中西算学大成

中西算学大成

代數術卷首原款下同

中西算學大成卷五十八

嘉善陳維祺纂

代數術一

論各種記號

第一款

西法之代數即中法之四元也。四元別以位次代數別以記號法雖殊理無異也。入算之始本用〇·一·二·三·四等十數後因此十數用于數理之深者則演算甚繁故用記號代之乃簡法也。

西國所用之記號係二十六箇字母因各種幾何題中有已知之數亦有未知之數故以起首之字母代已知之數以最後之字母代未知之數以為區別今譯則以甲乙丙丁等元代已知數以天地人等元代未知數而不用西人字母之例矣

第二款

凡⊥號在某元之左則指其數與他數相加。

如甲⊥乙謂乙與甲相加也。　如三⊥五謂五與三相加其總數八也。

第三款

凡丅號在某元之左則指其數與他數相減

如甲丅乙謂甲內減去乙也。　如六丅二即指六內減去二則其數為四也。

凡數之左邊有丄號者。謂之正數。有丅號者。謂之負數。

凡數有不與元相連。而其左亦有丄與丅之記號者。即算者心中以為可加減若干也。因小于〇之數。人心中每計想不到。故單用一負數。人每不易明。故以下說解之。

譬如人之產業。可算其是一箇正數。則其本人所虧欠之錢。可算一箇負數。又如自左向右引長作一線。則心中可算此線為正數。再自右向左退作一線。則心中可算此線當為負數。

凡數之左邊無正負之記號者。亦為正數。

凡幾箇代數式俱有丄號。或俱有丅號者。謂之同號數。亦謂之同名數。

凡幾箇代數式或有丄號或有丅號者。謂之不同號之數。亦謂之異名數。

第四款

凡代數之式有只一項者。謂之獨項式。其有數項而每項或有丄號或有丅號者。謂之多項式。

如丄甲或丅丙俱為獨項式。　如乙丄丙或甲丄乙丅丁俱為多項式。

第五款

凡將數元相乘。記其乘得之式。其法並書其元。或於其間作×號亦可。

如甲乙。謂甲與乙相乘之數也。甲×乙亦然。

如甲乙丙。謂甲與乙與丙三者連乘也。若作甲×乙×丙亦同。

若以真數一十百千萬等數也相乘者。記其相乘之式。兩數之間。必作×以間之。如二與三相乘。必作二×三。若不用×號而並書之為二三。則與二十三無別矣。不可不知。

若所乘之式有多項者。則多項之兩旁。必作一弧線以包括之。如甲以丙丄丁乘之。再以戊丅己乘之。則其丙丄丁及戊丅己之兩旁。必作()括弧以包括之如下。

甲×(丙丄丁)×(戊丅己)

或不用×號而作甲(丙丄丁)(戊丅己)亦同。

第六款

凡元之左邊有係之以真數者。此數名曰倍數。謂其所代之數為元之若干倍也。

如三甲。謂三倍其甲也。

凡元之左邊不係之以真數者。其元之倍數為一。

如甲即一甲　如甲乙即一甲乙

第七款

凡幾何以他幾何分之。記其約得之數。其法作一線。以界其法實。線之上為法。線之下為實。

如 $\frac{\text{三}}{\text{一二}}$ 謂十二以三約之也。即謂其約得之四也。

如 $\frac{\text{乙}}{\text{甲}}$ 謂置甲以乙約之。得乙分之甲也。此種之式。名之曰分數式。

第八款

凡兩式之間有＝者。意謂兩邊之數相等也。

如 甲丄乙＝丙丅丁 謂甲與乙相併。等于丙中減去丁也。

第九款

凡幾箇獨項式。或幾箇多項式。其各元之字。有無多少相同者。謂之同類之式。不相同者。謂之不同類之式。

如 丄甲乙 與 丅甲乙 為同類之式。 如 丄甲乙 與 丄甲乙乙 為不同類之式。

代數中。尚有別種記號。于以下各卷中。臨用之處。再解之。學者如已明立天元一術。則讀以下各卷之書。自易領悟。否則亦須于平常算理。如加減乘除等類之法也。本已明白者。方可進手。因代數乃算學之更深者。不必再包學算之理在其中也。

