水力学例题

Ⅰ. 明渠不稳定流瞬态法介法标例

题：某河流的一段流程，分为三个流段，其初始条件已知如表一，

表一

断面	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
S（公里）	0	4.14	7.4[illegible]	13.74
Z（公尺）	107.37	106.[illegible]	106.27	105.[illegible]
Q（公尺³/秒）	95.7	166.0	192.0	131.0

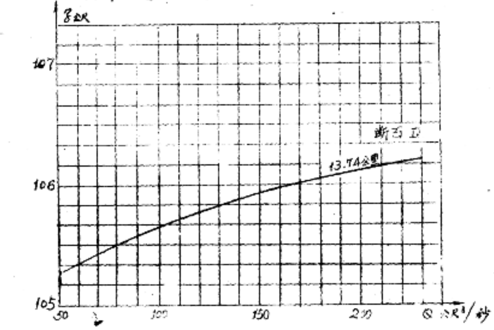
其边界条件为：

第一边界条件：——已知第Ⅰ个断面的流量过程线即（Q—t）曲线（在本题中，此曲线未给出），

当 $t=0$ 分钟时，　$Q=95.7$　公尺³/秒，

当 $t=60$ 分钟时，　$Q=61.0$　公尺³/秒，

第二边界条件：——已知最后一个断面即第Ⅳ个断面的水位流量曲线即（Z—Q）曲线，如图1示。

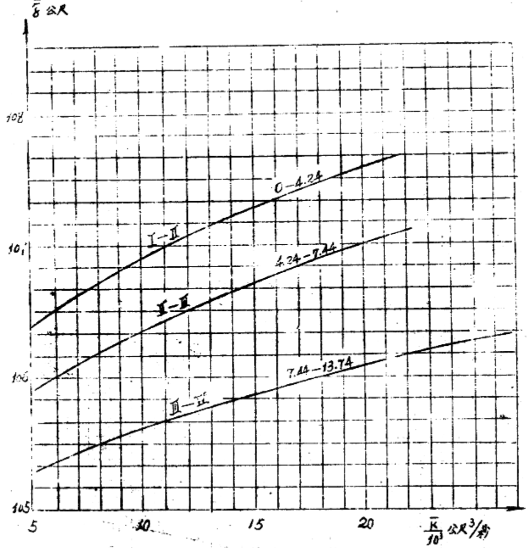


第1图　比例尺 Z: 0.3公分＝0.1公尺
Q: [illegible]＝10公尺³/秒

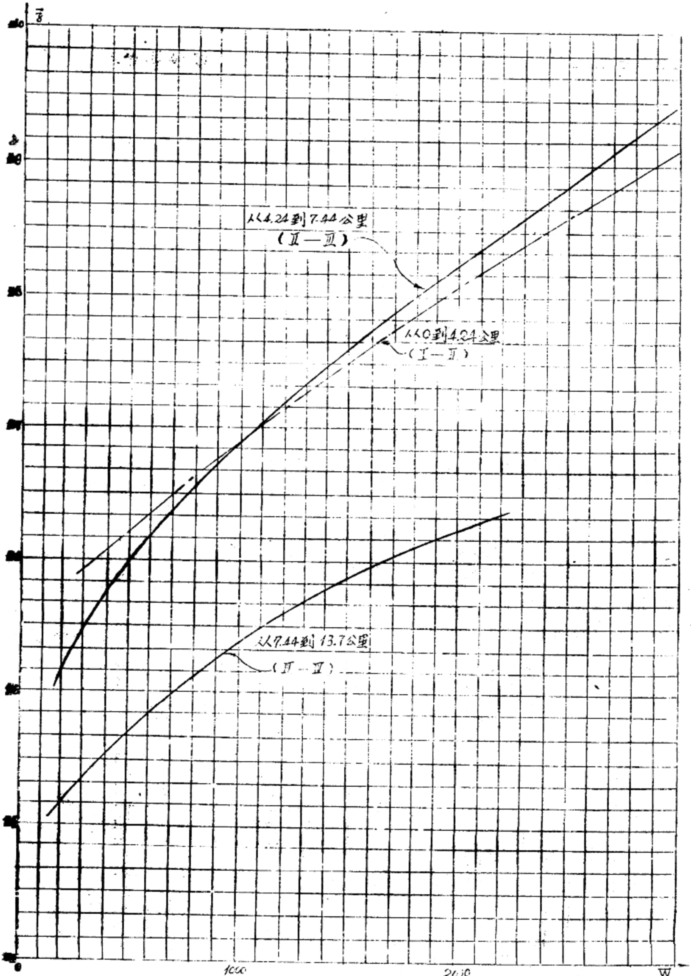
其他已知的水文测量资料如下：

i）每一个流段的流量模数（$\bar{K}$）与其平均水位（$\bar{z}$）的关系曲线即（$\bar{z}$－$\bar{K}$）曲线，如图2示。

ii）每一个流段的河槽容纳水的体积（W）与其平均水位（$\bar{z}$）的关系曲线即（$\bar{z}$－W）曲线，如图3示。



第2图　比例尺　$\bar{z}$：0.3＝0.1
$\bar{K}$：0.5＝1/10^3 公尺^3/秒．



第3图　比例尺　Z：0.3公分＝0.1公尺
ω：0.5公分＝[illegible]公尺³

求：当 $\Delta t=60$ 分钟时，各个断面的水位 (ζ) 及各个断面的流量 (Q) 为若干。

介：应用公式如下：

运动方程：　$\overline{Q}^{*}=\sqrt{\dfrac{2}{\Delta S}}\ \overline{K}^{*}\sqrt{\zeta_{+}^{*}-\overline{\zeta}^{*}}$ ，

連续性方程：　$\overline{Q}^{*}=(Q_{+}^{*}+S_{*})-\dfrac{\overline{W}^{*}}{\Delta t}$ ，

$$S_{*}=\frac{Q_{+*}-Q_{-*}}{2}+\frac{W_{*}}{\Delta t},$$

