

81001

外籍专家讲学讲稿

(一)

偏微分方程的反問題它的 數值解和实际应用

贈閱

請交換

中山大学图书馆

中山大学 科技资料情报科
计算机科学系

一九八一年六月·广州

前 言

本讲稿是美国 STONY BROOK, NEW YORK 大学应用数学和统计学系教授陈永明 (Y. M. Chen) 博士在我校讲学时根据讲稿翻译的。由我校计算机科学系黎罗罗、褚晋次、董云庭同志负责翻译。

本稿未经本人审阅，欠妥之处，请指正。

中山大学计算机科学系

1981. 6.

偏微分方程的反问题
它的数值解和实际应用

纽约州立大学应用数学和统计学系

陈永明教授

中山大学科技资料情报科

一九八一年六月

偏微分方程的反问题它的数值解和实际应用^{*}

Y. M. Chen. 陈永明

纽约州立大学应用数学和统计学系

Stony Brook, New York 11794, U.S.A.

目录

正问题和实例

反问题和实例 —— 遥感技术和工程设计问题

脉冲 - 光谱技术 —— A) 实验装置

B) 数据处理

C) 迭代算法

数据模拟

波动方程的反问题

解第一型 Fredholm 积分方程的 Backus - Gilbert 方法。

扩散方程的反问题

解第一型 Fredholm 积分方程的 (Phillips - Tikhonov)

正则化方法

解第一型 Fredholm 和分方程的 Moore - Penrose 广义逆方法

椭圆方程的反问题 —— 通矩阵问题直接方法和迭代方法

正问题

考虑下面的拟线性二阶偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^3 \sum_{k=1}^m a_{i,j,k} (\partial \bar{u} / \partial x_i, \bar{u}, \bar{x}, t) \partial^2 \bar{u} / \partial x_i \partial x_j + \phi_s (\partial \bar{u} / \partial x_s, \bar{u}, \bar{x}, t)$$

* 中山大学计算机科学系黎罗宾、褚启洪、董云庭译 (1981.6)

$$= b_s(\vec{x}, t) \partial^2 u_s / \partial t^2 + c_s(\vec{x}, t) \partial u_s / \partial t$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$i, j, q = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2, \dots, m$$

其中 $\vec{x}$ 是三维欧氏空间 E_3 的向量, Ω 是 E_3 的一个有界域, Q 为 $\Omega \times [0, T]$ 是有界域, T 是一任意的正数. $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界, $\Gamma = \partial\Omega \times [0, T]$, 而 Ω_0 是 Ω 的内部区域. 为了完备上述方程组, 也包含有边界条件

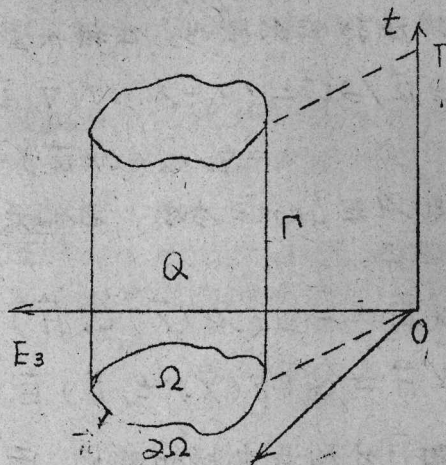
$$\vec{B}(\vec{u}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}}) = \vec{f}(\vec{x}, t),$$

$$\vec{x}, t \in \Gamma.$$

和初始条件

$$\vec{u} = \vec{g}(\vec{x}), \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{h}(\vec{x}),$$

$$\vec{x} \in \Omega_0.$$



上述偏微分方程的正问题是由给出了确定的 a_{ijk} , ϕ_s , b_s , $\vec{f}$, $\vec{g}$ 和 $\vec{h}$ 的上述方程组求其解 $\vec{u}(\vec{x}, t)$. 从数学角度来说, 解 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 在给定的条件下假定是存在的, 唯一性和稳定的. 给出上述偏微分方程组的一些物理学的例子, 如

流体力学:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\rho^{-1} \nabla p + (\eta/\rho) \nabla^2 \vec{u}$$

(Navier-Stokes 方程或运动方程)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

(连续性方程)

$$p = f(\rho, s)$$

(状态方程)

这里 $\vec{v}$ 是速度矢量, ρ 是密度, p 是压力, s 是熵而 η 是粘度系数.