論起首之法

代數起首之法與數學起首之法同。即加減乘除四法也。有此四法。即一切之代數式皆可由此生焉。

第十款　加法

代數加法可分三種。一為同式同號者。一為同式異號者。一為式號俱異者。

一例　加同式同號之代數法。將各元之倍數相加。而號及元不變。

如
丄七甲
丄三甲
丄甲
丄二甲
諸式相加。得丄一三甲。

如
丅二甲天
丅甲天
丅五甲天
丅一二甲天
諸式相加。得丅二〇甲天。

二例　加同式異號之代數法。將其各元之倍數。正負各自相併。又以併得之正負數相減。正數大則其號為正。若負數大則其號為負。而其元不變。

如
丄二甲天
丅甲天
丅三甲天
丄九甲天
諸式相加。則先以各正式併得丄一一甲天。又以各負式併得丅四甲天。再以所得之兩式相較。得七甲天。因正數大于負數。故其加得之式為丄七甲天。

如
丄六甲乙丄七
丅四甲乙丄九
丄甲乙丅五
丄七甲乙丅一三
諸式相加。則先以各正項相併。得丄一四甲乙丄一六。又以各負項相併。得丅四甲乙丅一八。乃

以併得式相較。得⊥一〇甲乙丅六

如
⊥甲甲⊥二甲天丅天天
丅二甲甲⊥三甲天丅四天天
⊥六甲甲丅五甲天⊥一一天天
諸式相加。得
五甲甲⊥六天天

如
丅四甲甲乙
⊥甲甲乙
⊥三甲甲乙
諸式相加。得〇

三例　加式號俱異之代數。法以諸式任意連書之。其式號俱不變。

如
二甲
三乙
丅四丙
相加得
二甲⊥三乙丅四丙

如
甲天⊥二甲地
乙乙丅三乙人
相加得
甲天⊥二甲地⊥乙乙丅三乙人

第十一款　減法

凡代數之減法。反其減式之正負而加之。即得。

如
五甲丅一二乙
以
二甲丅五乙
減之。得
三甲丅七乙

如
六天丅八地丅三
以
二天⊥九地丅二
減之。得
四天丅一七地⊥五

如

五天地丅二⊥八天丅地

以

三天地丅八丅八天丅三地

減之。得

二天地⊥六⊥一六天⊥二地

如

甲甲丅甲天丅地地

以

乙乙丅乙地⊥天天

減之。得

甲甲丅甲天丅地地丅乙乙⊥乙地丅天天

減法反號之理。以說明之。設有寅⊥卯。欲於其中減去二巳丅三午假如先以二巳減之。則其式為寅⊥卯丅二巳。此式必較寅⊥卯丅(二巳丅三午)為小。因所減之二巳大于應減之二巳丅三午也。然其所大之數。必等于三午。可見其應得之數。其式必為寅⊥卯丅二巳⊥三午則反號相加之理。自易明矣。

