大连海事大学自编讲义

船舶柴油机测试技术

（第二版）

主编　彭水生
参编　李　斌　杨　辉
主审　杜荣铭

轮机工程学院柴油机动力装置教研室
1996 年 10 月

大连海事大学自编讲义

船舶柴油机测试技术

（第二版）

轮机工程学院柴油机动力装置教研室
1996年10月

前　言

本书是根据大连海事大学轮机管理专业1996年修订的教学大纲要求编写的。

本书从船舶的实际出发，在原版基础上做了适当的内容增减，主要介绍了柴油机测试方面的基本理论、技能和方法。全书共八章，主要内容包括误差理论、温度、压力、转速、流量、扭矩、烟度、排气和振动等测量方法和测试仪表的基本原理与使用。

本书适用于轮机管理专业选修教材，授课学时54学时，也可供做为船舶柴油机管理技术人员阅读。

书中第一、二、三、五章由彭水生讲师编写，第四、八章由李斌讲师编写，第六、七章由杨辉讲师编写。书中图稿由大连海事大学机械厂孔琳描绘。本书在编写过程中还得其它同志的帮助，在此表示感谢。全书由彭水生讲师主编，杜荣铭教授主审。

由于本书内容涉及面广，编者水平有限，时间短促，缺点和错漏在所难免，恳切欢迎读者批评并予以指正。

编者

1996年10月

目　录

第一章　测量与误差分析

所谓测试就是把对测定对象的数量上的认识用准确的数据表达出来。柴油机测试技术是研究对柴油机诸参数的有关测量方法和测量工具的一门科学技术。其测量范畴主要包括热工测量和力学测量。

任何测量都是由测量者使用一定的仪器，在一定环境条件下，按一定的测量方法和程序进行的。尽管被测量在一定条件下具有客观存在的真值。但是，由于受测量者、仪器本身、测量方法和环境条件等因素的影响，所测得的结果事实上并不等于真值，只能是接近真值的近似值，称为测量值。测量值与真值之差称为误差。任何测量都存在误差，这是不可避免的。因此任何测量所得到的结果都必须指出其误差范围，否则该测量结果便无任何意义。误差分析就是研究在测量中所产生的误差的性质、大小、产生原因，并对测量结果作出评价。

第一节　测量和测试仪表特性

1.1　测量

所谓测量是由测量者使用一定的测试仪表、按一定的测试方法和程序将被测量直接地或间接地与另一类已知量相比较，并把已知量作为计量单位确定出被测量和计算单位的比值。可用基本测量方程式表示为：

$$X = A \cdot u \tag{1-1}$$

式中：X 为未知物理量，u 为测量单位，A 为未知物理量的数值。如果我们选择另一测量单位 u_1，则

$$\because X = A_1 \cdot u_1$$

$$\therefore A_1 = A \cdot \frac{u}{u_1}$$

通常，按测量得到最后结果的方法，将测量分为直接测量和间接测量两大类。

1.1.1　直接测量　凡被测量的数值可直接从所使用的测量仪表读得的称为直接测量。如用温度表测量冷却介质的温度，用压力表测量气体的压力等均为直接测量，这种测量法常用下列几种方法：

(1)直读法：可直接从所使用的仪表上得出被测量的绝对值。如使用温度计、压力表和转速表分别用来测量温度、压力和转速等。

(2)差值法：测量仪表的读数为两个被测量的差值。如用热电偶温度计测温时，所得到的测量结果为被测量温度与热电偶冷端温度的差值。

(3)零值法：将被测量对测量仪表的影响用同类的已知量来抵消，则被测量便等于已知量。如使用自动电位差计测量热电偶所产生的热电势时，就是利用由电位差计测量电桥产生的已知位差来使热电势得到平衡的方法实现测量的。

(4)代替法：用已知量代替被测量，使两者对测量仪表的影响相同，则被测量便等于已知

量。

1.1.2　间接测量　被测量的数值不能直接从测量仪表测得，而是先要测得与被测量有固定函数关系的直接测量量，然后通过公式运算才能求得被测量。如柴油机输出轴的有效功率 P 便是通过测出轴的扭矩 M 和转速 n 之后，再运用下述公式运算求得：

$$P = \frac{M \cdot n}{9550}(\mathrm{kw})$$

式中：M 为输出轴扭矩(N·m)，n 为输出轴转速(r/min)。

1.2　**被测量**

柴油机所测试的参数大体上可归纳为：转速、扭矩(功率)、流量(耗量)、压力、温度、应变(升程)、振动、噪声、烟度及排烟气体成分分析等。这些被测参数称为被测量或被测信号。测量结果(测量值)称为数据。