固体力学:

$$\rho \partial^2 v_j / \partial t^2 + \sum_{j=1}^3 \rho v_j \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \partial \sigma_{ij} / \partial x_j + X_j$$

$$j = 1, 2, 3.$$

(运动方程)

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(\vec{x}, t, e_{kl}) e_{kl},$$

(应力和应变关系)

$$v_j = \partial u_j / \partial t + \sum_{j=1}^3 u_j \partial u_j / \partial x_j,$$

其中 ρ 是密度, $\vec{v}$ 是速度矢量, $\vec{u}$ 是位移矢量. σ_{ij} 是应力张量, e_{ij} 是应变张量, x_j 是体力.

在线性弹性的情形, 位移矢量满足

$$\rho \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} + \nabla \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{u}) + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \vec{u}$$

这里 λ 和 μ 是 Lamé 参数, 它们是 $\vec{x}$ 和 t 的函数

电磁学:

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial(\mu(\vec{x}, t, \vec{H}) \vec{H}) / \partial t$$

(麦克斯韦方程)

$$\nabla \times \vec{H} = \partial(\epsilon(\vec{x}, t, \vec{E}) \vec{E}) / \partial t$$

其中 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 分别是电场和磁场, 而 μ 和 ϵ 分别是磁导率和介电常数, 热传导:

$$\rho C \partial T / \partial t + \sum_{j=1}^3 v_j \partial T / \partial x_j - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \partial(k_{ij}(\vec{x}, t, T) \partial T / \partial x_j) / \partial x_i = f(\vec{x}, t)$$

$$\partial T / \partial x_j) / \partial x_j = f(\vec{x}, t)$$

其中 ρ 是密度, C 是比热, k_{ij} 是热传导张量的分量, 而 v_j 是运动介质的速度的分量, T 是温度.

量子力学:

$$i\hbar \partial \psi / \partial t = -(\hbar^2 / 2\mu) \nabla^2 \psi + V(\vec{x}) \psi,$$

(Schrödinger 方程)

这里 $\hbar$ 是 Planck 常数, μ 是粒子质量而 ψ 是在一个外场中单个粒子的波函数.

辐射传播:

$$\mu \rho^{-1}(x) K_V'(x, \nu) dI_V(x, \mu, \nu) / dx = I_V(x, \mu, \nu) - 2h\nu^3 c^{-2} (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1},$$

(对于局部热力学平衡的一维辐射传播方程)

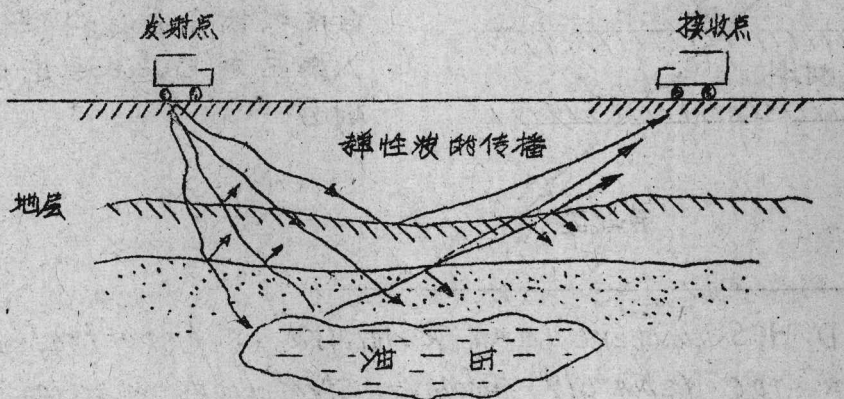
这里 h 是 Planck 常数, K 是 Boltzmann 常数, $K_\nu(x, \nu)$ 是质量吸收系数, ν 是频率, I_ν 是辐射强度率, ρ 是物质的密度, n 是折射率而 T 是温度, c 是光速。

反问题

数学上, 上述偏微分方程组的反问题就是由方程组所给出的结构和 $\vec{u}$, $\frac{\partial \vec{u}}{\partial n}$ 在 $\partial \Omega$ 和 Γ 上的部份信息或完整信息, 来确定方程组的一个或多个或全部参数。

实际上, 反问题通常来自于遥感技术、工程设计或合成问题, 特别是遥感技术在科学技术中的许多分支中起十分重要的作用。下面将给出一些典型的例子:

1) 在地层物理勘探中由地震波的大小来推断地球结构¹⁾, 控制方程是弹性波方程, 已知一位移矢量和它在地球表面的法向导数, 未知一弹性参数;



2) 在激光所激发的等离子体的研究中由光谱大小来确定电子密度和它的空间分布²⁾。

1) J. F. Clearbout, *Analysis of Geophysical Data Processing With Applications to Petroleum Prospecting*, McGraw-Hill, New York, 1976