第十二款　乘法

定號之公法。曰。同號之數相乘。得數為正。異號之數相乘。得數為負。代數之乘法。可分二種。一獨項與獨項相乘。一獨項與多項相乘。或多項與多項相乘。

一例　乘獨項式之法。先以定號公法定其正負。乃以兩式中之倍數相乘。為所得之倍數。記于正負號之右。再以兩獨項式中所有之元。並書於其右。即得。

如⊥甲 以⊥丙 乘之。得⊥甲丙

如⊥五甲 以⊤四乙 乘之。得⊤二〇甲乙

如⊤三甲天 以⊥七甲乙 乘之。得⊤二一甲甲乙天

如⊤二甲乙 以⊤三丙人 乘之。得⊥六甲乙丙人

二例　乘多項之式。法以法之每項。各與實之每項。如獨項相乘之法。一一偏乘之。乘訖併之即得。

如四甲⊤二乙⊥丙 以三甲 乘之。得一二甲甲⊤六甲乙⊥三甲丙 為所求之式。

如二天⊥地 以天⊤二地 乘之。則先以天乘二天⊥地 得二天天⊥天地 又以⊤二地 乘二天⊥地 得⊤四天地⊤二地地 相併。得二天天⊤三天地⊤二地地 為所求之式。

如甲⊤乙⊥丙 以甲⊥乙⊤丙 乘之。則得甲甲⊤甲乙⊥甲丙 及⊥甲乙⊤乙乙⊥乙丙 及⊤甲丙⊥乙丙⊤丙丙 乃以此三式相併。得甲甲⊤乙乙⊥二乙丙⊤丙丙 為所求之相乘式。

凡將數幾何之式相乘。則乘得之式。必含有各幾何之元數。

如甲乙丙三式。俱為甲乙丙式之乘數。

如甲丄天及乙丄天俱為(甲丄天)(乙丄天)之乘數。

若任以一式自相乘。至任何次。則其乘得之式。為原式之若干乘方。而其原式為方根。

如甲甲、甲甲甲、甲甲甲甲俱為甲元之乘方式。

惟有時並寫多字。殊覺不便。故用省字之法。但書其一。而記其字數於本元之右角上。此數謂之指數。亦謂之方指數。

如甲為方根。則甲甲可作$甲^{二}$。甲甲甲可作$甲^{三}$。甲甲甲甲可作$甲^{四}$。甲甲甲甲甲以上類推。

凡兩箇本式相乘之式。謂之平方式。三箇本式相乘之式。謂之立方式。任幾箇本式相乘之式。謂之幾方式。

如$甲^{二}$為甲之平方式。亦謂之甲之二方式。

如$甲^{三}$為甲之立方式。亦謂之甲之三方式。

推之，$甲^{四}$為甲之四方式，$甲^{五}$為甲之五方式，$甲^{卯}$為甲之卯方式。

準指數及乘法之理，知凡以同根異方之式相乘，只須以兩式之指數相併即得。

如 $甲\times甲^{三}$ 即 $甲^{四}$。　如 $天^{三}\times天^{四}$ 即 $天^{七}$。　其公式為 $甲^{卯}\times甲^{寅}=甲^{寅丄卯}$

第十三款　除法

變號之公法曰，同號之數相除，得數為正，異號之數相除，得數為負。

欲明除法變號之理，以乘法之定號互觀之，其理易明，蓋不過欲其所得之數與法相乘，仍與原式之正負相同也。

凡記代數除約之式，每書其法於實之上，而法實之間作一橫線以界之。（詳見二十五款）

惟此不過渾言以此式約彼式耳，若欲詳其約得之式，則有三例以明之。

一例　若法為獨項式，而實之每項均為法所可約者，則以法之倍數各約其實中每項之倍數，又去其與法相同之元，即為約得之式。

如 $一二甲乙丙$ 以 $三甲丙$ 約之，則依分數之公法，當書之為 $\frac{三甲丙}{一二甲乙丙}$。　惟此式可以法之倍數三約

其實之倍數$二$為四。而又可去其法實相同之元丙。則式中僅有乙元。故其約得之式為$四乙$

如有多項式$一六甲^{三}地天 \;丅\; 二八甲^{二}天人^{二} \;丄\; 四甲^{二}天^{三}$以$四甲^{二}天$約之。則其約得之式。為$四甲地 \;丅\; 七人^{二} \;丄\; 天^{三}$

若法與實為同類之乘方式。則以法之指數。減實之指數。即得。如$甲^{五}$以$甲^{三}$約之。得$甲^{五丅三}$即$甲^{二}$

二例　若法為獨項式。而與實之式不同類者。則書其法于實之上。而中作橫線以界之。故法為分母。實為分子。如$三甲乙^{二}$以$二寅乙丙$約之。則其約得之式為$\frac{二寅乙丙}{三甲乙^{二}}$　有時遇此種式。更可約之。使為簡式者。詳見約分款中。

三例　若法為多項之式者。則其除法有三步。（猶言有三番功夫也）　一先將其法實之各項。任以一箇元數為主。按其方指數之大小。挨次序列之。　二將法之首項約

其實之首項為商得之式并定其正負之號如公法再將商得式乘其全法以減原實如適能減盡則商得之式即為約得之全式而第三步功夫可省如減實不能適盡則必以餘實再為新實用第三步之法求之　三將法之首項約新實之首項為二次商得式並定其正負亦如第二步法乃以此次商得之式記于前次商得式之右再將此次商得式乘其全法以減新實若仍有餘實則仍為新實如法求之至減實適盡而止則所得之各商式即為約得之全式若求至數次覺實數終不能減盡則可依下款之法書之

