

中西算学大成

中西算學大成

中西算學大成卷三十一

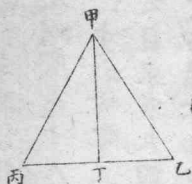
嘉善陳維祺纂

平三角

線面相求

凡三角形。立於圓界之一半者為直角。即勾股。過圓界之一半者為銳角。不及圓界之一半者為鈍角。然不拘銳角鈍角。自一角至底邊作垂線。即分為兩直角。是仍不離乎勾股也。兩腰等者。垂線即當底之一半。而兩腰不等者。所分底界。則有大小不同。故和較相比之法。因之而生。蓋和求較。較求和。要必歸於勾股相求之理。由勾股而得垂線。則凡面積及內容方圓等形。皆無不可得。茲為圖解。以次勾股。使與勾股相表裏焉。

設有等邊三角形。每邊十尺。求中垂線幾何。

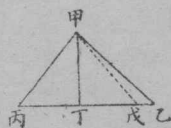


法以底邊十尺折半得五尺為勾。任以兩腰之一邊十尺為弦。勾弦求股。得八尺六寸六分零二豪有餘。即為中垂線也。如圖。甲乙丙三角形。其甲乙甲丙兩腰相等。自甲作垂線至丁。平分為兩直角三角形。而甲乙丁甲丙丁兩角之度相等。故所分之兩直角三角形。為同式形。又甲丁垂線。為兩三角形所共用之邊線。則所分底邊之乙丁丁丙亦等。故將乙丙

底邊折半為勾。任以甲乙甲丙兩邊之一邊為弦。求得股為中垂線也。

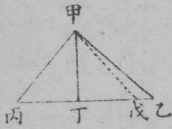
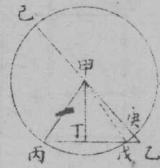
又法。以底邊十尺。折半得五尺。自乘得二十五尺。三因之得七十五尺。開方得八尺六寸六分零二豪有餘。即為中垂線也。蓋弦比勾大一倍。則弦之自乘方。必比勾之自乘方大四倍。故弦自乘方內。減勾自乘方。所餘勾自乘方三倍。即為股自乘之方積。亦即中垂線之自乘方積也。故將底邊折半自乘。三因之。即與中垂線自乘之方積等。而開方得中垂線也。

設有銳角三角形。大腰一百二十二尺。小腰一百一十二尺。底一百五十尺。求中垂線幾何。



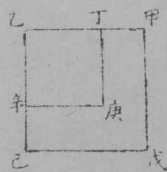
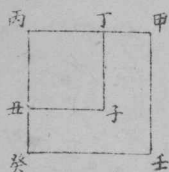
法以底一百五十尺為一率。大腰一百二十二尺。與小腰一百一十二尺相加。得二百三十四尺為二率。以大腰一百一十二尺。與小腰一百一十二尺相減。餘十尺為三率。求得四率十五尺六寸。為底邊之較。與底一百五十尺相減。餘一百三十四尺四寸。折半得六十七尺二寸為勾。以小腰一百一十二尺為弦。求得股八十九尺六寸。為中垂線也。如圖。甲乙

丙三角形。甲乙為大腰。甲丙為小腰。乙丙為底。甲丁為所求中垂線。試以甲為心。丙為界。作一圓。截甲乙大腰於庚。截乙丙底於戊。又將甲乙大腰引長至己。作甲

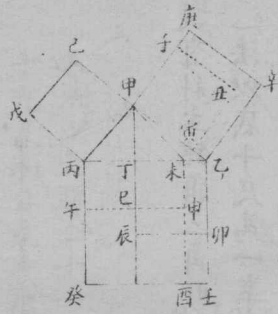
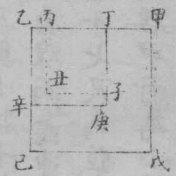


