大學叢書

工程力學

下册

陸志鴻編

商務印書館發行

大學叢書

工程力學

下　册

大學叢書

工程力學

下册

陸志鴻編

商務印書館發行

中華民國二十六年六月初版　　周

一一四五上

⊕(61248·1平)

大學叢書(教本)工程力學一冊

平裝每部實價國幣叁元伍角
外埠酌加運費匯費

編纂者　陸志鴻

發行人　王雲五　上海河南路

印刷所　商務印書館　上海河南路

發行所　商務印書館　上海及各埠

(本書校對者王煊蕃)

大學叢書委員會

委　員

第二篇

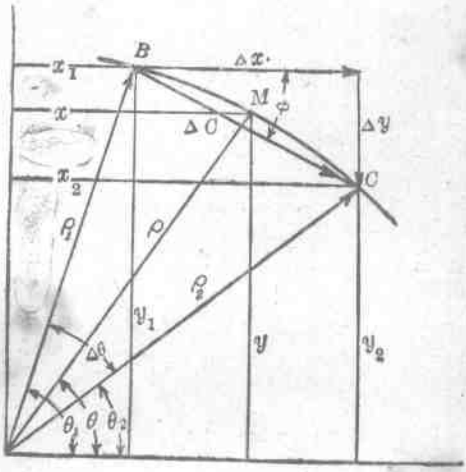
運動學

第九章　質點之運動

118. 概說　**運動學**(Kine matics 專論物體之運動,而不論及使物體運動之力,與物體自身之質量.將物體視爲幾何學上之形體.運動學上所論者爲距離,時間,速度,加速度等關係.物體爲質點所構成,論物體之運動時,先須論質點之運動,此質點可視之爲幾何學上之一點,卽無大小與質量之一點也.

質點沿直線上運動時,其運動爲**直線運動**(Rectilinear motion),沿曲線上運動時,其運動爲**曲線運動**(Curvilinear motion).質點於相等時間內經過相等距離時,此運動稱曰**等速運動**(Uniform motion).若質點於相等時間內所經過距離不相等時,此運動稱曰**變速運動**(Non-uniform motion).例如一蒸汽機其曲柄軸(Crank shrft)每分間有一定迴轉數(Number of revolutions),則其叉頭(Cross head)有變速直線運動,曲柄銷釘(Crank pin)有等速曲線運動,而連接桿(Connecting rod)上其他諸點有變速曲線運動.

119. 線變位 在運動中之質點,其位置變化之量,稱曰變位(Displacement). 運動中之質點,其任何瞬間之位置可以直交座標(Rectangular coordinates)或極座標(Polar coordinates)表示之. 例如第410圖中質點M沿曲線上自B運動至C,其任意瞬間之位置可以座標x,y或ρ,θ表示之.質點自B之位置(x_1, y_1或ρ_1, θ_1)運動至C之位置(x_2, y_2或ρ_2, θ_2)時,其間所有直線距離$\overline{BC}$之長卽表示該兩點間變位之大小,而向線$\overrightarrow{BC}$乃表示該兩點間變位之大小及方向.卽變位亦爲向量.此變位$\overrightarrow{BC}$稱曰線變位(Linear displacement).



第410圖

變位$\overrightarrow{BC}$設以ΔC表之,其向量可分解成爲x, y二方向上之向量,卽以向量和(Vector sum)之式表示之如下:

$$\Delta C = \Delta x \nrightarrow \Delta y$$

但記號$\nrightarrow$表示向量之相加,如求合力時所用三角形定律之方法將數個向量由幾何學上作圖法而求其合成向量.同樣記號$\rightarrow$用以表示向量之相減,卽向量差(Vector difference).

又$\Delta x = x_2 - x_1$爲x方向上之變位,$\Delta y = y_2 - y_1$爲y方向上之

變位.如是則變位 $\overrightarrow{BC}$ 之大小爲

$$\Delta C=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

變位 $\overrightarrow{BC}$ 與 x 軸所成之角度爲

$$\tan\phi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

同樣,變位 $\overrightarrow{BC}$ 亦可以向量差之式表之如下:

$$\Delta C=\rho_2\rightarrow\rho_1$$

而變位 $\overrightarrow{BC}$ 之大小又可以下式示之.

$$\Delta C=\sqrt{\rho_1{}^2+\rho_2{}^2-2\rho_1\rho_2\cos\Delta\theta}$$

變位之單位卽用長度之單位,如 cm., m., km., in., ft. 等等.變位可如合力與分力時,同樣用平行四邊形或三角形定律,合成之或分解之.

