运筹学讲义

（附习题集）

吕立生 编

$$\text{Max} \quad Z = CX$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} AX \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

上海工业大学出版社（筹）

运 筹 学 讲 义

（附 习 题 集）

吕 立 生 编

上海工业大学出版社（筹）

内 容 提 要

本书是编者在上海工业大学经济管理学院的教学讲义，全书分线性规划、整数规划、动态规划、网络分析、决策分析、排队论六章，主要是通过典型例题阐述基本原理，解题思路与方法。

本书可作为大专院校管理类运筹学教材，以及在职干部或工程技术人员自学，进修之用。

目　录

绪　论

第一章　线性规划

第二章　整数规划

第三章　动态规划

第四章　网络分析

第五章 决策分析

第六章 排 队论

附 习 题 集

绪　论

§1　运筹学简介

运筹学是研究如何以合理的方式，组织具有明确的目标的活动的专门学科。通俗的讲，“运筹”是“运用”和“筹划”之意。或者说，运筹学是研究在某一整体中，如何统筹安排合理利用，以使该整体在某些方面的总效益达到最优的一门科学。

世界上的万事万物都是运动的、变化的，人们对于自己所面临的种种局面，都在经常进行分析研究，以便采取相应的对策。因此，人们在自己的社会实践里，一直都处在运筹决策的过程中。

在生产活动中，人们为了更好地完成某项生产任务，更充分地发挥现有各种生产条件的潜在能力，总要经过一番筹划，找出最有利的工作方案，以期达到高产、高效、优质、低耗的目的。

运筹学在探讨这类问题时，是从数量的角度，对实际问题中的种种数量关系，进行分析研究，把问题归结到一定的数学模型，然后用数学的有关原理和方法求得问题的最优解。

运筹学这名称是在策二次世界大战时才正式提出的，但运筹学的一些朴素思想，可追溯到远古。例如纪元前第三世纪希腊的赛就斯（Syracuke）、希隆（Hieren），要求当时的学生阿基米德（Archimode）想法制定抵制罗马海军的围城计划。我国在战国时期，齐国的孙膑曾运用卓越的策略战胜了魏国的庞

渭。后来，汉朝张良用他的智谋帮助汉高祖打败西楚霸王取得天下。当时汉高祖曾称赞他的智谋说：“运筹帷幄之中，决胜于千里之外。”又例如诸葛亮充分运用智谋，使刘备能创立鼎足三分之局面。此外，北宋真宗年间，皇城失火，皇宫被毁，朝廷决定重建皇宫，当时急需解决“取土”、外地材料的“储运”和“处理瓦砾”等三项任务。负责修建皇宫的丁渭经过策划，决定在皇宫前大街上挖沟取土，解决了“取土”问题。引开封附近的汴水入沟，使载运外地材料的船只可以直接抵达宫前，解决了“储运”问题。最后再把失火中损毁和修建中废弃的破瓦碎砖填沟筑路，又圆满地解决了“处理瓦砾”问题，恢复了皇宫前大街的原来面目。当时所谓的策略，智谋总不外乎是知己知彼，合理安排与有效运用。

第一次世界大战时期，英国的兰彻斯特（Lanchester）曾对战争的胜利，战斗成员在数量的优势以及武器优势三者间的关系加以研究，他设法把复杂的作战措施用数学方程表达出来。美国人也曾为海军参谋部进行抵御德国潜水艇破坏的研究，包括编制出一套用来确定最优方案去抵御敌人的潜艇战术。在当时虽未发挥实际效果，但为后来类似问题的研究起了可供参考的作用。

第二次世界大战时期，武器的如何有效使用却落后于武器的发明制造，为了解决作战行动和军需物质的生产与供应中所发生的问题，组织了各种不同领域的科学工作者，其中有物理学家、化学家、生物学家、数学家、心理学家、象棋大师和工程师来研究这方面的问题。例如英国首先组成了防空指挥研究队，由科学家布莱克特(Blackett)指导，组织雷达与高射炮间的有效配合，防备德国空军对英国本土的轰炸；为了封锁德国潜水艇在比士考海湾的活动，研究过如何确定侦察机飞行路线，

侦察机的架数和飞行的时间，美国为了保护在大西洋中的运送船队，组织了运筹学小组，研究过如何护航的问题。在军需物质的生产方面，为了在一定时间内供应出大量的合格物资，就必须解决一些象产品验收预防废品和其它有关生产效率的问题。在这些不同问题的研究中都有一个共同的观点，这就是，不对现有的武器、装备、材料、人力等加以扩展，而是研究如何合理使用它们並加以改进，以期达到最大效果。这些运筹小组在大战时期做了大量工作，取得了出色的成绩，为运筹学的发展积累了丰富的材料。