柴油机的被测量按其性质不同可分为确定信号和非确定性信号两大类。

1.2.1　确定性信号　确定性信号可以用明确的数学关系式相当精确地描述。它又可分为周期信号和非周期信号。

(1)周期信号　周期信号是一定时间间隔重复出现的信号，可用周期信号的时变函数来表示，即

$$x(t) = x(t + nT) \qquad (n = 1,2,3\cdots) \tag{1-2}$$

式中 T 为重复周期。如燃烧室中烧气压力、温度、排气管中排气压力等。正弦信号是最简单的一种周期信号，其表达式为：

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \theta) \tag{1-3}$$

式中 X_m 为振幅，θ 为初相角，ω 为圆频率。

复杂周期信号是由不同频率的正弦信号叠加而成，其频率比为有理数，在数学表达式上可将复杂周期信号展开为傅里叶级数：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)] \tag{1-4}$$

式中：$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt$，$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(n\omega t)dt$

$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(n\omega t)dt$，$\omega=\frac{2\pi}{T}$，$n=1,2,3,\cdots$

(2)非周期信号　凡是能用明确的数学关系描述的，而又不属于周期信号均称为非周期信号。非周期信号包括准周期信号和瞬态信号。

准周期信号是由彼此的频率比不全为有理数的两个以上的正弦信号叠加而成的。可以表示为：

$$x(t) = x_1\sin(t + \theta_1) + x_2\sin(t + \theta_2) + x_3\sin(\sqrt{50}t + \theta_3) + \cdots \tag{1-5}$$

上述这种没有公共整数周期的各个分量所合成的信号虽然是非周期信号，但由于它仍保持离散谱的特点，所以称为准周期信号。

除了准周期信号以外的非周期性的确定性信号均称为瞬态信号。如柴油机在过渡工况下的冲击振动、噪声、转速等均可看作是瞬态信号。瞬态信号可通过傅里叶变换，获得其频域的描述：

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1-6}$$

其反变换为：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{1-7}$$

由公式(1-6)可见，瞬态信号的频谱是连续型的，而且频率范围是无限的。在这一点上与具有离散谱的周期信号及准周期信号有明显的区别。

1.2.2 非确定性信号 非确定性信号具有随机特点，每次测量结果都不相同，也不能预测，因此又称为随机信号。它反映的物理现象是随时间而变化的随机过程，因此不能象确定性信号那样用明确的数学关系式来表达。但多次测量结果具有共同的统计特性，因而随机信号可用概率统计特性来描述。

1.3 测试系统

通常测试系统由传感器、测量电路和指示或记录等三部分构成，其方框图如图 1-1 所示。

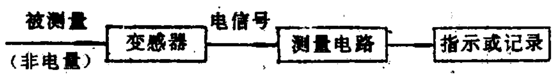

图 1-1 测试系统方框图

传感器（一次元件）直接与被测对象发生联系（但不一定直接接触），感知被测参数的变化，同时对外界发出相应的信号。一个良好的传感器须满足：1）它只能随被测参数的变化而发生内部变化（即传感器的输出信号），其它非被测参数的变化不应使它发生内部变化。2）它的输出信号与被测参数之间呈单值函数关系，即一个确定的输出信号只能与被测参数的一个值相对应。

测量电路是用来实现传感器输入信号的再转换、放大或衰减、调制或解调、阻抗变换及运算等处理，使之成为便于显示、记录和控制的有用信号。用得较多的是电桥电路、高阻抗输入电路、集成放大电路、振荡和脉冲调宽电路等。

指示器（二次元件）是用来显示和记录供测量者应用的被测图形或数值。一般可分为模拟显示和数字显示两种。通常用毫仪表、毫安表等作模拟指示，用数码管作数字显字或用记录器、示波器记录和显示被测量的变化过程等。如果用在自动控制系统，尚需把测量电路的输出信号送到调节器进行调节或控制。

1.4 测试仪表特性

测试仪表是指直接或间接地把被测量的数值与计量单位作比较的设备。其输入信号是被测量，输出信号则是测量值。测试仪表特性给出了输出信号与输入信号的关系。它是评价测试仪表的标准，也是选择测试仪表的依据。它可分为静态特性和动态特性。

1.4.1 静态特性

测试仪表的静态特性是指当输入信号不随时间变化（常量）时，其输出信号与输入信号之间的关系。

(1)灵敏度 S：灵敏度是输出信号变化量 ΔA 与相应的输入信号变化量 Δa 的比值即 $S=\frac{\Delta A}{\Delta a}$。

(2)分辨率：仪表所能检测的被测参数的最小量或最小变化量。

(3)线性度：输出信号的变化量与相应的输入信号变化量的比值为常数。通常用测试仪表在使用范围内的最大偏差 a 与输出信号的最大范围 A 的百分比来表示，如图 1-2 所示。