若物體之變位減成極小,卽第410圖中 C 點與 B 點甚接近,則其極限可使弦 ΔC 與 B 點上曲線之切線相一致,故質點沿曲線上運動時,其任意一點上運動之方向與曲線上該點相切.

120. 角變位 在運動中之質點,其**角變位**(Angular displacement)者乃該點上動徑(Radius vector)與他基準線(Reference line)所成之角度是也.故第410圖中與線變位 ΔC 相應之角變位 $\Delta\theta$ 爲

$$\Delta\theta=\theta_1-\theta_2$$

角變位之單位與角度之單位同.如度數,迴轉數,或弧度

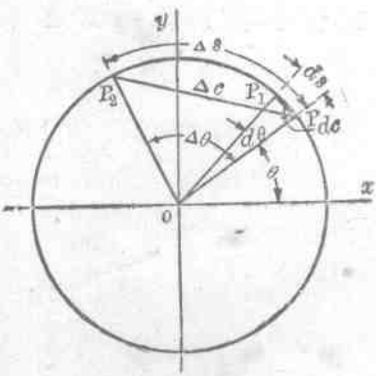
(Radian) 等是也.但一質點之角變位,因所取基準點 (Reference point) 或極點 (Pole) 而不同. 動徑即視爲迴轉於此極點之周圍. 若質點運動於圓弧上時,則卽取該圓半徑爲動徑,而取該圓中心爲極點.

121. 線變位與角變位間之關係　一質點若運動於圓弧上, P, P_1 二點設爲圓弧上相離極近之二點,其線變位設爲 dc, 其相應之角變位設爲 $d\theta$, 該圓弧半徑設爲 r, 因 dc 與圓弧之長 ds 略相等, 故

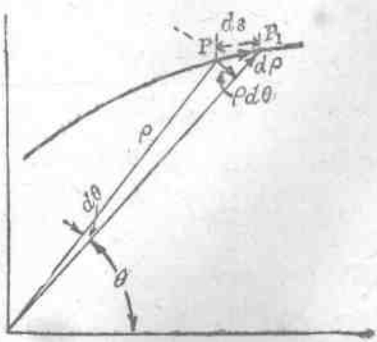
$$dc = ds = r d\theta$$

若 P, P_2 二點相離非極近時, 則線變位 Δc 不等於 $r\,\Delta\theta$, 但 Δs 仍等於 $r\,\Delta\theta$

若質點非運動於圓弧上, 卽質點徑路 (path) 之曲度半徑 (Radius of curvature) 非爲一定時, 則對於徑路上某點之曲度半徑設爲 r,取該點上曲度中心 (Center of curvature) 爲極點在



第 411 圖



第 412 圖

該點附近 $dc=ds=rd\theta$ 之式仍可應用.

若極點不取於曲度中心上,如第412圖所示,取於座標軸之原點,則極近兩點 P, P_1 間之線變位可以下式表示之.

$$dc=ds=\rho d\theta \nrightarrow d\rho$$

卽分解爲互成直角之二變位以示之.上式中 ρ 爲 P 點之動徑,非爲該點上之曲度半徑.

122. 線速度與速 在運動中之質點,其**線速度** (Linear velocity) 者乃該質點之位置變化對於時間之比率,卽線變位對於時間之比率也.質點徑路上某點之速度方向卽與該點上運動方向相同,故卽於該點上與徑路之曲線相切.換言之速度亦爲向量,卽有大小與方向之量.速度之大小稱爲該質點之**速** (Speed),故速爲僅有大小而無方向之量,卽爲度量.換言之,速者乃質點所徑距離對於時間之比率,非爲變位對於時間之比率也.

質點若沿任意之徑路爲等速運動時,設於 Δt 時間內經過 Δs 之距離,則該質點之速 v 如下,但 Δs 爲直線距離,卽曲線上兩點間之弦長.

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

質點若沿直線或曲線上爲等速運動時,其速爲一定.但速度則僅對於直線等速運動時爲一定,蓋此時速度之方向不變而其大小亦不變.若對於曲線等速運動,則速度非一定,

因速度之方向隨處變化故也.

