# 张量分析

（附习题与解答）

山東师范大学物理系编印

一九八三年五月

# 目录

## 第一章 张量代数



## 第二章 线元

## 第三章 笛卡儿张量



## 第四章 协变微分

## 第五章　测地线—平行性



## 第六章　曲线张量

# 第一章 张量代数

## §1. 引言

早在 Ganso、Riemann 和 Christoffel 等人研究微分几何过程中就建立了张量的概念，而张量分析（或称绝对微分学）作为数学中一个有系统的分支的出现应归功于 Ricci 和他的学生 Levi-Civita。他们合作撰写的有关这方面的第一篇学术论文《绝对微分运标及其应用》发表在《数学杂志》（Math. Ann.），1901 年 54 卷 125 页。这种绝对的（就是同坐标系无关的）微分运标方法，可以赋予数学物理的微分方程以不变的形式。

张量分析的主要目的是研究那些在坐标变换下仍保持有效的关系。物理定律不依赖于我们选取的参考系，因此，利用张量分析作为表达物理定律的数学基础是十分方便的了。特别是 Einstein 发现张量分析是表达广义相对论的优美工具。因此，要想了解爱因斯坦的广义相对论，就必须掌握张量分析。目前，张量分析在理论物理学中已广泛地应用。

## §2. N维空间

一组 N 个变量 $x^1, x^2, \cdots x^i, \cdots x^N$，称为一个点。（附标 $1, 2, \cdots i, \cdots N$ 称为"上标"，它只是一个"标签"不是指数！，以后我们还引用 $a_i$ 这种量，其中 $i$ 称为"下标"，也只作"标签"用）。这些变量称为点的坐标。于是对应于坐标全部数值的点称为形成了一个 N 维空间，用 $V_N$ 表示。可以把其些坐标或全部坐标限制在某个范围内变化以保证坐标集能与 $V_N$ 中的点一一对应。例如，在平面上的极坐标（$r, \theta$），其变化范围是 $0 \leq \theta < 2\pi$，及 $0 \leq r < \infty$，以保证平面上每一个点与（$r, \theta$）的值一一对应。

在$V_N$中的曲线定义为满足N个方程式的点的轨迹：

$$x^i = x^i(u) \qquad (i=1, 2, \cdots N)$$

其中u是参数。$x^i(u)$是N个u的函数，它们满足某些连续条件。一般说来，要求它有任何阶导数。

$V_N$的子空间定义为满足下列N个方程式的点集（M < N）

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \cdots u^M), \quad (i=1, 2, \cdots N)$$

其中有M个参数$u^1, u^2, \cdots u^M$。$x^i(u^1, u^2, \cdots u^M)$是N个$u^1, u^2, \cdots u^M$的函数，它满足某些连续条件。

此外，由偏导数$\frac{\partial x^i}{\partial u^j}$构成的M×N矩阵假定是M秩的。即，下列矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^M} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial u^M} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial x^N}{\partial u^1} & \frac{\partial x^N}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^N}{\partial u^M} \end{pmatrix}$$

中，至少有某一个M阶行列式不等于零。如果M = N − 1，这个子空间称为超曲面。

## §3 坐标变换

考察有坐标系$x^1, x^2, \cdots x^N$的空间$V_N$。若存在N个方程式。

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \cdots x^N), \quad (i=1, 2, \cdots N) \quad (3.1)$$

其中$\varphi^i$是坐标的单值连续可微函数。那么，这N个方程式定义了一个新坐标系$\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots \bar{x}^N$。而（3.1）式称为定义一个坐标变换。这里，N个函数$\varphi^i$是独立的。其充要条件为：由偏导数$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$所构成的雅可比行列式不为零。即

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^N} \\
\vdots & & & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & \vdots \\
\frac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^N}
\end{vmatrix} \neq 0。
$$

在这种情况下，从（3.1）式可解出 $x^i$ 来，于是

$$x^i=\psi^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots \bar{x}^N) \qquad (i=1, 2, \cdots N)$$