在非军事方面，1885年泰勒（Taylar）就考虑到如何以最少的劳动消耗搬送最大量的物体。1917年丹麦数学家爱尔朗（Erlang），根据所研究的结果写了一篇重要的论文：“在自动电话接线上有关概率论的几个问题”，为后来的排队论建立了基础。1930年李文逊（Leriron），开始了有关商品问题的分析以提高销售量。1939年苏联卓越的数学家康托诺维奇（Канторович），写出《生产组织与计划中的数学方法》一书，这是现代运筹学最早的一部著作。他在引言中提到：“提高车间、企业和整个工业部门的工作效率有两条路：一条是技术方面的各种改进，即在各个机床上的新装备，改进工艺过程，找出新型的好的原料等等。而另一条路，有时还较少利用的一条路，即在生产组织与计划方面求得改进。”该书提出了解决有关工业、建筑业、运输业及农业等部门中组织与计划问题的数学方法，即“解乘数法”。在1951年美国的毛尔思（Morce）和金布尔（Kimball）总结了第二次大战期间的部分方法和经验，合写了《运筹学方法》一书。鉴于运筹学工作在战争中起着重大作用，很多国家的军事部门如陆军部、海军部、空军部中都扩大了运筹学工作的组织，成立不少运筹学的研究机构。

1952年美国运筹学会（ORSA）创立，五十年代初期英国运筹学会理事会成立。1959年又建立了国际运筹学会联合会。很多国家的大公司企业机构都成立了运筹学专门研究组织，出版了许多有关运筹学的刊物。就这样经过不少数学家的努力，使得运筹学不论在原理上，方法上都有了突破。电子计算机的问世，更推动了运筹学的应用和发展，在工农业、交通运输、公用事业、武器研制和运用，航天技术等各个领域里，都充满着运筹学的丰硕成果，运筹学也随之发展成为一门应用极为广泛的新科学。

七十年代以来，运筹学在国际上逐渐被应用于大系统的运行控制和对未来世界的预测。

现在，国外有人把运筹学的发展过程分为三个阶段：第一阶段是1946年以前，运筹学主要用于军事；第二阶段是1947年至六十年代上半期，运筹学主要用于工厂企业管理，在理论上趋于成熟；第三阶段是六十年代下半期以来，其主要特征是：研究的系统由小而大，逐渐和系统分析结合，时间上由短而长，逐渐和未来学结合；研究的因素由技术性转向非技术性；逐渐和社会科学结合。

在我国，运筹学的研究与应用虽然起步较晚，但还是有进展的。在1956年中国科学院数学研究所成立了运筹学研究室，1958年我国产生了独具我国风格的方法——“图上作业法”。1965年、1970年在著名数学家华罗庚教授的直接指导下，在全国范围内推广了统筹方法和优选法，取得了卓著的成绩。1978年11月，在成都召开了全国数学年会，对数学运筹学的理论与应用的研究成果进行了一次检阅，宣读的大量论文表明，一支相当可观的运筹学队伍已形成，于是1980年4月在山东济南正式成立了“中国数学会运筹学会”，1984年5月在上海召开了

“中国数学会运筹学会第二届代表大会暨学术交流会”，提议改名为“中国运筹学会”。现在，在学术上研究的广度和深度已跟上世界水平。今后，随着四化进程，运筹学在应用上将会获得更大的成绩。

§2 运筹学的工作方法

我们研究运筹学的目的，不仅是要掌握和研究它的纯数学理论，更重要的是应用它的理论去解决实际问题。其具体步骤可分以下五个阶段：

（一） **提出问题** 在活动的领域里，熟悉情况和经验，甚至还要将现场中各个部门联系起来才能发现运筹学问题。对形成的问题，必须满足如下要求：

（1） 问题的陈述必须有明确的目标。例如邮递员从邮局出发，要把信件、报纸送到各家，并带回各点邮筒中的信件。邮递员怎样选择行走路线，使所走的路程最短？这里的“路程最短”就是目标。目标必须明确，否则无法求解。

（2） 问题的叙述必须含有机动成分。上例中行走路线是机动成分。如果问题中不存在着机动成分，比如从甲地到乙地只有一条路可走，那就不存在如何选择近路的问题了。根据运筹学里“运用”和“筹划”之涵义来讲，如果因素是固定的，那还有什么“运用”和“筹划”之可言呢？在运筹学的各类问题中，都必须具有“过与不及”的因素，亦即：多了不好，少了也不好的情况在问题中一定会碰到的，这时才有必要去追求“不多不少”的目标。

（3） 问题的叙述必须含有约束条件。比如某车间有几种不同的机床，如铣床、六角车床和自动车床等。现在要加工几

种零件，由于机床的性能不同，加工各种零件的效率也就各不相同。根据各种机床的生产能力，如何安排各机床的加工任务，使在一天（或一定时间）内，成套（例如几种零件配成一套）的产品最多？其中各种机床的生产能力就是约束条件。运筹学的问题也只有在一定的约束条件下才具有意义，否则，就不会产生上述“过与不及”的现象了，因而也就谈不上如何合理运筹了。

以上三条是形成正式的问题必不可少的。

（二） 建立模型 运筹模型是对研究对象的一种描绘。它是从对象中把有关的重要部分抽象出来，再按运筹学的分析形式构成的。如何从实际问题化出其模型，这有如下几点可供参考。