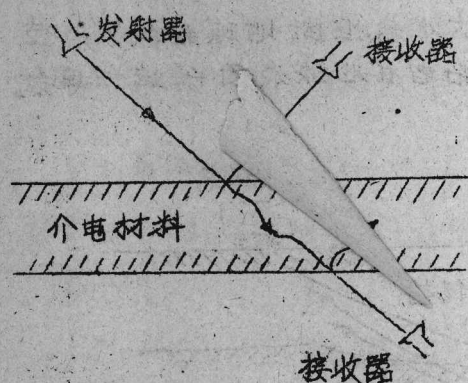
2) D. W. Sweeney, D. T. Attwood and L. W. Coleman, "Interferometric Reconstruction of Electronic Number Densities in Laser-Induced Plasmas", Conf. Image Processing for 2-D & 3-D Reconstruction from Projections: Theory & Practice in Medicine & Physical Sciences, Stanford University, Aug. 4-7, 1975

控制方程 — Maxwell 方程。

已知 — 热等离子体外部场入射和透射 $\vec{E}$, $\vec{H}$,
未知 — 热等离子体的介电常数



3) 由微波大小^{3), 4), 5)} 和合成问题⁶⁾ 来确定由介质不均匀性。



控制方程 — Maxwell 方程，已知 — 入射 $\vec{E}$ 和反射 (或透射) $\vec{H}$ ，未知 — 介电常数。这里时合成问题是指合成具有适当介电常数的介电材料使得在给定的入射 $\vec{E}$ 时也产生所需的反射或透射 $\vec{E}$

3) D. H. Schaubert and R. Mittra, "Aspectral domain method for remotely Probing Stratified media," IEEE Trans. Antennas and Propagation, AP-25, pp. 261-265, 1977.

4) D. S. Tsien and Y. M. Chen, "A pulse-Spectrum technique for remote Sensing of Stratified media", Radio Science, 13, PP 775-783, 1978

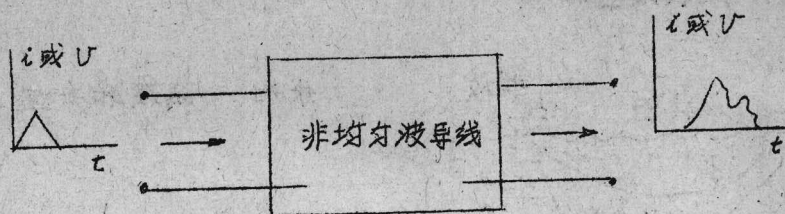
5) R. P. Hatcher and Y. M. Chen, "Numerical solutions of inverse Problems of nonlinear wave equation With the aid of regularization", in preparation.

6) V. B. Glasko, A. N. Tikhonov and A. V. Tikhonravov, "The Synthesis of multilayer coatings", Zh. Vychisl. Mat. Fiz. . 14, PP. 135-144, 1974

4) 在设计滤波器和脉冲电路时合成非均匀传输线。^{7) 8)}

控制方程—波导线方程*

已知—输入和输出的电流及电压(随时间或频率而变化)



未知— L , C 或 ε , 它们是 x 的函数。

5) 由表面温度的高低来获得非均匀材料的热传导系数^{9), 10)}



控制方程—热方程, 已知—表面温度和它的梯度或流量,
未知—热传导系数等。

$$* \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L(x, t) c(x, t) \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$= (L(x, t) G(x, t) + R(x, t) c(x, t) \frac{\partial i}{\partial t} + R(x, t) G(x, t) i$$

L 是单位长度的电感系数, C 是每单位长度的电容, R 是每单位长度的电阻而 G 是

7) D. S. Heim and C. B. Sharpe, "The syntheses of nonuniform lines of finite length—part I", IEEE Trans Circuit Theory, CI-14, PP. 394-403, 1967.

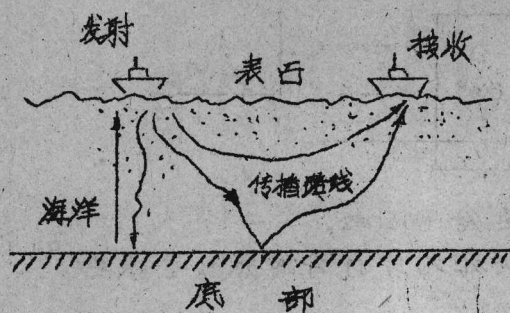
8) Y. M. Chen and X. T. Weng, "A numerical algorithm for the synthesis of nonuniform lines of finite length", in preparation.

9) J. R. Cannon and P. DuChateau, "An inverse problem for a nonlinear diffusion", SIAM J. Appl. Math., 39, PP 272-289, 1980.