## §4 附标与求和约定

今引进下列两个约定：

（1）除非特别声明，上或下的拉丁字母附标都是取从 1 至 N 全部数值的。这样，（3.1）式就简单地写为

$$\bar{x}^i=\varphi^i(x^1, x^2, \cdots x^N)。$$

约定告诉我们，这里有 N 个方程式。

（2）如果某一项中拉丁字母附标出现两次，那么，这意味着对这附标求和。除非有相反的声明。于是用 $a_i x^i$ 代替了表达式 $\sum_{i=1}^{N} a_i x^i$．

现在微分（3.1）式得

$$d\bar{x}^i=\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^r}dx^r=\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}dx^r, \quad (i=1, 2, \cdots N)$$

可简写为

$$d\bar{x}^i=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}dx^r. \qquad (4.1)$$

在一项中出现两次的附标 r 称为傀标．它可以用其他任何拉丁字母附标代替，但在（4.1）式中不能用 i 。就是说（4.1）式可写成 $d\bar{x}^i=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}dx^m$．为了避免混淆，在每一项中决不可对一个附标使用两次以上．例如，$(\sum_{i=1}^{N} a_i x^i)^2$ 不要写成

$a_i x^i a_i x^i$，而应写为 $a_i x^i a_j x^j = a_i a_j x^i x^j$。通常加用括号表示幂。于是 $(x^N)^2$ 表示 $x^N$ 的平方。

引进克罗内克（Kronecker）符号 $\delta_j^k$：

$$\begin{cases} \delta_j^k = 1 & 若\ j = k \\ \delta_j^k = 0 & 若\ j \neq k \end{cases} \tag{4.2}$$

这样，$\delta_j^k A^j = A^k$。同理，由于坐标 $x^i$ 是独立的，那么 $\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_j^k$。

## §5. 逆变矢量

一组坐标 $x^i$ 的函数 $A^i$，当坐标 $x^i$ 变换到 $\bar{x}^i$ 时，如果它们按下列方式

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \tag{5.1}$$

变换。那么，这 $N$ 个函数 $A^i$ 称为是一个逆变矢量的分量。（用上附标表示逆变特征）。就是说，任何 $N$ 个函数都可以选作在坐标系 $x^i$ 中的一个逆变矢量的分量，而且该矢量在新坐标系 $\bar{x}^i$ 中的 $N$ 个分量是由（5.1）式定义。

用 $\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}$ 乘（5.1）式，并对附标 $i$ 求和，得

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \bar{A}^i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} A^j = \delta_j^k A^j = A^k$$

所以（5.1）式的解为

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \bar{A}^i \tag{5.2}$$

考察（4.1）式 $d\bar{x}^i = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} dx^r$，我们看到，微分 $dx^i$ 构成一个逆变矢量的分量，在任何其他系统中，这逆变矢量的分量是那系统的微分 $d\bar{x}^i$。于是立即得出 $\dfrac{dx^i}{du}$ 也是一个逆变矢量，称为曲线 $x^i = x^i(u)$ 的切线矢量。

今再进行一次坐标变换 $x'^i = g^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots \bar{x}^N)$。于是新分量 $A'^i$ 为

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial \bar{x}^j}\bar{A}_j = \frac{\partial x'^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}A^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}A^k。$$

这方程与（5.1）式具有相同的形式，也就是说，这是逆变矢量分量的变换规律。

从群论得知，如果有一变换集合，若相继作任何两个变换所得到的变换仍属于这变换集合中的一个变换，则称变换集合构成一个群（群性）。这样，逆变矢量的变换构成一个群。

除坐标 $x^i$ 外，单个的上附标总是表示逆变矢量的。值得注意的是：坐标 $x^i$ 的变换规律只是对形如 $\bar{x}^i = a^i_j x^j$（其中 $a^i_j$ 是 $N^2$ 个常数集）的线性变换才满足逆变矢量分量的变换规律（5.1）式。因为在这种情况下，$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = a^i_j$，而变换可写成 $\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}x^j$。但在一般坐标变换下，$x^i$ 不再构成一个逆变矢量的分量了。实际上，就是说，如果我们在坐标系 $x^i$ 中选取 $A^i = x^i$，那么，在坐标系 $\bar{x}^i$ 中新的分量 $\bar{A}^i$ 便不满足 $\bar{A}^i = \bar{x}^i$。