线性度$=\frac{a}{A}\times100\%$

(4)滞后误差 H_y：仪表的输入量从起始量程增至最大量程的测量过程称为正行程；输入量由最大量程减至起始量程过程称为反行程。在同一输入量时，正反行程造成输出值的差值称滞后差，用 ΔH 表示，如图 1-3 所示。全量程中最大滞后差 ΔH_{max} 与满量程输出值 A 之比值称滞后误差，即

$$H_y=\frac{\Delta H_{max}}{A}\times100\%$$

滞后误差是由于仪表内部的摩擦力、间隙及机械材料、电气元件的滞后特性造成的。

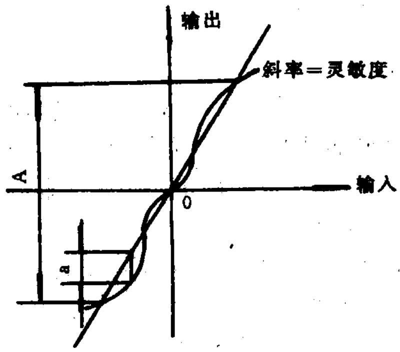

图 1-2 线性度

(5)精度：仪表的精度概念目前国内外还没有统一的规定。通常有以下几种概念：

①精密度：在测量中所测数值重复一致的程度。它并不包含是否逼近真值概念。精密度主要取决于偶然误差的大小(后述)。

②准确度：是指测量值与真值的偏离程度。准确度越高表示测量值越逼近真值。但它不包含测量值是否重复一致的概念。准确度主要取决于系统误差的大小。

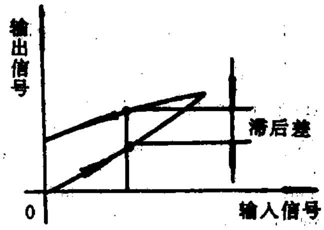

图 1-3 滞后差

③精确度：是精密度和准确度的综合指标，简称精度。它是由与其概念相反的测量不精确度来表示的。测量不精确度指包括系统误差和随机误差的综合极限误差所表达的测量结果与被测真值间差别的程度。

④精度等级：我国仪表的精度通常用精度等级来表示。精度等级通常以“允许误差”的大小来表示。允许误差是指仪表读数允许的最大绝对误差折合为该仪表量程的百分数，即：

$$\delta_y=\pm\frac{\Delta j}{A_a-A_b}\times100\%$$

式中：δ_y 为允许误差；Δ_j 为允许的最大绝对误差；A_a、A_b 为仪表刻度的上限和下限值。

例如，有一温度计的刻度是从-30℃～$+120$℃，而允许最大绝对误差为±2℃，则其允许误差为 $\delta_y=\pm\frac{2}{120-(-30)}\times100\%=\pm1.3\%$。

测量仪表常采用允许误差来表示仪表精度等级。如允许误差为±1.5%的仪表为“1.5级”。工程用仪表通常为 0.5～4 级；实验用仪表为 0.2～0.5 级；范型仪表在 0.2 级以上。仪表的精度等级一般都标记在仪表的刻度盘上。

1.4.2　动态特性

测试仪表的动态特性是指当输入信号随时间变化时，输出信号与输入信号之间的关系。当测试系统的输入信号 x_i 为随时间变化的信号时，其相应的输入信号 X_0 亦为随时间变化信号。但是在一般情况下，由于仪表本身的“惯性”与“阻尼”，使得 x_i 与 x_0 之间并不完全一致，两者之间的差异称为动态误差。如图 1-4 所示，曲线 a 为输入信号 $x_i=A\sin\omega t$，曲线 b 为输出信号 x_0

$=B\sin(\omega t+\varphi)$。可见，输出信号存在幅差 Δx 和相位差 φ。

根据输入信号的不同形式，仪表的动态特性有以下几种：

1. 阶跃响应特性

当测量系统的输入信号为阶跃信号时，其对应的输出特性称阶跃响应特性。若输入信号在 t_0 时刻突然阶跃到另一稳定状态，输出信号不能立刻达到输入值，而要经过一段时间后才能达到输入对应值。这种差异称过渡响应动误差。根据其输出信号的响应状态可有三种情况，如图 1-5 所示。

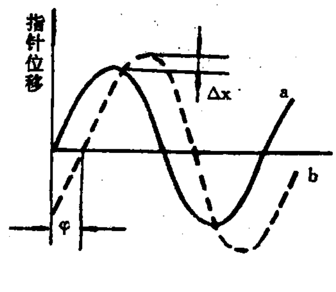

图 1-4 测量中的振幅误差和相位误差

①周期性阻尼波动　输出信号以衰减波动状态逐渐趋于输入信号，如图曲线 a 所示。此时相当于欠阻尼情况。

②无波动缓慢趋于输入量　如曲线 b 所示。此时相当于过阻尼情况。

③无波动迅速趋于输入量　如图曲线 c 所示。此时相当于临界阻尼情况。

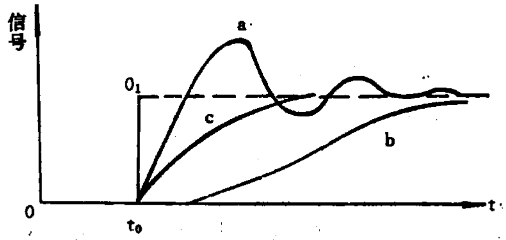

图 1-5

由上述分析可知，在欠阻尼和过阻尼情况下输出信号的响应时间均较长，只有在临界阻尼情况下，输出的响应时间最短，阶跃响应特性最好。另外，仪表的阶跃响应特性还与仪表的自振频率有关，自振频率越高，阶跃响右特性越好。对一般使用的仪表，要求在以对应仪表全刻度$\frac{2}{3}$的量突然加在仪表上，仪表指针由 0 移至平衡位置的±1.5%范围内所需时间应为 4 秒，此时的阻尼称为临界阻尼。