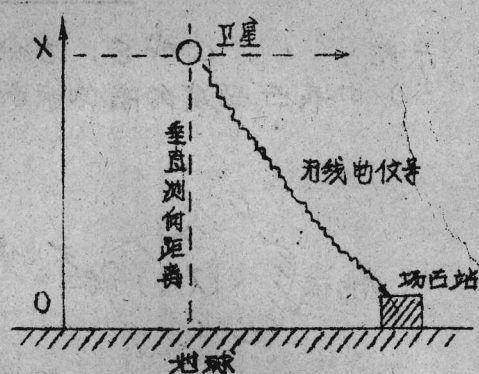
10) Y. M. Chen and J. Q. Liu, "A numerical algorithm for remote sensing of thermal conductivity", to appear.

6) 在物理海洋勘探中由表面声波的大小来推断海洋的结构^{5, 11)}
 控制方程—声波方程, (流体动力学中的压缩和非粘性方程的一种特殊情形)

已知—压力及其表面梯度



未知—深度和声速



7) 在卫星气象学中由卫星的红外辐射强度来获得地球大气温度的分布^{12) - 14)}

控制方程—可变换成第一型 Hammerstien 积分方程的辐射传

11) Y. M. Chen and D. S. Tsien, "A numerical algorithm for remote sensing of density profiles of a simple ocean model by acoustic pulses", J. Comput. Physics, 25, pp. 366-385, 1977

12) H. E. Fleming and W. L. Smith, "Inversion techniques for remote sensing of atmospheric temperature profiles", Proc. 5th Symposium on Temperature, Its Measurement and Control in Science and Industry, Wash., D. C. June, 1977.

13) B. J. Conrath and I. Revah, "A review of nonstatistical techniques for the estimation of vertical atmospheric structure from remote infrared measurements", proc. Workshop on Math. of Profiles Inversion, L. Colin. Ed., Ames Research Center, NASA, July, 1977.

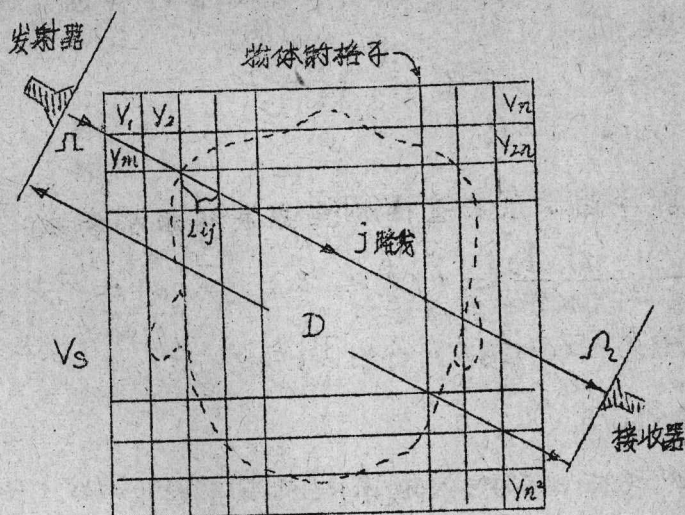
14) J. Surmont and Y. M. Chen, "Numerical Solutions of a nonlinear radiative transfer equation with inadequate data", J. Comput. Physics, 13, pp. 288-302, 1970

导方程。

已知——在大气层顶部某些气体，例如 CO_2 的幅射强度率。

未知——温度分布函数 $T(x)$

8) 在医疗诊断技术中由 X 射线或超声波得到的数据来确定人体器官结构 (15), (16)。



(a) 行进时间的测定，控制方程——行进时间方程，对于 j 路线，行进时间是

$$T_j = \sum_{i=1}^{N=n^2} (V_i^{-1} L_{ij}) + V_s^{-1} (D - \sum_{i=1}^{n^2} L_{ij}), \quad j=1, 2, \dots, M.$$

这里 V_i 为在第 i 个格子的声速， V_s 为所考察的对象的格子外的声速， L_{ij} 为 j 路线在第 i 个格子中的长度， D 为总距离。

已知—— T_j ， L_{ij} ， V_s 和 D ， $i=1, 2, \dots, n^2$ ， $j=1, 2, \dots, M$ 。

未知—— V_i 或 V_i^{-1} ， $i=1, 2, \dots, n^2$ ，它们可由下面的线性方程

15) J. F. Greenleaf, S. A. Johnson, W. F. Samayoa and F. A. Duck, "Reconstruction of spatial distributions of retraction indices in tissue from time of flight profiles", in the same proceeding as that of Ref. 2.