而　$Q_{-}^{*}=2\overline{Q}^{*}-Q_{+}^{*}$.

$\zeta_{-}^{*}=2\overline{\zeta}^{*}-\zeta_{+}^{*}$.

第1河段的計算：

绘制运动方程曲线：

$\Delta S=4.24-0=4.24$ 公里 $=4240$ 公尺 .

$$\overline{Q}^{*}=\sqrt{\frac{2}{4240}}\ \overline{K}^{*}\sqrt{\zeta_{+}^{*}-\overline{\zeta}^{*}}=0.022\,\overline{K}^{*}\sqrt{\zeta_{+}^{*}-\overline{\zeta}^{*}}$$

如以 ζ_{+}^{*} 为参数，任意给出 $\overline{\zeta}^{*}$ 值，由图2 $(\overline{\zeta}-\overline{K})$ 曲线可查得 $\overline{K}^{*}$ 值，由图3 $(\overline{\zeta}-\overline{W})$ 曲线可查得 $\overline{W}$ 值，代入上式即計算相应於各个 $\overline{\zeta}^{*}$ 值的 $\overline{Q}^{*}$ 值，列表計算如表二．

表二

$\overline{\zeta}^{*}$ (公尺)		107.4	107.3	107.2	107.1	107.0	106.9	106.8	106.7	106.6	106.5
$\dfrac{\overline{K}^{*}}{10^3}$ $\left(\dfrac{公尺^3}{秒}\right)$		16.7	15.2	13.7	12.4	11.5	10.2	9.05	7.96	7.04	6.1
$0.022\,\overline{K}^{*}$ $\left(\dfrac{公尺^3}{秒}\right)$		368	334	301	273	253	224	201	175	155	134
$\overline{Q}^{*}$ $\left(\dfrac{公尺^3}{秒}\right)$	ζ_{+}^{*} 公尺 $=107.4$		105.5	134.5	149.5	160.0	158.5	156.0	146.5	139.0	127.0
	107.3			95.0	122.0	138.5	141.5	142.0	135.5	130.0	120.0
	107.2				86.2	113	123	127	124	122	112
	107.1					79.8	100.0	110.0	111.0	109.5	104.0
	107.0						70.6	90	95.7	98	94.6