## §6 协变矢量

一组坐标 $x^i$ 的函数 $A_i$，当坐标 $x^i$ 变换到 $\bar{x}^i$ 时，如果它们按下列方式

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}A_j \qquad (6.1)$$

变换，那么，这 $N$ 个函数 $A_i$ 称为是一个协变矢量的分量（用下附标表示协变特征）。就是说，任何 $N$ 个函数都可以看作是在坐标系 $x^i$ 中的一个协变矢量的分量，而（6.1）式却定义该协变矢量在新坐标系 $\bar{x}^i$ 中的 $N$ 个分量。

用 $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$ 乘（6.1）式，并对 $i$ 附标求和，得

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\bar{A}_i=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}A_j=\frac{\partial x^j}{\partial x^k}A_j=\delta^j_k A_j=A_k \qquad (6.2)$$

于是， $A_k=\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\bar{A}_i$

由于 $\dfrac{\partial I}{\partial \bar{x}^i}=\dfrac{\partial I}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$，由(6.1)式得知，当 $\dfrac{\partial I}{\partial x^i}$ 是一个协变矢量的分量，它的分量在任何其他坐标系中是对应的偏导数 $\dfrac{\partial I}{\partial \bar{x}^i}$。这样的一个协变矢量称为I的梯度。

由于单个的下附标总是表示协变矢量。按照这个约定，我们把协变矢量 $\dfrac{\partial I}{\partial x^i}$ 中的附标 $i$ 看作下附标。

若我们局限于下列形式的变换（正交变换）

$$\bar{x}^i=a^i_m x^m \qquad (6.3)$$

$a^i_m$ 是常数（无需构成一个张量）满足下列关系（正交变换条件）：

$$a^i_r a^i_m=\delta^r_m \qquad (6.4)$$

用 $a^i_r$ 乘(6.3)式，并求和，得

$$a^i_r\bar{x}^i=a^i_r a^i_m x^m=\delta^r_m x^m$$

$$\therefore \quad x^r=a^i_r\bar{x}^i$$

于是

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}=a^i_j=\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \qquad (6.5)$$

---

(6.5)式表明在正交变换下(5.1)式和(6.1)式是同样类型的实体。就是说，在正交变换下，逆变矢量与协变矢量就没有区别了。

## §7 不变量

任何一个坐标 $x^i$ 的函数I，在坐标变换下，如果 $I=\bar{I}$，其中 $\bar{I}$ 是函数I在新坐标系 $\bar{x}^i$ 中的值。那么，I称为一个对

坐标变换来说的不变量或标量。

由逆变矢量 $A^i$ 和协变矢量 $B_i$ 的分量，我们可以构成 $A^iB_i$。当变换到新坐标系 $\bar{x}^i$ 时，它变成 $\bar{A}^i\bar{B}_i$。因为

$$\bar{A}^i\bar{B}_i=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}A^j\cdot\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}B_k=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}A^jB_k=\delta_j^kA^jB_k=A^kB_k。$$

所以，
$$\bar{A}^i\bar{B}_i=A^iB_i$$
于是 $A^iB_i$ 是一个不变量。

另一个不变量是 $\delta_i^i$：

$$\delta_i^i=\delta_1^1+\delta_2^2+\cdots+\delta_N^N=N。$$

## §8 二阶张量

我们用两个逆变矢量的分量 $B^i$ 和 $C^j$ 构成 $N^2$ 个量 $A^{ij}==B^iC^j$. 根据（5.1）式，$A^{ij}$ 按下列方式变换

$$\bar{A}^{ij}=\bar{B}^i\bar{C}^j=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}B^k\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}C^l=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}B^kC^l$$
$$=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}A^{kl}$$

$$\therefore\quad \bar{A}^{ij}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}A^{kl}\qquad(8.1)$$

更普遍地说，如果有 $N^2$ 个函数 $A^{ij}$，其变换规律为（8.1）式，则称 $A^{ij}$ 为二阶逆变张量的分量。这张量不必要是两个逆变矢量的分量的乘积。任何一组 $N^2$ 个函数都可以选为一个二阶逆变张量的分量，并且由（8.1）式定义该张量在任何其他坐标系 $\bar{x}^i$ 中的分量。

此外，如果有 $N^2$ 个函数 $A_{ij}$，其变换规律为

$$\bar{A}_{ij}=\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}A_{kl}\qquad(8.2)$$