16) L. A. Shepp and B. F. Logan, "Reconstructing interior head tissue from X-ray transmissions", IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-21, pp 228-236, 1974

继续得:

$$\sum_{i=1}^{n^2} V_i^{-1} L_{ij} = T_{ij} - V_s^{-1} (D - \sum_{ij}^{n^2} L_{ij}), \quad j=1, 2, \dots, M.$$

(b) 链度的测定, 控制方程 — $P_j = \int_{L_j} f(x, y) ds \quad j=1, 2, \dots, M,$

这里 P_j 为沿 j 路线的链度, L_j 为第 j 条传播路线而 $f(x, y)$ 为在 (x, y) 的阻尼系数。

已知 — $P_j, L_j, j=1, 2, \dots, M,$

未知 — $f(x, y);$

9) 在系统识别中由状态矢量的测量来获得系统参数¹⁷⁾,

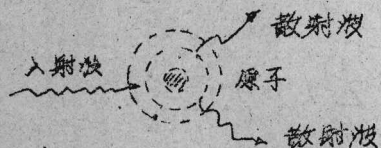
$$\text{控制方程} \quad \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t, \alpha), \quad \vec{x}(0) = \vec{c}.$$

已知 — $\vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \dots, \vec{x}(t_N),$

未知 — $\alpha, c;$

10) 在量子物理中由散射数据来推测原子的势¹⁸⁾⁻²⁰⁾,

控制方程 — 不依赖于时间的 Schrodinger 方程。



已知 — 能级 $\longleftrightarrow$ 特征值 $\lambda,$

未知 — 散射势 $V(\vec{x}) \longleftrightarrow$ 相位移 $\delta(x);$

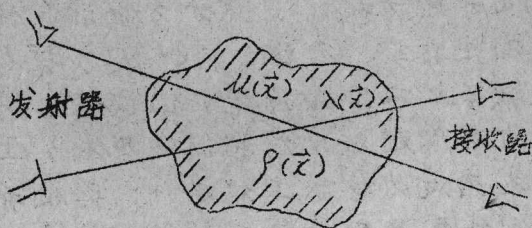
17) H. H. Kagiwada, "System Identification Methods and Applications", Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1974.

18) I. M. Gelfand and B. M. Levitan, "On the determination of a differential equation by its spectral function", Dokl. Akad. Nauk. USSR, 71, pp. 557-560, 1951

19) V. A. Marchenko, V. A., "On the reconstruction of the potential energy from phases of the scattered wave", Dokl. Akad. Nauk. USSR, 104, pp. 695-698, 1955

20) L. D. Faddeev, "The inverse problem in the quantum theory of scattering", USP. Mat. Nauk. (N.S.), 14, pp. 57-119, 1959 or J. Math. Phys., 4, pp. 72-104, 1963

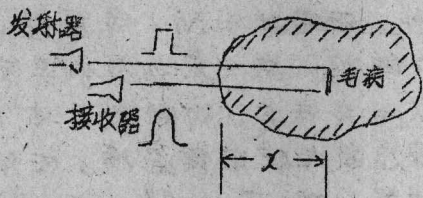
11) 在无损检查中, 由超声波的大小来测定固体材料的不规则性质。



控制方程——线性弹性波方程

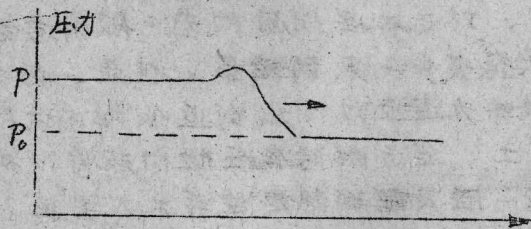
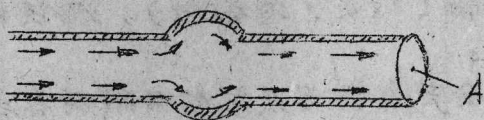
已知——边界表面上
的入射波, 透射波或
反射波。

未知——弹性参数, $\mu(\vec{x})$, $\lambda(\vec{x})$, $\rho(\vec{x})$;



下边是一个特别简单的例子,
疵点的距离 x 可以从入射和散射
的时间差与已知的 μ , λ , ρ 容
易地求出。

12) 由表压压力的大小来测定动脉硬化位置²¹⁾,



控制方程——

$$\rho D \frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2},$$

其中 ρ 为血的密度
(假设为常数), P_e
为由心脏作用而产生
的压力, 即 $P_e = P - P_0$.
 P_0 为流体静压, D 为

脉率, 亦即在起压时相对压强增加率, $D = A' \frac{dA}{dP_e}$,

已知——在 x 的两个不同值的 P_e .