将表二的数据绘制运动方程曲线，如图4。

绘制連續性方程曲线：

由於题给，第一边界条件，当 $\Delta t=60$ 分钟时第二个断面的 $Q=61.0\ \frac{公尺^3}{秒}$，即 $Q_{+}^{*}=61.0$ 公尺³/秒

而

$$Q_{+*}=95.7\ 公尺^3/秒$$

$$Q_{-*}=166.0\ 公尺^3/秒$$

$$\therefore\quad \frac{Q_{+*}-Q_{-*}}{2}=\frac{95.7-166.0}{2}=-35\ 公尺^3/秒$$

$$\zeta_{+*}=107.37\ 公尺$$

$$\zeta_{-*}=106.95\ 公尺$$

$$\bar{\zeta}_{*}=\frac{\zeta_{+*}+\zeta_{-*}}{2}=\frac{107.37+106.95}{2}=107.16\ 公尺$$

由图3，查（$\bar{\zeta}-W$）曲线，当 $\bar{\zeta}_{*}=107.16$ 公尺得

$$\frac{W_{*}}{10^3}=1200$$

$$\therefore\quad W_{*}=1200\times10^3$$

$$\frac{W_{*}}{\Delta t}=\frac{1200\times10^3}{60\times60}=334\ 公尺^3/秒$$

$$\therefore\quad S_{*}=\frac{Q_{+*}-Q_{-*}}{2}+\frac{W_{*}}{\Delta t}=-35+334=299\ 公尺^3/秒$$

$$\therefore\quad (Q_{+}^{*}+S_{*})=61.0+299=360\ (公尺^3/秒)$$

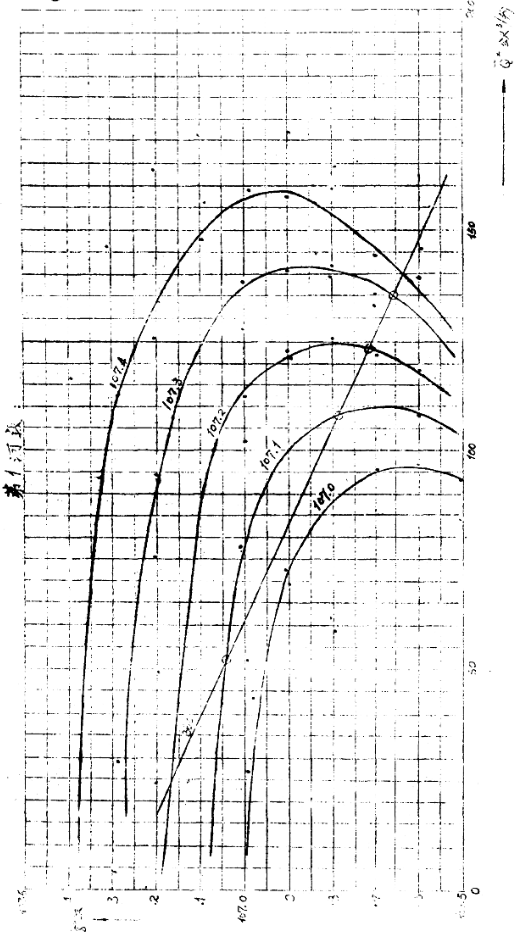
故連續性方程曲线肯定为一根曲线

列表計标如表三

表三

$\bar{\zeta}^{*}$（公尺）	107.3	107.2	107.1	107.0	106.9	106.8	106.7	106.6	106.5
$\frac{W^{*}}{10^3}$（公尺³）	1330	1260	1150	1070	1100	960	870	760	700
$\frac{W^{*}}{\Delta t}$（公尺³/秒）	370	350	320	298	278	266	242	212	195
$\bar{Q}^{*}$（公尺³/秒） $(Q_{+}^{*}+S_{*})=360$		10	40	62	82	94	118	148	[illegible]

将表三数据绘制連續性方程曲线如图4。



第4図

关於（ζ_+^*—Q_-^*）曲線及（ζ_-^*—Q_-^*）曲线的绘制：

由图4中一组曲線的相交点即为前题的介。由图4中交点可得出 $\bar{Q}^*$ 值及 $\bar{\zeta}^*$ 值。再应用下列公式計算：

$$Q_-^* = 2\bar{Q}^* - Q_+^* \;;$$

$$Q_+^* = 61.0 \quad 公尺^3/秒 .$$

$$\zeta_-^* = 2\bar{\zeta}^* - \zeta_+^*$$

列表計算如表四.