己線與甲丙小腰相等。則己乙為兩腰之和。庚乙為兩腰之較。蓋甲庚與甲丙等故乙丙為底邊之和。乙戊為底邊之較。蓋丁庚乙為兩腰之較丁戊等故乙戊今以乙丙底邊之和與乙己兩腰之和為比。即為底邊之較。乙戊同於乙庚兩腰之較。與乙戊底邊之較為比。為轉比例之四率。故為一率。乙己為二率。乙庚為三率。求得四率為乙戊。既得乙戊。則於乙丙底邊內減去乙戊。餘戊丙。折半得丁丙為勾。甲丙為弦。求得股為甲丁中垂線也。

又法。以大腰一百二十二尺自乘。得一萬四千八百八十四尺。又以小腰一百一十二尺自乘。得一萬二千五百四十四尺。兩自乘數相減。餘二千三百四十尺。以底邊一百五十尺除之。得十五尺六寸為底邊之較。與底邊一百五十尺相減。餘一百三十四尺四寸。折半得六十七尺二寸為勾。以小腰一百一十二尺為弦。求得股八十九尺六寸為中垂線也。如圖。甲乙丙三角形。試自甲角作甲丁垂線。則分為甲丁乙。甲丁丙兩勾股形。甲乙甲丙皆為弦。乙丁丁丙皆為勾。共以甲丁為股。乙丙為兩勾之和。乙戊為兩勾之較。今以甲乙弦自乘。則成甲戊己乙方形。丙丁庚辛乙為乙



丁勾自乘方形。於甲戌己乙方形內。減去丁庚辛乙方形。所餘甲戌己辛庚丁磬折形積。即與甲丁股自乘方相等。又以甲丙弦自乘。則成甲壬癸丙方形。內丁子丑丙為丁丙勾自乘方形。於甲壬癸丙方形內。減去丁子丑丙方形。所餘甲壬癸丑子丁磬折形積。亦與甲丁股自乘方相等。是則前圖之甲戌己辛庚丁磬折形。與後圖之甲壬癸丑子丁磬折形相等矣。若兩自乘之數相減。則如甲戌己乙方形內。減去與甲壬癸丑子丁磬折形相等之甲戌己辛庚丁磬折形。又減去丁子丑丙一小方形。所餘為子庚辛乙丙丑一小磬折形。引而長之。成一長方形。其長即乙丁與丁丙之和。其闊即乙丁與丁丙之較。故以乙丁與丁丙之和。除子庚辛乙丙丑磬折形之積。而得乙丁與丁丙之較也。又圖甲乙丙三角形。作甲丁垂線分為兩勾股形。共以甲丁垂線為股。故甲乙弦自乘方內。有甲丁股自乘一方。乙丁勾自乘一方。而甲丙弦自乘方內。有甲丁股自乘一方。丁丙勾自乘一方。今兩勾股形之股既同。則兩弦方相減所餘之數。即丙勾方相減所餘之數。故甲丁乙勾股形之甲乙弦自乘方內。減

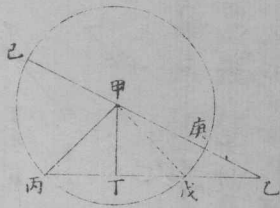


甲丁丙勾股形之甲丙弦自乘方。所餘庚辛乙寅丑子磬折形。即與甲丁乙勾股形之丁乙勾自乘方內。減甲丁丙勾股形之丁丙勾自乘方。所餘乙卯辰巳申未磬折形相等。若將乙卯辰巳申未磬折形。引而長之。遂成乙壬酉未長方形。其長即乙丁丁丙兩勾之和。其闊即乙丁丁丙兩勾之較。其積即乙丁丁丙兩勾方相減之餘。亦即甲乙甲丙兩弦方相減之餘。是以兩弦自乘相減之餘積。以兩勾之和除之。而得兩勾之較也。

設有鈍角三角形。大腰十七尺。小腰十尺。底二十一尺。求中垂線幾何。

法以底二十一尺為一率。以大腰十七尺與小腰十尺相加。得二十七尺為二率。以大腰十七尺與小腰十尺相減。餘七尺為三率。求得四率九尺。為底邊之較。與底二十一尺相減。餘十二尺。折半得六尺為勾。以小腰十尺為弦。求得股八尺。為中垂線也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為大腰。甲丙為小腰。乙丙為底。甲丁為所求中垂線。試以甲為心。丙為界。作一圓。截甲乙大腰於庚。截乙丙底邊於戌。又將甲