2. 频率响应特性

设向测量系统施加的输入信号为余弦信号 $x_i=A\cos\omega t$ 时，其输出信号 x_0 如图 1-6 所示。

在开始阶段为过渡响应阶段，此时输出信号不是余弦信号，但过渡响应部分将随时间的增长而衰减，以至消失。在某一时刻便进入稳态响应阶段，此时输出信号便为余弦信号。设该稳态响应的余弦信号为：$x_0=B\cos(\omega t+\varphi)$。

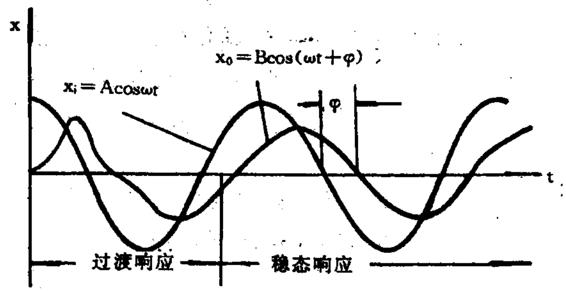

图 1-6 测量系统对余弦信号的响应

频率响应是研究在稳态阶段的输出与输入之间的关系。当输入信号振幅一定时，输出信号振幅 B 和相位差 φ 都随频率 ω 而变化。将振幅比 B/A 和相位差 φ 随频率 ω 的变化规律称为频率响应。

①一阶测量系统的频率响应

输出信号与输入信号的比值定义为传递函数。一阶测量系统的传递函数为一阶微分方程。对质量一弹簧系统[参见图 3-13]，当该系统质量 m 忽略不计时，则

$$\mu \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{1-8}$$

式中：μ 为阻尼器阻尼系数；k 为弹簧刚度。

定义时间常数为 $\tau=\mu/k$，则经推导一阶测量系统传递函数一般形式为：

$$\frac{X_0}{X_i} = \frac{1}{\tau D + 1} \tag{1-9}$$

式中：D 为微分算子 $D=\frac{d}{dt}$。

为简便起见，采用复数形式来表示输出和输入信号，则 $X_i=Ae^{j\omega t}$ 代入式(1-9)可得：

$$(\tau D + 1)X_0 = Ae^{j\omega t} \tag{1-10}$$

求解此线性一阶非齐次微分方程，采用待定系数法，解出一阶测量系统的频率响应函数为：

$$\frac{B \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}}{A \cdot e^{j\omega t}} = \frac{B}{A} e^{j\varphi} = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \tag{1-11}$$

频率响应函数是复数，由式(1-11)知，其幅值为输出与输入振幅比 B/A，它等于复数实部虚部平方和的开方，即

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \tag{1-12}$$

式(1-12)为一阶测量系统的幅频特性表达式。

由式(1-11)还可知，相位差等于复数虚部与实部之比的反正切，即

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega\tau \tag{1-13}$$

式中负号表示输出滞后于输入。式(1-13)为一阶测量系统相频特性的表达式。

一阶测量系统的频率响应有如下特性：

(a)振幅比 B/A 随 ω 增大而减小；相位差随 ω 增大而增大。B/A 和 φ 表示输出与输入之差异，称为稳态响应动误差。

(b)系统的频率响应取决于时间常数 τ。当 τ 确定之后，幅频特性和相频特性完全被确定。当 $\omega\tau=0.3$ 范围内，振幅失真和相位失真都很小。当时间常数 τ 越小时，失真小的工作频率范围越宽；反之，当 τ 越大时，则工作频率范围越窄。

由此可见，一阶测量系统减小稳态响应动误差的措施是尽可能采用时间常数 τ 小的测量系统。

②二阶测量系统的频率响应　二阶测量系统的传递函数为二阶微分方程。在质量—弹簧系统的质量不可忽略的情况下，则有力平衡关系：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{1-14}$$

经推导(详见第三章)得振幅比为：

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_0)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_0)]^2}} \tag{1-15}$$

相位差为：

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{2\xi(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)} \tag{1-16}$$

式中：ξ 为阻尼比，ω_0 为系统自振频率。式(1-15)和式(1-16)分别为二阶测量系统的幅频特性和相频特性表达式。

二阶测量系统的频率响应有如下性质：

(a)系统的频率响应随阻尼比 ξ 而不同。二阶测量系统的阻尼比 ξ 取 0.6～0.8 时在较宽的频率范围内获得稳态响应动误差较小(详见第三章)。

(b)系统的频率响应随固有频率 ω_0 而不同。固有频率 ω_0 越高，稳态响应动误差小的工作频率范围越宽。反之，当 ω_0 越低时，工作频率范围越窄(详见第三章)。