如有式八甲^{二}丄二甲乙丅一五乙^{二}以二甲丄三乙約之準本款第三例得四甲丅五乙為約得式其算草如下

法　　　　實　　　　　　　　得

二甲丄三乙）八甲^{二}丄二甲乙丅一五乙^{二}（四甲丅五乙

八甲^{二}丄一二甲乙

丅一〇甲乙丅一五乙^{二}

丅一〇甲乙丅一五乙^{二}

解曰前草中之法實各項均以甲之方數自大而小排列之先將法之首項二甲約實之首項八甲^{二}得四甲為商得之首項式乃以此式乘其法得八甲^{二}丄一二甲乙以減實得餘式

$丅一〇甲乙丅一五乙^{二}$為新實。再以法之首項$二甲$約新實之首項$丅一〇甲乙$得$丅五乙$為商得之次項式。乃以此式乘其原法。得$丅一〇甲乙丅一五乙^{二}$以減新實。適盡。故併一二兩次之商得式。得$四甲丅五乙$為約得式之全式。

茲更設四草于後。以明多項式之除法。

一式　設有$三甲^{三}丅一二甲^{二}丅甲^{二}乙丄一〇甲乙丅二乙^{二}$以$三甲丅乙$約之。得$甲^{二}丅四甲丄二乙$其算草如下。

法　實　得

$三甲丅乙)\ 三甲^{三}丅一二甲^{二}丅甲^{二}乙丄一〇甲乙丅二乙^{二}\ (甲^{二}丅四甲丄二乙$

$三甲^{三}\qquad 丅甲^{二}乙$

$丅一二甲^{二}丄一〇甲乙丅二乙^{二}$

$丅一二甲^{二}丄四甲乙$

$丄六甲乙丅二乙^{二}$

$丄六甲乙丅二乙^{二}$

二式　設有$甲^{三}丄乙^{三}$以$甲丄乙$約之。得$甲^{二}丅甲乙丄乙^{二}$其算草如下。

法　實　得

$甲丄乙)\ 甲^{三}丄乙^{三}\ (甲^{二}丅甲乙丄乙^{二}$

$甲^{三}丄甲^{二}乙$

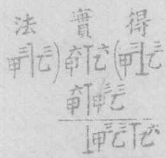
$丅甲^{二}乙丄乙^{三}$

$丅甲^{二}乙丅甲乙^{二}$

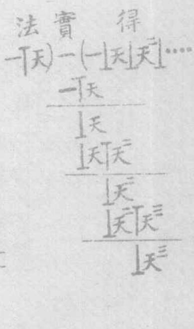
$丄甲乙^{二}丄乙^{三}$

$丄甲乙^{二}丄乙^{三}$

三式　設有$\text{甲}^{6}-\text{乙}^{6}$以$\text{甲}^{3}-\text{乙}^{3}$約之得$\text{甲}^{3}+\text{乙}^{3}$其算草如下



四式　設有$1-\text{天}$以約一得$1+\text{天}+\text{天}^{2}+\cdots$其算草如下



第十四款

有時以法除實任求至多項終不能盡則記其約得之式有二法

一法　可以無窮之級數式書之因觀其數項而其後之各項可類推而知之故也

如前款之第四式其約得之式書之為$1+\text{天}+\text{天}^{2}+\cdots$是以無窮級數式記之也

二法　可以照算學之理命其不盡之式為分子而以原法為分母作約得式之末項

代數術卷二原款下同

如前款之第四式。其約得之式可作 $一丄天丄天^{二}丄\frac{一丅天}{天^{三}}$ 是也。

除法之理。不必細解。可以數語明之。

試以約得之式與法之各項。一一相乘。乃從原實之式中。一一減去其乘得之各項。必適盡無餘。則所得之式。必為法約實之式。可以了無疑義矣。

論諸分法

第十五款

代數之除法。或有法大于實。或有實式中之倍數及元非法所能約者。則其除約之式。必以分數之法書之。其所代之數。乃易推。

如有分數式 $\frac{七}{五}$ 則此式之意。如以單數一。平分之為七分。而取其五分。又如以五乘一。乃以乘得之數。平分為七分。而取其一分。

第十六款

凡分數之式。上為法。下為實。法即分母。實即分子。

如 $\frac{乙}{甲}$ 即乙為分母。甲為分子。

第十七款