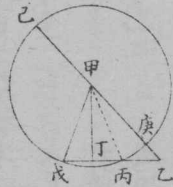
西算學大成
卷三十一



又法。以大腰十七尺自乘。得二百八十九尺。又以小腰十尺自乘。得一百尺。兩自乘數相減。餘一百八十九尺。以底二十一尺除之。得九尺。為底邊之較。與底二十一尺相減。餘十二尺。折半得六尺。為勾。以小腰十尺為弦。求得股八尺。為中垂線也。圖解同前。

設有斜立鈍角三角形。大腰二十一尺。小腰十七尺。底十尺。求形外垂線幾何。

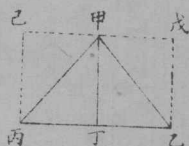
法以底十尺為一率。大腰二十一尺與小腰十七尺相減。餘四尺為二率。大腰二十一尺與小腰十七尺相加。得三十八尺為三率。求得四率十五尺二寸。為底與形外垂線兩邊連底之總。內減去底十尺。餘五尺二寸。折半得二尺六寸為勾。以小腰十七尺為弦。求得股十六尺八寸。為形外垂線也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為大腰。甲丙為小腰。乙丙為底。甲丁為所求形外垂線。試以甲為心。丙為界。作一



圖。截甲乙大腰於庚。又將甲乙大腰引長至己。作甲己線。與甲丙小腰相等。復將乙丙底引長至戊。作乙戊線。則成甲乙戊三角形。其乙丙為底邊之較。乙戊為底邊之和。乙庚為兩腰之較。乙己為兩腰之和。自圖外至圖內。所作兩線之比例。既同於圖外兩段轉相比之比例。則圖外兩段之比例。亦必同於兩全線轉相比之比例。故乙丙與乙庚之比。即同於乙己與乙戊之比。既得乙戊。則減乙丙。餘丙戊。折半得丙丁為勾。甲丙為弦。求得股即甲丁垂線也。

又法。以大腰二十一尺自乘。得四百四十一尺。又以小腰十七尺自乘。得二百八十九尺。兩自乘數相減。餘一百五十二尺。以底十尺除之。得十五尺二寸。為底與形外垂線兩邊連底之總。內減底十尺。餘五尺二寸。折半得二尺六寸為勾。以小腰十七尺為弦。求得股十六尺八寸。為形外垂線也。如圖甲乙丙三角形。將乙丙底引長至戊。自甲作垂線至丁。則丁戊與丁丙等。又自甲至戊作甲戊線。與甲丙小腰等。則成甲丁乙甲丁戊兩勾股形。甲乙甲戊皆為弦。乙丁丁戊皆為勾。共以甲丁為股。而乙丙為兩勾之較。乙戊為兩勾之和。前法以和求較。此法以較求和。其理一也。圖解並同前。

設有銳角三角形。兩腰俱五尺。底六尺。求面積幾何。



法先以底六尺折半得三尺為勾。任以兩腰之一邊五尺為弦。求得股四尺。為中垂線。與底六尺相乘。得二十四尺。折半得一十二尺。為三角面積也。如圖。甲乙丙三角形。以乙丙底邊與甲丁中垂線相乘。成戊乙丙已長方形積。比三角形積正大一倍。故折半得三角積也。

設有鈍角三角形。大腰十七尺。小腰十尺。底二十一尺。求面積幾何。

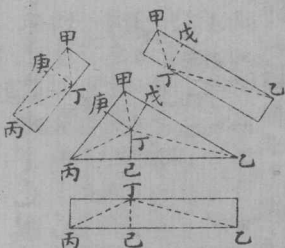
法先用求中垂線法。求得中垂線八尺。與底二十一尺相乘。得一百六十八尺。折半得八十四尺。為三角面積也。