由此可见，二阶测量系统减小稳态响应动误差的措施是取测量系统的阻尼比 ξ=0.6～0.8，测量系统的固有圆频率 ω_0 应尽可能高。

第二节　直接测量误差分析

2.1　真值与测量值

任何一个被测量客观上都存在唯一确定的值，这个值称为真值。真值是未知量，测量的目的在于力图得到被测量的真值。但事实上由于受测量方法、测试仪表、周围环境及测试人员的水平等因素的影响和限制，真值是无法得到的，因此真值是纯理论上的定义值。测量所得到的结果为测量值。测量值 X 与真值 A 之差称为测量值的误差，简称误差，即误差$=X-A$。

2.2　误差的分类

误差通常按其性质、表示方法和产生原因进行分类。

1. 按误差性质分类

(1)系统误差　误差的量值是恒定的或遵守一定的规律变化的误差称为系统误差。也称恒定误差或常差。

系统误差决定测量的准确度。它说明测量结果偏离真值的程度。

(2)随机误差(偶然误差)　在同一条件下，对同一被测量进行重复测量时，将会发现即使是在系统误差被消除或修正之后，每次测量所获得的测量结果仍然会呈现出随机性的变化(变化量相当小)，这就是随机误差。

随机误差决定测量的精密度。它的数值越小，测量结果的精密度越高。

(3)过失误差(粗大误差)　由于测量者在测量过程中的过失而产生显然与事实不符的误差称为过失误差，亦称为粗大误差。过失误差具有明显的不合理性，易被发现。对含有过失误差的结果应予以舍弃。

2. 按误差的表示方法分类

(1)绝对误差　设被测量的真值为 A，其测量值为 X，则绝对误差为：$X-A=\pm\Delta X$

绝对误差 ΔX 表示误差在数值上的大小。

(2)相对误差　将绝对误差 ΔX 与测量值 X 的比值称为相对误差，以百分比表示，$\delta=\frac{\Delta X}{X}\times100\%$。

相对误差 δ 通常用来评价测量精度。

3. 按误差产生的原因分类

(1)仪器误差　是由所用测量仪器产生的误差。

(2)人的误差　是由测量者主观原因产生的误差。

(3)环境误差　是由测量环境诸因素的影响所产生的误差。

2.3　**系统误差**

系统误差产生的原因有以下几个方面：

(1)仪器误差　是由于测量仪器的精度、特性、安装以及磨损等原因产生的有一定规律的误差。

(2)环境误差　测量仪表使用说明书均给出该仪表正常工作的环境条件：压力、温度、湿度、振动、电磁场情况，电源电压等。当测量仪表使用时的实际环境与说明书所给定的环境条件不符时，将会产生误差。

由于测量误差与测量仪表的环境条件有密切关系，因此在记录测量结果时，须同时记录环境条件。

(3)测量者的误差　由于测量者先天缺陷或观察位置不对而产生的有规律的误差。这类误差与个人当时的心理状态等密切相关。

(4)测量方法　由于测量方法不当或是由于理论的近似性所产生的有规律的误差。

(5)动态误差　在测量迅变量时，由仪器指示系统的自振频率、阻尼以及与被测迅变参数之间的关系而产生的振幅和相位误差。

总之，系统误差产生的原因尽管不同，但是系统误差的特点是具有一定规律性。因此可根据产生系统误差的原因，采取适当的措施对系统误差进行修正或消除，只有在确定测量结果中系统误差已被消除或修正之后，方可进行随机误差分析。

2.4　**随机误差**

对于随机误差，是不可象系统误差那样逐个消除或逐个进行适当的技术处理的。只有通过仔细地设计测量方案、精密地准备测量设备系统以及运用统计学方法来处理测量数据，才能减弱随机误差对测量结果的影响，并估计出其最终影响的大小。

2.4.1　随机误差的正态分布

随机误差可用概率统计特性来描述。

设在一定条件下，被测量的真值为 A，进行 n 次等精度的测量结果分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$，则各测量值出现的概率密度分布可用正态分布函数表示：

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[\frac{-(x-A)^2)}{2\sigma^2}\right] \tag{1-17}$$

所谓等精度测量，是指在使用相同的测量仪表在相同的环境条件下，由同一测量者以同样的信心和注意力所进行的测量。也就是说，是在可能影响测量精度的一切条件完全相同的情况下，对同一被测量进行的测量。

若令误差为 $x-A=\Delta x$，则式(1-17)可改写成：

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[\frac{-\Delta x^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1-18}$$