（1） 分析哪些因素会影响问题的目标？哪些因素是主要的？哪些因素是次要的或可有可无的？去掉哪些可有可无的因素（即依赖于其他因素的非独立的因素）。如果有影响的因素太多，则可去掉一些次要因素，而只考虑那些关系最大的主要因素。

（2） 检查有影响的主要因素中哪些是可以控制的，就是说可以加以改变的，哪些是不能控制的。要成为一个运筹学的问题，其中必须至少存在一个可控制因素，否则就毫无控制余地可筹划了。

（3） 把各种因素用字母表示出来，可控制的因素这时称为变数。目标设法写成有关的变数的函数形式。

（4） 模型中变量的个数尽可能少，因为解题时需要化费的精力随着变量的个数的增加而可能增加。

（三） 求解模型 根据模型的特点，采取适当的方法求解。

（四） 检验求得的解 可采用期待性检验法或回顾性检

验法。只要有可能，就进行期待性检验，也就是根据对模型求出的解来管理真实的系统，这种方法能相当有效地对模型的结构进行检验，还能提供一些基本参数。但这未必总能办到，在不可能这样做时，就必须将系统在过去的情况与对模型所作的预计和结论作一比较。一般说来，这也是一件不易办到的事。此外，还应考验下面几点：

（1） 看求出的解与政府的方针政策是否有抵触。

（2） 考虑所求的解是否符合当地的实际情况，否则，理想解答也是无法实行和推广的。

（五） 应用模型的解 把所得的解答方案用现场工作人员的语言加以阐述，並且为有关领导提出有具体数字根据的建议。方案只是在一定条件下得到的，但这些条件不是固定不变的，因此，在实行方案时还必须考虑到相应的措施，这样，才能保持所得解答方案的有效性。

以上五个阶段是不能截然分开並加以严格区分的，在某种程度上，各个阶段之间是相互影响的，在时间上也可以是彼此重迭的。例如：建立模型这一步就常常受到现有求解方法的影响。类似地，甚至在运筹学研究的后面几个阶段还在继续进行时，归结出来的问题本身却再三地得到修改，也是常有的事。

五个步骤中，第一个步骤是从实际出发，第二、第三步是进行理论处理，第四、第五步是回到实际中去，这也就是实践——理论——再实践的过程，这也是运筹学发展的根本途径。这也指出，运筹学工作者不能脱离实际，要向有实践经验的人学习，最好能深入实际，才能提出问题，进而研究、发展运筹学理论。

§ 3　运筹学的主要分支

运筹学是一门崭新的学科，发展还不定型，它包含哪些分支，当前的看法也不一致，按国际上和国内的实践，它主要有如下几支：规划论、网络理论、排队论、策略论、存储论、更新论、搜索论、可靠性理论、模似等等，以后选几章论述之。

第一章 线性规划

§1·1 引　　言

运筹学问题的解决都归结为一个“最好”的“方案”。评价某个方案好坏的数量指标是什么？例如：对于物资调运问题可将总运费作为指标，运费高的方案就不如运费低的方案好。对于邮递路径问题，可以用总的路程作为指标，对于同一邮递工作，路程短的路径就比路程长的路径要好。在许多问题中，一个方案可以用一组变量来给出，而评价一个方案好坏的指标，就可以表示为这一组变量的函数。所以，这个指标就称为问题的目标函数。如果将一个问题的变量记为x_1，x_2，……，x_n，则可将目标函数写成

$$Z(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1}$$

从而，求得最好方案的问题，就化成求一组变量的值，使（1）达到最大值或最小值。

对于变量的取值常常有一定的范围，并且互相之间有一定的联系。比如

［例 1］ 有m个产地A_1，A_2，…，A_m，又有n个销地B_1，B_2，…，B_n。已知从产地A_i到销地B_j的单位运价为c_{ij}，今在产地A_i需要运出某种物资a_i单位，在销地B_j需要调入这种物资b_j单位，$i=1，2，\cdots，m$；$j=1，2，\cdots，n$。又

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

问题是如何制定运输方案，使总运费最省？在这个问题中，一个方案由每个A_i到每个B_j的运输量x_{ij}所决定，目标函数是总运费

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2}$$

问题是求使S为最小的一组变量x_{ij}。

显然要满足

$$x_{ij} \geqslant 0$$

又每个产地A_i运出的总量应该等于a_i，每个销地B_j调入的总量应该等于b_j，即

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\cdots,m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

以上这些限制变量取值范围的条件就称为约束条件。对于一般的问题，就（1）式给定的变量x_1 x_2，…，x_n，其约束条件可表示为

$$\begin{cases} f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) \vee 0, & i=1,2,\cdots,m. \\ x_j \geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{3}$$

其中记号"$\vee$"为"$\geqslant$"或"$\leqslant$"或"$=$"。问题就是如何寻找$\{x_j\}$的一组值，使它们不仅满足(3)，而且使(1)达到最大值或最小值。

若约束条件和目标函数关于变量x_1，x_2，…，x_n都是线性（一次）的，就称为线性规划。否则就称为非线性规划。