表四

流段	（ζ_+^*）值的运动方程曲線（公尺）	Q_+^* 值（公尺³/秒）	（$Q_+^*+S_*$）值的連續性方程曲線（公尺³/秒）	$\bar{Q}^*$ 值（公尺³/秒）	$\bar{\zeta}^*$ 值（公尺）	Q_-^*（公尺³/秒）	ζ_-^*（公尺）
1	107.3	61	360	135	106.66	209	106.[illegible]
	107.2	61	360	123	106.72	18[illegible]	[illegible]
	107.1	61	360	107.5	106.79	154	106.48
				51	107.04	41	106.98
2	106.7	112	325	144	106.[illegible]	176	105.98
				106	106.59	104	106.18
	106.5	90	303	151	106.16	[illegible]	[illegible]
				[illegible]	105.76	19	106.[illegible]
3	106.3	137	600	181	[illegible]	225	105.[illegible]
				78	106.27	19	[illegible]
	106.25	144	607	164	[illegible]	18[illegible]	105.75
				110	106.[illegible]	76	106.13

將表四中第1河段部分的数据绘成两根曲线，则（$\zeta_+^*-Q_-^*$）曲线如图5中的虚线1，及（$\zeta_-^*-Q_-^*$）曲线如图5中的实线1.

（图5见 P.9）

第2河段的計标

运动方程曲線：

$$\Delta S = 7.44 - 4.27 = 3.20\ 公里 = 3200公尺.\ 而\sqrt{\frac{2}{3200}} = 0.025.$$

$$\therefore\quad \overline{Q}^* = 0.025\,\overline{K}^*\sqrt{Z_+^* - \overline{Z}^*}$$

計标列如表五．

表五

$\overline{Z}^*$(公尺)		106.9	106.8	106.7	106.6	106.5	106.4	106.3	106.2	106.1	106.0
$\frac{\overline{K}^*}{10^3}$(公尺³/秒)		18.2	16.3	14.6	13.1	11.6	10.2	9.25	7.95	6.95	5.9
$0.025\,\overline{K}^*$(公尺³/秒)		455	408	364	330	292	255	229	199	174	148
$\overline{Q}^*$ 公尺³/秒	$Z_+^*=107.0$(公尺)	144	182	199	208	206	197	191	178	165	148
	106.9		129	163	180	135	180	177	166	156	140
	106.8			115	147.5	160	161.5	162	154	145.5	132.5
	106.7				104	130	140	145	141	135	124
	106.6					92	115	125	126	125	115

將上表数据绘制运动方程曲线如叄6連續性方程曲线：

因 Q_+^* 为未知，故（$Q_+^* + S_*$）値未能確定，以绘制运动方程曲线的 Z_+^*値，求其相对应的 Q_+^* 值．

显然，第1河段的（$Z_-^* - Q_-^*$）$_1$ 曲线，恰好是第2河段的（$Z_+^* - Q_+^*$）$_2$ 曲线。而第1河段的（$Z_-^* - Q_-^*$）$_1$ 曲线已绘好在叄5中，故可由 Z_+^* 值从叄5（$Z_-^* - Q_-^*$）$_1$ 曲线查得相应的 Q_+^* 值．

$$\frac{Q_{+*} - Q_{-*}}{2} = \frac{166.0 - 192.0}{2} = -13\quad 公尺^3/秒$$

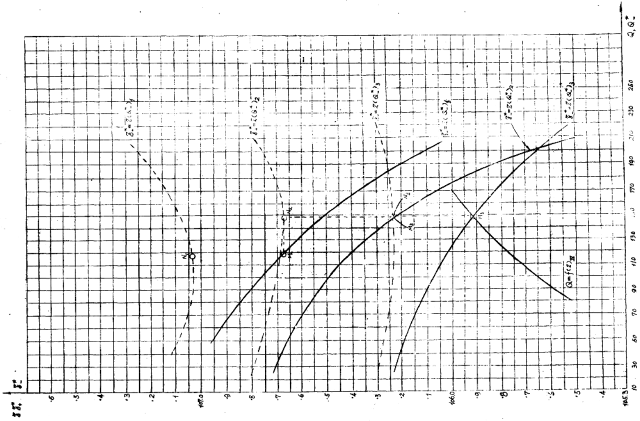
$$\overline{Z}_* = \frac{106.95 + 106.27}{2} = 106.61\ 公尺$$