未知—— x 时这两个值之间的 $D(x)$.

一般来说, 数学上的反问题产生于实验方法时造成问题和工程

21) Sir James Lighthill, "Pulse Propagation theory",
in Mathematical Biofluidynamics, Ch. 12, Regional Conf. Series
in Appl. Math. SIAM, Philadelphia, Pa., 1975

设计。所有的遥感技术可以分成两类：有源的与无源的；所有的工程设计亦可分成两类：静力学的与动力学的。无源技术基本上仅由接收装置组成，数学上它们可导致方程组、微分方程和积分方程的反特征问题，即由特征谱来确定量子。有源 (Active) 技术基本上由发射和接收装置组成，在数学上不导致反特征值问题。类似地对于工程设计中的静力学与动力学问题可以有相同的说法。上述例子中的大多数都是有源遥感技术或动力学的工程设计，它们并非恰好相应于反特征值问题，一个例外是散射的量子论中的反散射问题，微分方程的解中不是一个物理量且不能直接测量。

有源遥感技术比无源遥感技术优越之处除了在数学方面外还表现在若成实验的快速，更治且更易控制。而建立在动力学原理上的工程设计也比它们建立在静力学原理上的好，这一点也是明显的。

一般而言，有源的遥感技术还可以分成两类，即静态（与时间无关）与动态（与时间有关）技术。静态技术使用静态源，而动态技术使用动态源。通常静态技术导致解第一型 Fredholm 或 Hammerstien 积分方程，而动态技术则导致解与时间相关的偏微分方程组的反问题。动态主动遥感技术较之静态主动遥感技术的优越之处在于完成实验时的快速性（取更少的数据），测试设备的灵活性和在设计实验时的可靠性。

不可避免地，将或早或迟地会产生关于反问题的解的存在性，唯一性和稳定性问题，不幸的是，对于这些问题尚无一般的答案。即使是一些特殊的情形也未能获得很少一点的结果。但是，数学承认这些缺陷将并不妨碍计算数学为建立反问题的近似解而试图去开发一种可靠的计算方法。换言之，逼近解的存在性问题将以构造性的方式来回答。目前，解的唯一性及解的稳定性并不太重要，因为在实践中，我们找到了一个解已经满足了。在某几个特殊的情况下，已出现了解的技巧，但当中还未有一个在计算方面有充分的探究，以致难以推广到更一般类型的反问题中去。于是，发展一个新而更好的计算方法就很有必要了。这个新的计算方法应当根据形成一个可靠的实验的鲁棒性来发展，也应该能够提供最合理的逼近解，它应当适合数值计算，和容易推广到解带有更复杂几何图形的一般类型的三维反问题中。为此目的，“脉冲谱技巧” (PST) 这个方法出现了。这方法的基本思想是，数据在时间域一个紧支集中测量，而对未知系数的综合法通常用特殊的迭代法在复平面中数值地执行。因此，PST 是解决动态遥感反问题的一种特殊的迭代数

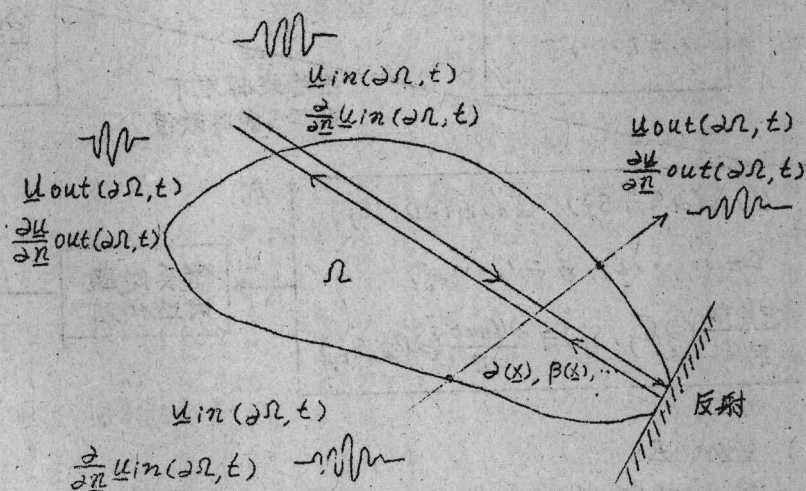
值法。

PST 首先由 Tsien 与 Chen²²⁾ 在解决流体力学理想速度反问题 (一维线性波动方程的反问题) 时引入的。后来, Chen 与 Tsien¹¹⁾ 进一步发展来处理噪声的不均匀分布 (poorly distributed) 及不充分的测量。再后, Tsien 与 Chen⁴⁾ 用于解决一维电磁波传播反问题。最近, Hatcher 与 Chen⁵⁾ 成功地推广到解决一维非线性声波方程。与此同时, Chen 与 Weng⁸⁾ 用来综合处理射线。