式中 σ 称为测量值的标准误差(或称为均方根误差)。其表达式为

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \tag{1-19}$$

函数 $p(\Delta x)$ 曲线(如图 1-7 所示)称为正态分布曲线，亦称高斯(*C. F. Gauss*)曲线。

随机误差正态分布规律具有以下四个特性：

(1)绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相等。亦称为偶然律公理。

(2)绝对值小的误差出现的概率大，而绝对值大的误差出现的概率小。亦称为分配律公理。

(3)随着对同一被测量进行的等精度测量次数增加，随机误差的代数和趋近于零。

(4)在一定的条件下，绝对值大的误差出现的概率趋近于零，亦即误差值有一定的实际极限。

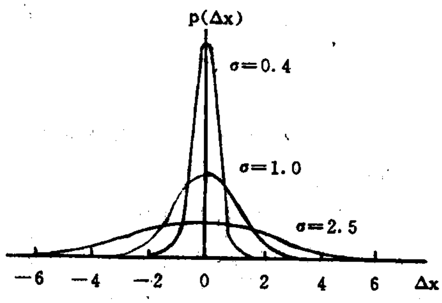

图 1-7　正态分布曲线

若假定被测量的真值为 A，测量值 x 是具有正态分布的随机变量，则其系统误差和随机误差可用图 1-8 表示。测量值 x 的概率分布曲线为正态分布曲线，其在数轴上的位置（总体均值 μ）反映系统误差的大小（准确度），而曲线的形状（由标准误差 σ 决定）确定了随机误差分布范围（$\mu-k\sigma,\mu+k\sigma$）（精密度）。

2.4.2　算术平均值（最可信赖值）

对某一量进行一系列等精度测量，由于随机误差的存在，真值 A 是无法得到的。但可以从有限个带有随机误差的测量值中求出最接近真值 A 的最可信赖值（算术平均值）。此值作为最后测量结果。

若设被测量的真值为 A，在 n 次等精度测量中，所得到的测量值分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots x_n$，则其算术平均值为：

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1-20}$$

根据误差定义知：$\Delta x_1=x_1-A,\Delta x_2=x_2-A,\cdots,\Delta x_n=x_n-A$，则

$$\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n=x_1+x_2+\cdots+x_n-nA$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i-nA$$

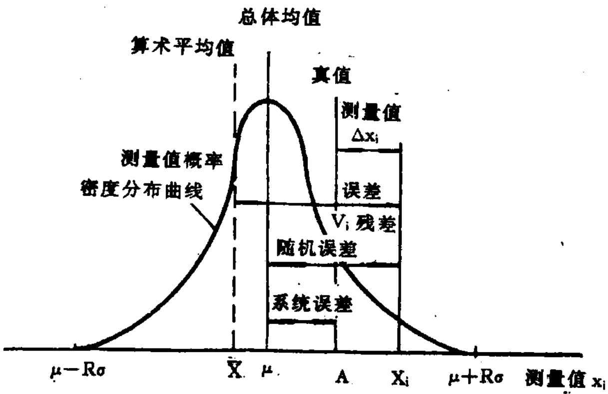

图 1-8　系统误差与随机误差

根据正态分布随机误差的特性知：当 $n\to\infty$ 时，有 $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\to 0$，所以，$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\to A$。

由此可见，如果能够对某一量进行无限次测量，就可得到不受随机误差影响的测量值，换句话说，此算术平均值 $\overline{x}$ 的数学期望就是真值 A。而当测量次数 n 为有限次数时，一般地说 $\overline{x}\neq A$。但 $\overline{x}$ 却是真值 A 的最佳估值。因此通常把算术平均值 $\overline{x}$ 称为被测量的最佳估值或最可信赖值。把测量值 x_i 与算术平均值 $\overline{x}$ 之差 $v_i=x_i-\overline{x}$ 称为残差或剩余误差。

2.4.3　标准误差和极限误差

测量值的标准误差 σ 定义是由随机误差正态分布规律的函数表达式给出的，即

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$$

σ 数值的大小取决于具体的测量条件。它表征着测量结果的弥散程度。图 1-7 所示的三条正态曲线中可见，当 σ 值越小，曲线越尖锐。这说明小误差出现的概率大，而大误差出现的概率小。因此测量值的标准误差 σ 可用来作为衡量测量值精密度的标准。

σ 并不是一个具体的误差，σ 数值大小只是说明在一定条件下进行一列等精度测量时随机误差出现的概念率密度分布情况。在不同条件下进行的另一列等精度测量，一般说来，则具有不同的 σ 值。

根据概率论计算公式可求出误差出现在 $\pm\sigma$，$\pm2\sigma$，$\pm3\sigma$ 区间的概率如下：

$|\Delta x|\angle\sigma$　概率 P 为 68.27%

$|\Delta x|\leqslant 2\sigma$　概率 P 为 95.45%

$|\Delta x|\leqslant 3\sigma$　概率 P 为 99.73%

可见随机误差 $\Delta x>3\sigma$ 的概率仅为 0.27%，则可以为超出 $\pm3\sigma$ 的误差一定不属于随机误差，而为系统误差或过失误差。因此，常把 $\Delta x=\pm3\sigma$ 作为极限误差：$\Delta x_{\lim}=\pm3\sigma$。