当 $\overline{Z}_* = 106.61$ 公尺时，由叄3得

$$\overline{W}_* = 810 \times 10^3$$

$$\frac{\overline{W}_*}{\Delta t} = \frac{810 \times 10^3}{60 \times 60} = 225:$$

$$\therefore\quad S_* = -13 + 225 = 212.$$



比例尺 Z_+^*, Z_-^*, Z: 1公分 = 0.1公尺
Q: 1公分 = 20 $\frac{公尺^3}{秒}$

第5图

由表五采用的 $\bar{z}_{+}^{*}$ 值计标其相应的 Q_{+}^{*} 以及 $(Q_{+}^{*}+S_{+})$ 值如表六。

表六

$\bar{z}_{+}^{*}$(公尺)	Q_{+}^{*}(公尺³/秒)	$(Q_{+}^{*}+S_{+})$(公尺³/秒)
107.0	38	[illegible]
106.9	63	275
106.8	91	303
106.7	113	325
[illegible]	138	[illegible]

连续性方程的计标如表七。

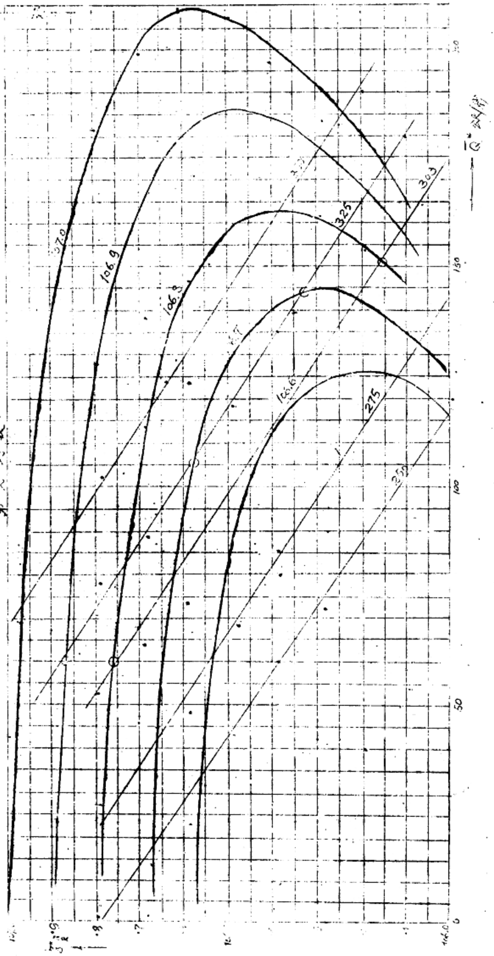
$$\bar{Q}^{*}=(Q_{+}^{*}+S_{+})-\frac{W^{*}}{\Delta t}$$

表七

$\bar{z}^{*}$(公尺)		106.8	106.7	106.6	106.5	106.4	106.3	106.2	106.1
$\frac{W^{*}}{10^{3}}$(公尺³)		890	850	815	740	685	629	596	536
$\frac{W^{*}}{\Delta t}$(公尺³/秒)		247	236	226	206	190	175	160	146
$\bar{Q}^{*}$(公尺³/秒)	$(Q_{+}^{*}+S_{+})=325$	78	89	99	119	135	150	165	179
	303	56	67	77	97	113	128	143	157
	275	28	39	49	65	85	[illegible]	116	129
	250	3	14	24	44	[illegible]	75	90	104

用上表数据绘制连续性方程曲线如图6。

应用图6的一组曲线可计标第2河段的 $(\bar{z}_{+}^{*}-Q_{+}^{*})$ 曲线及 $(\bar{z}_{+}^{*}-Q_{+}^{*})$ 曲线的数据，列於表四中，曲线绘于图5中



第6図

第3河段的計祘：

运动方程曲綫：

$$\Delta S = 13.74 - 7.44 = 6.30\ 公里 = 6300\ 公尺$$

而 $\sqrt{\frac{2}{6300}} = 0.018$

$$\therefore\ \overline{Q}^* = 0.018\,\overline{K}^*\sqrt{\overline{Z}_+^* - \overline{Z}^*}$$

計祘如表八.