Chen 与 Liu¹⁰⁾ 还推广到解决一维线性扩散方程。在理想的条件下, 这些迭代法还被证明是平方收敛的²³⁾, 从计算观点看, 这是十分有效的。

脉冲谱技巧

A) 实验结构



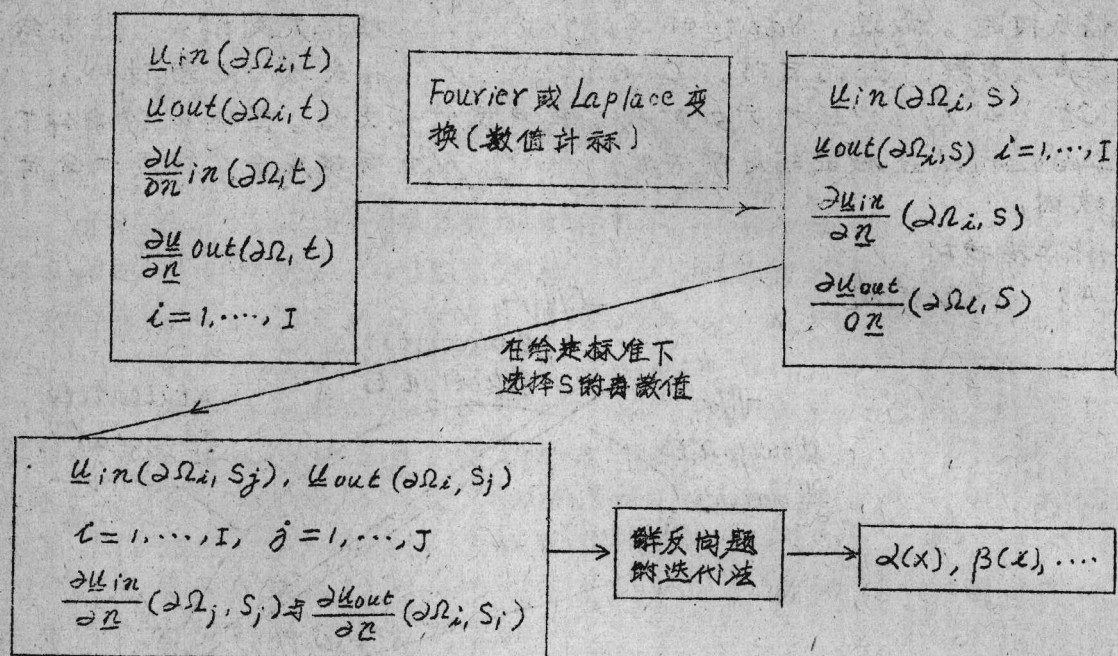
这里, $u_{in}(\partial\Omega, t)$ 是边界 $\partial\Omega$ 的输入脉冲的测量, $u_{out}(\partial\Omega, t)$ 是输出脉冲的测量 (不是反射就是透射)。在边界 $\partial\Omega$ 上, 还有对立的测量 $\frac{\partial}{\partial n} u_{in}(\partial\Omega, t)$ 与 $\frac{\partial}{\partial n} u_{out}(\partial\Omega, t)$ 。 $\alpha(x), \beta(x), \dots$ 是反映

22) T. S. Tsien and Y. M. Chen, "A numerical method for nonlinear inverse problems in fluid dynamics," Computational Methods in Nonlinear Mechanics (Proc. Int. Co). Comput. Methods in Nonlinear Mechs., The Univ. of Texas at Austin, pp. 935-943.

23) Y. M. Chen, "Numerical methods for solving a class of inverse matrix problems active remote sensing," Proc. Int. Sym. III-nosed Prob. Theory & Practice, Univ.