于是称 $A_{ij}$ 为二阶协变张量的分量。

类似地，若有 $N^2$ 个函数 $A_j^i$，其变换规律为

$$\bar{A}^i_j=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}A^k_l \qquad (8.3)$$

于是称 $A^i_j$ 为二阶混合张量的分量。

注意：张量中的上附标表示逆变，而下附标表示协变。例如：混合张量 $A^i_j$ 对附标 $i$ 如逆变矢量一样变换，而对下附标 $j$ 却象协变矢量变换，所以附标 $i$ 放置在上方，而附标 $j$ 放置在下方。

$$\bar{\delta}^i_j=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\delta^k_l=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j}=\delta^i_j$$

所以，克罗内克符号 $\delta^k_l$ 是一个二阶混合张量，其分量在任何其他坐标系中也构成克罗内克符号。这正好说明把其中一个附标作为上附标，而另一个作为下附标的写法是正确的。

如果一个张量的分量从一个坐标系过渡到另一个坐标系时不变，则这个张量称为不变的。这样，克罗内克符号 $\delta^k_l$ 就是一个二阶混合不变张量。

然而，如果我们选取 $N^2$ 个量 $\delta_{ij}=\delta^i_j$ 作为在坐标系 $x^i$ 中一个二阶协变张量的分量。那么，在新坐标系 $\bar{x}^i$ 中，其分量的变换规律为

$$\bar{\delta}_{ij}=\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\delta_{kl}=\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\delta^k_l=\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}$$

所以变换后的分量不再构成克罗内克符号了。

但是如果变换是正交变换，由于正交变换，$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$（参攷：（6.5）式），于是

$$\bar{\delta}_{ij}=\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}=\delta^i_j$$

这样 $\bar{\delta}_{ij}$ 又是克罗内克符号了。因此，在正交变换下，克罗内克符号也可写成 $\delta_{ij}$，它是一个二阶不变张量。

## §9 高阶张量

一组坐标 $x^i$ 的函数 $A^{i_1 i_2\cdots i_s}_{j_1 j_2\cdots j_p}$（共 $N^{s+p}$ 个），如果当

坐标作 $x^i$ 到 $\bar{x}^i$ 变换时，它们按下列规律变换：

$$\bar{A}^{u_1 u_2 \cdots u_s}_{r_1 r_2 \cdots r_p} = \frac{\partial \bar{x}^{u_1}}{\partial x^{t_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{u_s}}{\partial x^{t_s}} \frac{\partial x^{g_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{g_p}}{\partial \bar{x}^{r_p}} A^{t_1 t_2 \cdots t_s}_{g_1 g_2 \cdots g_p}, \quad (9.1)$$

则称 $A^{t_1 t_2 \cdots t_s}_{g_1 g_2 \cdots g_p}$ 为一个（$s+p$）阶混合张量的分量，它是 $s$ 阶逆变和 $p$ 阶协变的。其实，（9.1）式不过是（5.1）式和（6.1）式的组合而已。

张量中的附标顺序是很重要的。张量 $A^{ij}$ 与张量 $A^{ji}$ 不必相同（用矩阵的术语来说，$A^{ji}$ 是 $A^{ij}$ 的转置）。然而，如果两个逆变附标或两个协变附标交换而不改变张量的话，称这张量对这两个附标是对称的。现在证明：如果一个张量在任一坐标系中对两个附标来说是对称的，那么，在其他任何坐标系中它对这两个附标来说仍保持对称。用逆变张量 $A^{ij}=A^{ji}$ 为例来证明这性质而不失其普遍性。利用（8.1）式得：（由于 $A^{kl}=A^{lk}$）

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^{lk} = \bar{A}^{ji} \quad (9.2)$$

可是通常我们不能定义一个表示逆变的而另一个表示协变的附标的对称性。因为在坐标变换后可能保持不了这种对称性。例如，若 $A^k_l = A^l_k$ 通过坐标变换得

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^k_l = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^l_k$$

而

$$\bar{A}^j_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A^l_k$$

所以，一般说来

$$\bar{A}^i_j \neq \bar{A}^j_i。$$

但是，克罗内克符号 $\delta^i_j$ 是一个混合张量，它却对两个附标具有对称性。

因为 若 $\delta^i_j = \delta^j_i$ 则

$$\bar{\delta}_j^{\ i}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}\delta_l^{\ k}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}=\delta_j^{\ i}$$