又法。以甲乙邊十七尺。乙丙邊二十一尺。甲丙邊十尺。三數相加。得四十八尺。為三邊之總。折半得二十四尺。為半總。以甲乙邊十七尺。與半總二十四尺相減。餘

七尺。為甲乙邊與半總之較。以乙丙邊二十一尺。與半總二十四尺相減。餘三尺。為乙丙邊與半總之較。以甲丙邊十尺。與半總二十四尺相減。餘十四尺。為甲丙邊與半總之較。乃以半總二十四尺為一率。甲丙邊與半總之較十四尺為二率。乙丙邊與半總之較三尺。與甲乙邊與半總之較七尺相乘。得二十一尺。為三率。求得四率十二

尺二十五寸。開方得三尺五寸。為三角形自中心至三邊之垂線。與三邊之總四十八尺相乘。得一百六十八尺。折半得八十四尺。即三角形之面積。或以所得垂線三尺五寸。與半總二十四尺相乘。亦得八十四尺。為三角形之面積也。此法蓋一率二率以線與線為比。三率四率以面與面為比也。如甲乙丙三角形。自中心丁至三邊各作一垂線。又自中心丁至三角各作一分角線。即成六等角三角形。俱兩兩相等。丁己丙與丁庚丙等。丁己乙與丁庚甲等。又按甲戊戊度引乙丙線至辛。則乙辛為三邊之半總。即三較之和。乙己與乙戊等。即甲丙邊與半總之較。已丙與丙庚等。即乙丙邊與半總之較。試自辛作直角。將乙丁線引長作一乙辛壬直角形。則壬辛與丁己平行。乙辛壬形與乙己丁形。遂為同式形。其乙辛與乙己之比。即同於壬辛與丁己之比。然乙辛一率。乙己二率之數雖有。而壬辛之數却無。又但知己丙與丙辛相乘之數。即丁己與壬辛相乘之數。故以己丙與丙辛相乘之數為三率。何以知已相乘之數。即丁己與壬辛相乘之數。試作壬丙線。壬癸線。使丙癸與丙辛等。癸角辛角皆為直角。癸丙辛角與辛壬癸角相合。共成一百八十度。然庚丙己角為癸丙辛角之外角。相合亦共成一百八十度。是庚丙己角與辛壬癸角等。庚丁己角與癸丙辛角等。是以壬癸丙辛形與丙庚丁己形為同式形。而丙辛壬勾股形與丁己丙勾股形亦為同式形。可互相比例矣。以丁己作一率。己丙作二率。丙辛作三率。即得四率壬辛。是以己丙二率與丙辛三率相乘之數。即與丁己一率與壬辛四率相乘之數等。故直以己丙二率與丙辛三率相乘之數。是故乙辛與乙己之比同於丁己與壬辛相乘之面。即己丙與丙辛相乘之面。與丁己自乘之面之比也。既得丁

設有鈍角三角形。大腰



已自乘之面故開方而得丁己。為三角形自中心至三邊之垂線。與丁戊丁庚俱相等。又即三角形容圍之半徑也。既得自中心至三邊之垂線。則用垂線與三邊之總相乘。所得一長方積。即如用垂線與三邊各相乘所得三長方積合為一長方比三角形積大一倍。故折半而得三角形之面積。如以垂線與三邊半總相乘。即與三角形積等。而不用折半矣。