表八

$\overline{Z}^*$（公尺）		106.2	106.1	106.0	105.9	105.8	105.7	105.6
$\frac{\overline{K}^*}{10^3}$（$\frac{公尺^3}{秒}$）		23.5	20.7	18.5	15.9	13.7	11.5	9.3
$0.018\,\overline{K}^*$（$\frac{公尺^3}{秒}$）		423	372	332	286	246	207	167
$\overline{Q}^*$（$\frac{公尺^3}{秒}$）	$Z_+^* = 106.3$（公尺）	143.5	166	181	181	173	160	
	106.25	100	147	164	168	164	154	
	106.2		117.5	148.5	156.5	155.5	146.5	129.5
	106.1			105	128	135	131	118

將上表数据繪成运动方程曲綫如圖7。連续性方程曲线：

第3段的情况同第二段，故用第二段的計祘方法。

$$\frac{Q_{+*} - Q_{-*}}{2} = \frac{192.0 - 131}{2} = 30.5 \quad \frac{公尺^3}{秒}$$

$$Z_* = \frac{106.27 + 105.60}{2} = 105.94$$

$$W_* = 1530 \times 10^3$$

$$\frac{W_*}{\Delta t} = \frac{1530 \times 10^3}{60 \times 60} = 425$$

$$S_* = 30.5 + 425 = 456.$$

应用圖5（$Z_-^* - Q_-^*$）$_2$曲綫即为（$Z_+^* - Q_+^*$）$_3$曲綫，由 Z_+^* 值求 Q_+^* 值，（$Q_+^* + S_*$）值計祘如表九

表九

Z^*_+ (公尺)	Q^*_+ (公尺³/秒)	$(Q^*_+ + S_*)$ (公尺³/秒)
106.30	137	593
106.25	144	600
106.20	151	607
106.10	163	619

連續性方程的計算如表十

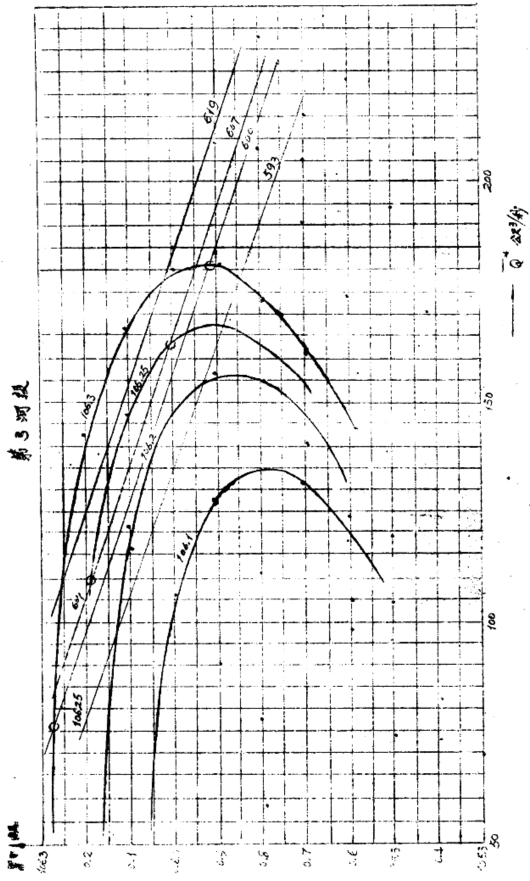
$$\bar{Q}^* = (Q^*_+ + S_*) - \frac{\bar{W}^*}{\Delta t}$$