而

$$\bar{\delta}_i^{\ j}=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^i}\delta_k^{\ l}=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^i}\delta_l^{\ k}=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial\bar{x}^i}=\delta_i^{\ j}=\delta_j^{\ i}$$

$$\therefore\quad \bar{\delta}_j^{\ i}=\delta_i^{\ j}$$

若在一个逆变或协变张量中，全部附标可以互换而张量不改变，称为对称张量。一个二阶对称张量最多有 $\frac{N^2-N}{2}+N=\frac{1}{2}N(N+1)$ 个不同的分量。

若两个逆变附标或两个协变附标互换时，张量的每个分量只改变符号，而不改变其量值的张量称对这些附标是反对称的。用类似于（9.2）式的方程组，可以证明：反对称的性质与坐标选择无关（参看习题（8））。与对称的情况相同，反对称不能对一个逆变附标和另一个协变附标定义。

若一个逆变张量或协变张量的全部附标可以互换，但当每对附标交换时而张量却改变其符号，则这张量称为是反对称的。二阶反对称张量 $A^{ij}$ 最多有 $\frac{N^2-N}{2}=\frac{1}{2}N(N-1)$ 个数术上互异的分量，而全部 $A^{ii}$（$i$ 不求和！）分量为零。

$N$ 维空间的 $N$ 阶反对称张量的各分量或者等于零或者只是差了一个符号。例如，反对称 $N$ 阶张量 $A^{t_1t_2\cdots t_N}$，因为若两个附标相同时，这分量等于零；不为零的分量可以通过每次置换差一个符号从一个分量可得到另一个分量。所以实质上这样一个张量只有一个非零分量。例如，$N=2$ 的二阶逆变张量，其分量为 $A^{11}=A^{22}=0$，$A^{12}=-A^{21}$。

从（9.1）式得到最重要的结论是：如果一个张量全部分量在某坐标系中均为零，则在这一点处，它们在每一个坐标系中都为零。

而且，如果张量的分量在某个坐标系中恒等于零，则它们

在每个坐标系中都恒等于零，所以一个自然定律如果用"张量的全部分量都等于零的"的方式表示，则这个定律就是广义协变的。因此张量分析在物理学中有广泛的应用。

如果在曲线或整个空间 $V_N$ 全部点上定义一个张量，我们就说形成一个张量场。

## §10 张量的加法、减法和乘法

很清楚，我们不可能希望给（$A^{ij}+B^{i}$）这式子的任何张量的意义。因为它不满足（9.1）式的变换规律。然而从（9.1）式得知：任何具有不变量系数的同类型张量的任何线性组合都是一个同类型的张量，例如从两个张量 $A^{i}_{jk}$ 和 $B^{i}_{jk}$，我们可以得到 $\lambda A^{i}_{jk}+\mu B^{i}_{jk}$；如果 $\lambda$ 和 $\mu$ 是不变量，它们满足（9.1）式的，即

$$(\lambda \bar{A}^{l}_{mn}+\mu \bar{B}^{l}_{mn})=\frac{\partial \bar{x}^{l}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{m}}\frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{n}}(\lambda A^{i}_{jk}+\mu B^{i}_{jk})$$

特别是 $A^{i}_{jk}+B^{i}_{jk}$ 和 $A^{i}_{jk}-B^{i}_{jk}$ 分别称为两个张量的和与差。另一个例子，我们可以把 $A_{ij}$ 写作

$$A_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})+\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji})$$

其中（$A_{ij}+A_{ji}$）是对称的，而（$A_{ij}-A_{ji}$）是反对称的。于是任意二阶协变张量是一个对称张量与一个反对称张量之和。当然，这结论对二阶逆变张量也成立。