法先用求中垂線法。求得中垂線十二尺。與底邊四十四尺

相加。得五十六尺為一率。中垂線十二尺為二率。底邊四十

四尺為三率。推得四率九尺四寸二分八釐五豪有餘。即三

角形內所容正方形之一邊也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為大

腰。甲丙為小腰。乙丙為底。甲丁為所得中垂線。戊己庚辛為

今所求內容正方形。試依甲丁中垂線度。將乙丙線引長。作

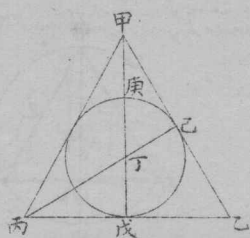
乙癸線。為五十六尺。又與甲丙線平行。作壬癸線。又將甲乙

線引長。作壬乙線。則成與甲乙丙同式之壬乙癸三角形。復

與底線平行。作甲子線。與丙癸等。即與甲丁垂線等。又與甲

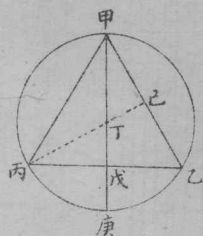
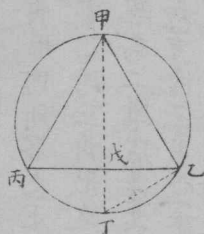
丁平行作于丑線與甲丁等。則甲丁垂線所作甲丁丑子正方形。即為壬乙癸三角形內所容之正方形矣。故壬乙癸三角形之乙癸底。與甲丁方邊之比。即同於甲乙丙三角形之乙丙底。與戊己方邊之比。故中垂線與底邊相加為一率。中垂線為二率。底邊為三率。推得四率。為內容正方形之一邊也。

設如等邊三角形。每邊一尺二寸。求內容圓徑幾何。



法先用求中垂線法。求得中垂線一尺零三分九釐二豪有餘。以三歸之。得三寸四分六釐四豪有餘。即內容圓形半徑。倍之得六寸九分二釐八豪有餘。即內容圓形全徑也。如圖甲乙丙三角形。內容丁圓形。先求得甲戊中垂線。又自丙角至甲乙線界。作丙己垂線。與甲戊中垂線相交於丁。即三角形之中心。亦即內容圓形之中心。故丁戊與丁己。即內容圓形之半徑。又甲戊乙甲己丁兩勾股形為同式形。甲乙為乙戊之二倍。則甲丁亦必為丁己或丁戊之二倍。丁戊既為內容圓形之半徑。則甲丁即為內容圓形之全徑。而甲戊中垂線。必為丁戊半徑之三倍矣。故求得甲戊中垂線。以三歸之。得丁戊。即內容圓形之半徑。倍之得庚戊。即內容圓形之全徑也。

設如等邊三角形。每邊一尺二寸。求外切圓徑幾何。

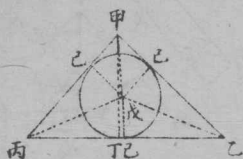


法先用求中垂線法。求得中垂線一尺零三分九釐二豪有餘。三歸四因。得一尺三寸八分五釐六豪有餘。即外切圓形全徑也。如圖。甲乙丙三角形。外切丁圓形。先求得甲戊中垂線。又自丙角至甲乙線界。作丙己垂線。與甲戊中垂線相交於丁。即三角形之中心。亦即外切圓形之中心。故甲丁與丙丁。即外切圓形之半徑。又甲戊乙甲己丁兩勾股形為同式形。甲乙為乙戊之二倍。則甲丁亦必為丁己或丁戊之二倍。甲丁既為外切圓形之半徑。則為甲戊中垂線三分之二。而甲戊中垂線。却為甲庚全徑四分之三矣。故求得甲戊中垂線。三歸四因。得甲庚。即外切圓形之全徑也。

又法。以每邊一尺二寸自乘。三歸四因。開方得一尺三寸八分五釐六豪有餘。即外切圓形全徑也。如圖。甲乙丙三角形。外切甲丁乙丙圓形。試自甲角作甲戊中垂線。又引長作甲丁全徑線。復自丁至乙作丁乙線。遂成甲乙丁甲戊乙兩勾股形。為同式形。甲乙既為乙戊之二倍。則甲丁亦必為乙丁

