以弹丸落在1—8区域是八个互斥事件。凡是落在1—3区域内的都是近弹，所以应用公式（1—3—1）可求得近弹的概率为：

$$P_{近}=P_{(1)}+P_{(2)}+P_{(3)}$$
$$=0.02+0.07+0.16=0.25$$

凡是落在4—8区域内的都是远弹，所以远弹的概率为：

$$P_{远}=P_{(4)}+P_{(5)}+P_{(6)}+P_{(7)}+P_{(8)}$$
$$=0.25+0.25+0.16+0.07+0.02$$
$$=0.75$$

式中$P_{(1)}$、$P_{(2)}$……$P_{(8)}$分别表示弹丸落在第 1、第 2……第 8 区域内的概率。

互斥事件的概率相加定理是用来计算或者这个事件或者那个事件出现的概率，因而又称为“或者或者定理”。由于我们不指定那一个事件出现，而是好几个事件出现任何一个都可以，故所求事件的概率，比有利于所求事件中任一互斥事件的概率都大。

三、推论

推论 1：全部互斥事件概率之和等于 1 。

推论 2：对立事件的概率之和等于 1 。

例：已知一发命中概率为0.2，今发射一发，求不中概率。

解：设命中概率为p，不中概率为q。

因 $p+q=1$

故 $q=1-p=1-0.2=0.8$

第四节 概率相乘定理

在讲定理之前，先介绍几个重要概念。

一、独立事件、不独立事件与条件概率

1.独立事件

在A、B两事件中，若一个事件出现并不改变另一事件出现的概率，则称此二事件为相互独立事件。

例如，用前、后主炮对同一目标实施单炮射击指挥，前主炮命中与否，毫不影响后主炮的命中概率；反之，后主炮命中与否，也不影响前主炮的命中概率。因此，“前主炮命中”与“后主炮命中”是两个独立事件。

2.不独立事件

在A、B两事件中，若事件B的概率随事件A的是否出现而改变，则称事件B与事件A为不独立事件。

例如，盒中有两个白球和一个黑球，若甲乙二人各取一球，研究下列两个事件：

事件A——甲取出一个球；

事件B——乙取出一个白球。

如果事件A没有出现，则事件B出现的概率等于$\frac{2}{3}$；如果事件A已出现，则有两种情况：A_1为甲取出一个黑球，此时事件B出现的概率为1；A_2为甲取出一个白球，此时事件B出现的概率等于$\frac{1}{2}$，因而事件B与事件A为不独立事件。

3.条件概率

如果A、B为不独立事件，则在事件A出现的条件下求得的事件B的概率，称为事件B的条件概率，用符号P(B/A)表示。如果事件A没有出现，则事件B出现的概率称为无条件概率，记作P(B)。在上面的例子中：

$$P(B/A_1)=1 \qquad P(B/A_2)=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{2}{3}$$