今选择两个张量，一个是 $S$ 阶逆变、$p$ 阶协变的张量而另一个是 $t$ 阶逆变、$g$ 阶协变的张量。于是从（9.1）式得知，其分量之积构成一个（$S+t$）阶逆变、（$p+g$）阶协变的混合张量。这张量称为两个张量的外积。例如 $A_{ir}$ 与 $B^{k}_{j}$ 的外积 $C^{k}_{irj}=A_{ir}B^{k}_{j}$ 是一个张量，并且是一个如附标表示的类型的张量，即，一阶逆变、三阶协变的混合张量。因为

$$\bar{C}^{m}_{lpn}=\bar{A}_{lp}\bar{B}^{m}_{n}=\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{l}}\frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{p}}\frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{n}}A_{ir}B^{k}_{j}=$$

$$=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}C_{irj}^{k}$$

$$\therefore\quad \bar{C}_{lpn}^{m}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}C_{irj}^{k}$$

在通常的意义下，一个张量除另一个张量是没有定义的。

## §11 缩并

我们从任一混合张量 $A_{lmn}^{ij}$ 出发得到 $A_{lmj}^{ij}$ 详细写出：

$A_{lmj}^{ij}=A_{lm1}^{i1}+A_{lm2}^{i2}+\cdots+A_{lmN}^{iN}$（$N$ 不求和！）从（9.1）式得

$$\bar{A}_{pqr}^{st}=\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^j}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^r}A_{lmn}^{ij}$$

所以

$$\bar{A}_{pqr}^{sr}=\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^r}A_{lmn}^{ij}$$

$$=\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q}\delta_j^n A_{lmn}^{ij}$$

$$=\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q}A_{lmn}^{in}.$$

于是我们看出 $A_{lmj}^{ij}$ 是一阶逆变、二阶协变的混合张量。这过程称为缩并，它使我们能够从一个 $r$ 阶的混合张量得到一个 $(r-2)$ 阶张量。在这个例子中，我们还可以进一步把这张量缩并而得到一个协变矢量 $A_{lij}^{ij}$。缩并时，任何一对上附标与下附标都可缩并，因此通过缩并可以得到下列不同的张量：$A_{lmj}^{ij}$，$A_{ljn}^{ij}$，$A_{jmn}^{ij}$，$A_{lmi}^{ij}$，$A_{lim}^{ij}$，$A_{imn}^{ij}$，$A_{lij}^{ij}$，$A_{lji}^{ij}$，$A_{imj}^{ij}$，$A_{jmi}^{ij}$，$A_{ijn}^{ij}$ 和 $A_{jin}^{ij}$。当然，如果张量 $A_{lmn}^{ij}$ 具有任何对称性质，那么，通过缩并会得到较少些不同的张量。另一个例子，$A_i^i$ 是不变量。它可以从混合张量 $A_j^i$ 缩并得到。这就是为什么把一个不变量称为零阶张量的理由。

也可以把乘法和缩并结合起来产生新的张量。例如，从$A_k^{ij}$和$B_{mnt}^{l}$，可以得到这样的张量，如$A_k^{ij}B_{mnt}^{k}$、$A_k^{ij}B_{inj}^{l}$等等。这种过程称为两个张量的内积。例如，$A^iB_i$（不变量）为两个矢量的内积，而$A^iB_j$为两个矢量的外积。

特别要注意的是，决不能把两个同型附标缩并。因为这样缩并的结果不是必然是张量。例如$A_{kjj}^{i}$不是张量。现在应该清楚，用我们附标记法，求和约定一般只能用于一个是上附标而另一个是下附标。

## §12 商律

有时候我们需要判定一组函数是否构成一个张量的分量。直接方法要求我们查明它们是否满足（9·1）式的张量变换规律。然而，实际上这是很麻烦的，而商律却提供了较简单的检验方法。

众所周知，物理定律中各项都应有相同的量纲。正如猜测某些在物理方程式中的新物理量的量纲一样，我们可以猜测一个表达式的逆变和协变"量纲"。例如，方程式

$$A(ij)\ B_{jk}=C_{ik}$$

其中$A(ij)$的性质开始时是不知道的。然而一看就知道$A(ij)$必然是$A_i^j$特性的张量，这样给出

$$A_i^jB_{jk}=C_{ik}$$

才能使两边保持协变"量纲""平衡"。所以，上式象征地可以写成

$$A(ij)=\frac{C_{ik}}{B_{jk}}$$

所以象征地两个张量的商也是一个张量。当然，这里所说的决不是普通的除法。

商律：有$N^p$个$x^i$的函数，假如这些函数与任意一个张量的内积是一个张量的话，那么，这$N^p$个函数便构成一个$p$