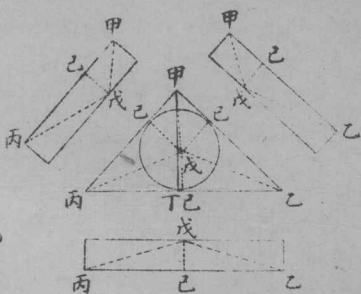
之二倍。故甲丁自乘方比乙丁自乘方大四倍。若依句弦求股之法言之。則甲丁弦自乘方內減乙丁句自乘方。所餘為甲乙股自乘之方。今甲丁弦自乘方既為乙丁句自乘方之四倍。則是甲乙每邊自乘方為甲丁全徑自乘方四分之一矣。故以一邊自乘三歸四因。即與全徑自乘方等。而開方得外切圓形之全徑也。

設有銳角三角形。大腰三百三十八尺。小腰三百尺。底四百一十八尺。求內容圓徑幾何。

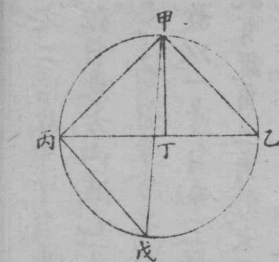


法先用求中垂線法。求得中垂線二百四十尺。與底四百一十八尺相乘。得一十萬零三百二十尺。以大腰三百三十八尺。小腰三百尺。底四百一十八尺。三數相加。得一千零五十六尺。除之得九十五尺。即內容圓半徑。倍之得一百九十尺。即內容圓全徑也。如圖。甲乙丙三角形。內容戊圓形。試自圓之中心至甲乙丙三角。各作戊甲戊乙戊丙三線。遂分甲乙丙三角形。為甲戊乙甲戊丙乙戊丙三三角形。其三邊皆為三角形之底。而戊己半徑。皆為三角形之垂線。今乙丙底邊與甲丁中垂線相乘所得之長方積。原比甲乙丙三角形積大一倍。即如將所分三三角形。各用垂線乘底邊所得之三

三長方積。合為一長方也。三長方之長雖不同。而闊則一。故各以長除積而得闊者。即如合三角形之三邊。除三角形之倍積。而得半徑也。



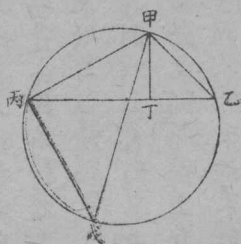
設有銳角三角形。大腰一百八十三尺。小腰一百六十八尺。底二百二十五尺。求外切圓徑幾何。



法用求中垂線法。求得中垂線一百三十四尺四寸為一率。小腰一百六十八尺為二率。大腰一百八十三尺為三率。推得四率二百二十八尺七寸五分。即外切圓徑也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為小腰。甲丙為大腰。乙丙為底。甲丁為中垂線。試作切三角一圓。自甲角至圓對界。作甲戊全徑線。又自丙角至戊作丙戊線。則甲丙戊三角形之丙角。立於圓界之半。必為直角。與甲丁垂線所分甲丁乙三角形之丁角等。

而戊角與乙角皆對甲丙弧其度又等故甲丙戊與甲丁乙兩三角形為同式形。是以甲丁與甲乙之比同於甲丙與甲戊之比也。

設有鈍角三角形大腰十七尺小腰十尺底二十一尺求外切圓徑幾何。



法用求中垂線法求得中垂線八尺為一率小腰十尺為二率大腰十七尺為三率推得四率二十一尺二寸五分即外切圓徑也。如圖甲乙丙三角形甲乙為小腰甲丙為大腰乙丙為底甲丁為中垂線試作切三角一圓自甲角至圓對界作甲戊全徑線又自丙角至戊作丙戊線則甲丙戊三角形之丙角立於圓界之一半必為直角與甲丁垂線所分甲丁乙三角形之丁角等而戊角與乙角皆對甲丙弧其度又等故甲丙戊與甲丁乙兩三角形為同式形是以甲丁與甲乙之比同於甲丙與甲戊之比也。

邊角相求

三角形有直角者為勾股無直角者作中垂線分為兩直角形則亦成兩勾股是皆有其二而得其一或有其三而分為二概以邊線相求者也至於割圓之法則凡三角形有一角即有八線皆成勾股。詳見割圓術中而可比例以相求故三角形不論角之直