传播路径的未知材料的未知参数。为使计算精确，当然需要在曲面上多处位置取得 $u_{in}(\partial\Omega, t)$ 与 $u_{out}(\partial\Omega, t)$ 的数据。

B) 数值方法



C) 迭代法

要在求解非线性偏微分方程反问题的一般认识中提出具体的迭代法是不可行的，因为迭代法依赖于具体的非线性方程组。为此，我们提出以下线性方程组。

考虑线性偏微分方程组的初边问题

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad & \underline{L}(\underline{u}(x, t)) \underline{u}(x, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \\
 \text{II} \quad & \underline{B} \underline{u}(x, t) = \underline{f}(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \\
 \text{III} \quad & \underline{L} \underline{u}(x, 0) = \underline{g}(x), \quad x \in \Omega,
 \end{aligned} \tag{1}$$

这里， $\underline{u}(x, t)$ 是向量值函数， $\underline{L}$ 是矩阵微分算子， $\underline{B}$ 是矩阵边值算子， $\underline{L}$ 是矩阵初值算子，而 $\underline{L}$ 关于 $\underline{u}(x)$ 线性。

(1) 将一个反问题是从 $\underline{u}(\Delta, t)$ 及 $\frac{\partial \underline{u}}{\partial n}(\Delta, t)$ 去确定 $\underline{u}(x)$ ，其中 Δ 是部分或全部边界 $\partial\Omega$ ，而 $\frac{\partial}{\partial n}$ 是在 Δ 的法向导数。通过

对 $\underline{u}$ 及初值条件施以 Fourier 变换 (Fourier 正弦或余弦变换) 或 Laplace 变换, (1) 化为

$$\tilde{\underline{u}}(\underline{c}(\underline{x}), S) \cdot \underline{u}(\underline{x}, S) = \underline{h}(\underline{x}, S), \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$\mathbb{B} \underline{u}(\underline{x}, S) = \underline{F}(\underline{x}, S), \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (2)$$

现在, (2) 的反问题是从 $\underline{u}(\underline{\Lambda}, S)$ 及 $\partial \underline{u}(\underline{\Lambda}, S) / \partial n$ 确定 $\underline{c}(\underline{x})$ 。

求解 (2) 的反问题的标准方法将不在这里应用, 因为需要令 $\underline{c}_{n+1} = \underline{c}_n + \delta \underline{c}_n$; 把此式代入 (2) 并归併同阶项, 得到一组方程:

$$\tilde{\underline{u}}(\underline{c}_n(\underline{x}), S) \underline{u}(\underline{x}, S) = \underline{h}(\underline{x}, S), \quad \underline{x} \in \Omega;$$

$$\mathbb{B} \underline{u}(\underline{x}, S) = \underline{F}(\underline{x}, S), \quad \underline{x} \in \partial\Omega;$$

$$\tilde{\underline{u}}(\delta \underline{c}_n(\underline{x}), S) \underline{u}(\underline{x}, S) = 0, \quad \underline{x} \in \Omega;$$

$\underline{c}_n(\underline{x})$ 可以从第一个方程计算得到, 但 $\delta \underline{c}_n(\underline{x})$ 却不可能从第二个方程求得, 因此上述迭代法不可能是一个能持续下去的迭代法。

要使迭代能持续下去, 必须修改现有规格的迭代法。为此, 引入 $\underline{u}(\underline{x}, S)$ 作为另一种迭代, 定义

$$\underline{u}_{n+1}(\underline{x}, S) = \underline{u}_n(\underline{x}, S) + \delta \underline{u}_n(\underline{x}, S)$$

$$\underline{c}_{n+1}(\underline{x}) = \underline{c}_n(\underline{x}) + \delta \underline{c}(\underline{x}),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

(3)

其中 $\underline{c}_0(\underline{x})$ 是初始猜测。为使迭代收敛, 还要令 $\|\delta \underline{u}_n\| < \|\underline{u}_n\|$, $\|\delta \underline{c}_n\| < \|\underline{c}_n\|$ 。

把 (3) 代入 (2), 略去 δ 所二阶及更高阶的项, 得到

$$\tilde{\underline{u}}(\underline{c}_n(\underline{x}), S) \underline{u}_n(\underline{x}, S) = \underline{h}(\underline{x}, S), \quad \underline{x} \in \Omega \quad (4)$$

$$\mathbb{B} \underline{u}_n(\underline{x}, S) = \underline{F}(\underline{x}, S), \quad \underline{x} \in \partial\Omega$$

$$\tilde{\underline{u}}(\underline{c}_n(\underline{x}), S) \delta \underline{u}_n(\underline{x}, S) = \underline{z}(\underline{x}, S, \delta \underline{c}_n(\underline{x})), \quad \underline{u}_n, \underline{u}_n \text{ 的导数} \dots$$

$$\underline{x} \in \Omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\mathbb{B} \delta \underline{u}_n(\underline{x}, S) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega,$$

其中 $\underline{z}$ 是向量值函数, 而 $\delta \underline{c}_n(\underline{x})$ 在 $\underline{z}$ 中是线性的。用格林函数方法, (5) 可简化为关于未知量 $\delta \underline{c}_n(\underline{x})$ 的第一类 Fredholm 积分