2.4.4　有限测定次数中误差的计算

在没有系统误差存在的条件下，当测量次数为无穷大时，所得平均值为真值。然而，在实际测量中，测量次数是有限的，所得平均值 $\bar{x}$ 只能近似于真值 A。因此，测量值 x_i 与真值 A 之差 $\Delta x_i=x_i-A$ 同测量值 x_i 与平均值 $\bar{x}$ 之差 $V_i=x_i-\bar{x}$ 是不相等的。

$\because\ \Delta x_i=x_i-A$

$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-A)=\sum_{i=1}^{n}x_i-nA$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-A=\bar{x}-A$

即 $\bar{x}=A+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$　(1-21)

又 $\because\ v_i=x_i-\bar{x}$

$\therefore\ v_i=x_i-(A+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i)=\Delta x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$

$v_i^2=\Delta x_i^2-2\Delta x_i(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i)+(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i)^2$

$\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2-\frac{2}{n}(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i)^2+n(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i)^2$

因在测量中正负误差出现的概率相等，故将 $(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i)^2$ 展开后，$\Delta x_1\Delta x_2$，$\Delta x_1\Delta x_3$，……为正负的数目相等，彼此相消，故得：

$$\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2+n\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2$$

$$\text{即}\ \sum_{i=1}^{n}v_i^2=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2 \tag{1-22}$$

式(1-22)表示在有限次数测量中，残差平方和永远小于绝对误差的平方和。按式(1-19)中标准误差的定义：$\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$

当测量次数有限时，时(1-22)代入上式后得：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} \tag{1-23}$$

式(1-23)称为贝塞尔公式。根据此式可由残条误差求得标准误差 σ。

另外，在有限次数测量中，算术平均值 $\bar{x}$ 与真值 A 之间总存在误差 $\lambda=\bar{x}-A$。由于算术平均值 $\bar{x}$ 仍然为正态分布函数，因此可以用算术平均值 $\bar{x}$ 的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 来表征 $\bar{x}$ 的精密度。

可以用上述同样的方法证明并得到：

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}} = \lambda \tag{1-24}$$

式(1-24)说明，算术平均值 $\bar{x}$ 的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 比测量值的标准误差 σ 小 $\sqrt{n}$ 倍。当测量次数 n 愈大时，算术平均值的误差越小，测量精度越高。并且，算术平均值 $\bar{x}$ 的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 等于算术平均值 $\bar{x}$ 对真值 A 的绝对误差 λ。

算术平均值 $\bar{x}$ 的极限误差 λ_{lim} 为其标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 的三倍，即

$$\lambda_{lim} = \pm 3\sigma_{\bar{x}} \tag{1-25}$$

应当注意，增加测量次数虽然可以提高测量精度，但由图 1-9 所示看出，在 $n=8\sim10$ 之前 $\sigma_{\bar{x}}$ 的减小很快，而当 $n=10\sim15$ 之后 $\sigma_{\bar{x}}$ 减小的速率明显减小。此时，测量次数愈大，也愈难保证测量条件的恒定，从而带来新的误差。因而在一般情况下取 $n=10$ 左右较为适宜。对要求严格的测量可取 $n=30$ 或以上。总之，要提高测量精度，应采用适当精度的仪器并选取适当的测量次数。

2.5　过失误差

过失误差的数值比较大，它对测量结果产生明显的歪曲，一旦发现含有过失误差的测量值，应予以剔除。

在判断某个测量值是否会有过失误差时，应作充分的分析和研究，并根据有关判断准则予以确定。通常使用的判断准则有以下几种：

1. 莱特准则(3σ 准则)

莱特准则的判断标准为若在测量列 x_i 中发现某测量值的残余误差 $|v_i|>3\sigma$，则该测量值予以剔除。

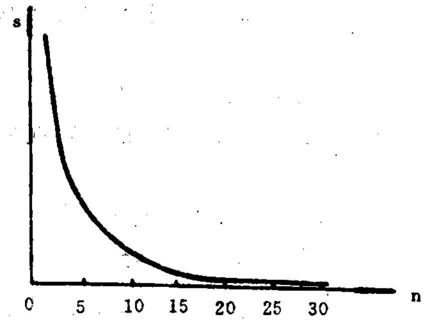

图 1-9　算术平均值标准误差与测量次数的关系

判定步骤如下：

(1)计算测量列 $x_1,x_2,\cdots,x_i\cdots,x_n$ 的算术平均值 $\bar{x}$。

(2)计算测量列的残余误差 $v_i=x_i-\bar{x}$。

(3)计算单次测量标准误差 $\sigma=\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$。

(4)判别、若第 i 个 $|v_i|>3\sigma$，则该测量值予以剔除。

(5)把剩下的$(n-1)$个测量值重复(1)、(2)、(3)、(4)计算。

莱特准则是常用的也是最简单的判别准则，但它只适用于测量次数充分大的场合，对于测

量次数较少的场合，它只是一个近似准则。

2. 肖维纳准则

肖维纳准则的判定步骤如下：

(1)计算 n 次等精度测量列 x_i 的算术平均值 $\bar{x}$ 和单次测量标准误差 σ。

(2)计算残差 v_i 与标准误差 σ 的比值$\frac{v_i}{\sigma}$。

(3)根据表 1-1 中的 n 与 c 决定可疑数据的取舍：当可疑数据的残差 v_i 与标准误差 σ 的比值大于表 1-1 中 c 值时，可将可疑数据舍弃。

表 1-1　　c 值

等精度测量次数 n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c	1.65	1.73	1.76	1.86	1.92	1.96	2.00	2.04	2.07	2.10	2.13	2.16	2.18	2.20	2.22	2.24