表十

$\bar{Z}^*$ (公尺)		106.1	106.0	105.9	105.8	105.7	105.6	105.5	107.4
$\frac{\bar{W}^*}{10^3}$ (公尺³)		1720	1590	1500	1410	1300	1180	1100	1000
$\frac{\bar{W}^*}{\Delta t}$ (公尺³/秒)		478	440	416	392	360	327	306	278
$\bar{Q}^*$ (公尺³/秒)	$(Q^*_+ + S_*)$ = 619 (公尺³/秒)	141	179	203	227	259	292	313	341
	607	129	167	191	215	247	280	301	329
	600	122	160	184	208	240	273	294	322
	593	115	[illegible]	[illegible]	201	233	266	287	315

將上表数据绘成連续性方程曲线，如图7：

应用图7的一组曲线，計算第3河段的$(Z^*_+ - Q^*_-)_3$曲线及$(Z^*_- - Q^*_-)_3$曲线如表四，曲线绘於图5中。


第3测段
619
607
606
593
106.3
106.25
106.2
106.1
601
106.25
50
100
150
200
Q 公升/秒

第十图

最后，将第二边界条件（$z-Q$）$_{III}$曲线亦绘於图5中，则此曲线与（$z_2^*-Q_2^*$）$_3$的交点，即为符合边界条件的解，此时的z及Q即为最后一个断面（第IV个断面）於本时段$\Delta t=60$分时求的水位流量值。

从图5中作水平及铅直线，与各曲线相交，即可得出$\Delta t=60$分钟时的各个断面的水位与流量。如表十一。

$\Delta t=60$分钟：　　　　表十一

断面	I	II	III	IV
S 公里	0	4.24	7.44	13.74
z 公尺	107.04	106.68	106.23	105.91
Q $\frac{公尺^3}{秒}$	61	117	145	148

水力学(下)例題部份

Ⅱ 水躍

① 有一底宽 $b=7.0$ 公尺，边坡係数 $m=1$ 的梯形断面如图Ⅰ水平底坡（$i=0$）的棱柱体渠道，通过的流量 $Q=54.3$ 公尺^3/秒，在渠道中发生一完整水躍，水躍前的水深 $h'=0.8$ 公尺，求；

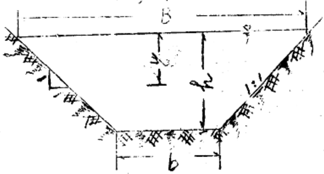
i, 用已学过的各种方法，求其对应的水躍後水深 $h''=$？

ii, 水躍的高度 $a=$？

iii, 水躍的長度 $l_{\pi}=$？

iv, 水躍的能量損失 $E_n=$？

梯形断面图



〔图Ⅰ〕

答：i, 求 h'' 之值

甲，用 $h \sim \theta$ 曲线求之，

$$\omega=(b+mh)h$$

$$\therefore \omega=(7+h)h$$

$$y=\frac{h}{6}\times\frac{3b+2mh}{b+mh}$$

$$\therefore y=\frac{h}{6}\times\frac{3\times7+2\times1\times h}{7+1\times h}=\frac{h(21+2h)}{6\times(7+h)}$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{1.1\times(54.3)^2}{9.81}=331.0$$

水躍方程；$\theta(h)=\omega y+\dfrac{\alpha Q^2}{g\omega}$

以不同的水深 h 值计标 $\theta(h)$ 值列表如下，表Ⅰ，

表Ⅰ，

h (公尺)	$7+h$ (公尺)	$\omega=h(7+h)$ (公尺)^2	$2h$ (公尺)	$21+2h$ (公尺)	$y=\frac{h}{6}\cdot\frac{21+2h}{7+h}$ (公尺)	ωy (公尺)^3	$\frac{\alpha Q^2}{g\omega}$ (公尺)^3	$\theta(h)$ (公尺)^3
0.5	7.5	3.75	1.0	22.0	0.244	0.915	88.20	89.12
0.8	7.8	6.24	1.6	22.6	0.252	1.515	53.10	54.68
1.0	8.0	8.00	2.0	23.0	0.478	3.82	41.45	45.27
1.5	8.5	12.78	3.0	24.0	0.705	9.00	26.08	35.08
1.73	8.73	15.10	[illegible]	24.46	0.811	13.30	21.90	35.20