(4)把剩下的$(n-1)$个测量列重复(1)、(2)、(3)直到新的测量列的$\frac{v_i}{\sigma}<c$ 为止。

第三节　间接测量误差分析

柴油机测试中的某些参数是无法直接测量的，如柴油机指示功率、有效功率、燃油消耗率等等。这些量只能通过直接测量与被测量之间有一定函数关系的直接测量量，并按照已知的函数关系式计算出来。因此，间接测量量的最佳估值和标准误差等，必然与各直接测量量的最佳估值(算术平均值)和标准误差存在着固定的关系。将研究两者之间的关系的有关理论称为误差传递理论。把间接测量量的误差称为函数误差。

3.1　误差传递的一般公式

设 N 为间接测量量，它与各直接测量量 x、y、z、…的函数关系式为

$$N = f(x, y, z, \cdots) \tag{1-26}$$

令 $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots$分别表示各直接测量量 $x, y, z, \cdots$的绝对误差。设 ΔN 为间接测量量 N 由于 $\Delta x, \Delta y, \Delta z \cdots$所引起的绝对误差，则有：

$$N + \Delta N = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \cdots) \tag{1-27}$$

将右端按泰勒级数展开，并略去高阶项可得：

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \cdots) \\ & = f(x, y, z, \cdots) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \cdots \\ & + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(\Delta y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(\Delta z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \cdots + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots \\ & \approx f(x, y, z, \cdots) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \cdots \end{aligned} \tag{1-28}$$

对比(1-27)与(1-28)可得

$$\Delta N \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \cdots \tag{1-29}$$

若设间接测量量 N 的相对误差为 δ_N，则

$$\delta_N = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{N} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{N} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{N} + \cdots \tag{1-30}$$

3.2 间接测量量的算术平均值

设间接测量量 $N=f(x,y,z,\cdots)$ 中每一个直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 所进行的等精度测量次数为 n，其测量列为 $x_i(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)$，$y_i(y_1,y_2,y_3,\cdots y_n)$，$z_i(z_1,z_2,z_3,\cdots z_n)$，……而相应的随机误差为 $\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i,\cdots$，则有：

$$N+\Delta N_1=f(x,y,z,\cdots)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_1+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z_1+\cdots$$

$$N+\Delta N_2=f(x,y,z,\cdots)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_2+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_2+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z_2+\cdots$$

……

$$N+\Delta N_i=f(x,y,z,\cdots)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_i+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z_i+\cdots$$

将全式相加并除以等精度测量次数 n 便于可得算术平均值为：

$$\begin{aligned}\overline{N}&=N+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i\\&=f(x,y,z,\cdots)+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta y_i+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta z_i+\cdots\end{aligned}\tag{1-31}$$

根据算术平均值的定义可知：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\Delta\bar{x},\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta y_i=\Delta\bar{y},\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta z_i=\Delta\bar{z},\cdots$$

其中 $\Delta\bar{x},\Delta\bar{y},\Delta\bar{z},\cdots$ 分别为各直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 随机误差的算术平均值。因此，式(1-31)可改写成：

$$\overline{N}=f(x,y,z,\cdots)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta\bar{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta\bar{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta\bar{z}+\cdots\tag{1-32}$$

另一方面，若将各直接测量量的算术平均值 $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots$ 直接代入式(1-26)可得：

$$\begin{aligned}f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots)&=f(x+\Delta\bar{x},y+\Delta\bar{y},z+\Delta\bar{z},\cdots)\\&=f(x,y,z,\cdots)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta\bar{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta\bar{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta\bar{z}+\cdots\end{aligned}\tag{1-33}$$

对比式(1-32)和式(1-33)可得：

$$\overline{N}=f(\bar{x},\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots)\tag{1-34}$$

式(1-34)表明，只要将各直接测量量的算术平均值 $\bar{x},\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots$ 代入函数关系式(1-26)，便可求得间接测量量的算术平均值 $\overline{N}$。

3.3 间接测量量的标准误差

由式(1-29)可知，间接测量量的绝对误差可以写成：

$$\Delta N_i=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_i+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z_i+\cdots$$

将两端平方后得：

$$\begin{aligned}(\Delta N_i)^2=&\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\Delta x_i)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\Delta y_i)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2(\Delta z_i)^2+\\&\cdots+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x_i)(\Delta y_i)+\cdots\end{aligned}\tag{1-35}$$

根据随机误差的偶然律公量可知，只要等精度测量次数 n 足够大，式(1-35)中各非平方项均可抵消，故可得：