若質點爲變速運動時,則(1)式不能表示 Δt 時間內各點上之速,僅能表示在該時間內之平均速.各瞬間之速隨時變化.若時間縮爲極短時,則該時間內之平均速可視爲該瞬間之速.設某瞬間之速爲 v,則

$$v=\lim_{\Delta \doteq \Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

此 v 之方向,卽與徑路相切於該瞬間內質點所佔之點上.

凡任何瞬間內速度相等之運動,卽速度之大小與方向無變化,質點沿一直線進行之運動稱曰**等速度運動** (Motion with uniform velocity). 否則稱爲**變速度運動** (Motion with non-uniform velocity).

速度之單位以 ft/sec., mi/hr., cm/sec. 等示之. (2) 式若取微分而求 v 時,則須先將 s 寫成 t 之函數.

例 1. 一質點進行於直線上,其變位與時間之關係爲 $s=3t^2+2t+\dfrac{1}{t}$, 但 s 以 cm., t 以秒表示之. 問 2 秒後該點之速度.

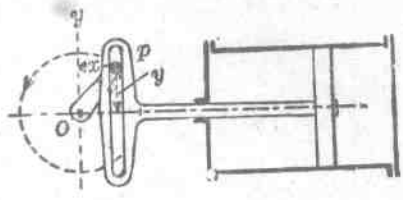
解 $v=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(3t^2+2t+\dfrac{1}{t}\right)=6t+2-\dfrac{1}{t^2}$

$t=2$ 秒時

$$v=6\times 2+2-\frac{1}{2^2}=13.75 \text{ cm/sec.}$$

例 2 第 413 圖示一史高基式叉頭 (Scotch crosshead), 當曲

柄 (Crank) 廻轉時,活塞 (Piston) 前後運動於直線上.設曲柄銷釘 (Crank pin) P 之位置爲 x, y; 曲柄長 OP 爲 r,每單位時間內曲柄之廻轉數爲 n, 求活塞速度之一般公式又設 $r=22.5$ cm., $n=150$ r. p. m.



第 413 圖

求 (i) $x=7.5$ cm.; y 爲正; 及 (ii) $x=7.5$ cm., y 爲負時活塞之度度.但曲柄之廻轉爲反時針方向.

解 今取活塞衝程(Stroke)中點爲原點,自此點活塞之變位設爲 s, 且該點取爲時間 t 之起點. 先求 s 與 t 之關係式如下. 設 θ 爲曲柄與水平所成之角,每單位時間內曲柄銷釘 P 之角度變爲 $2\pi n$ (弧度),故時間 t 後 P 之角變位即

$$\theta=2\pi nt, \qquad \text{但 } s=x, \quad x=r\cos\theta,$$

$$\therefore \quad s=r\cos 2\pi nt \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

對於 t 取微分,得

$$v=-2\pi nr\sin 2\pi nt \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

或由 (1) 式得

$$\sin 2\pi nt=\sqrt{1-(\cos 2\pi nt)^2}=\sqrt{1-\frac{s^2}{r^2}},$$

故得

$$v=-2\pi nr\sqrt{1-\frac{s^2}{r^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此即爲活塞速度以 s 表示時之一般公式.

若 $r=22.5$ cm., $n=150$ r. p. m.

則 (2) 式成爲 $v=-112.5\ \sin 5\pi t$

但 t 以秒表之, v 以 cm/sec. 表之,對於 (i) 之位置, 卽 $s=7.5$ cm.,

$$\theta=\cos^{-1}\frac{7.5}{22.5}=70°\,30', \qquad \therefore\ t=0.0782\text{ 秒},$$

代入 (2) 式得 $v=-333$ cm/sec.

此負號表示活塞向左運動. 對於 (ii) 之位置,

$$\theta=289°\,30', \qquad \therefore\ t=0.322\text{ 秒}$$

代入 (2) 式得 $v=333$ cm/sec.

此正號表示活塞向右運動.上之結果由 (3) 式求之亦同.

123. 角速度 在運動中之物體,其**角速度** (Angular velocity) 者乃該質點之角變位對於時間之比率是也. 若任何相等時間內其角變位皆相等時, 則於 Δt 時間內有角變位 $\Delta\theta$ 之質點, 其角速度 ω 爲

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

若相等時間內,角變位不相等時,則上式之 ω 僅表示 Δt 時間內之平均角速度. 此時極短時間內之平均角速度可視爲該瞬間之角速度, 卽

$$\omega=\lim_{\Delta t\doteq 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}$$

角速度之單位以 deg/sec., rad/sec., 或 r. p. m. 等表示之.

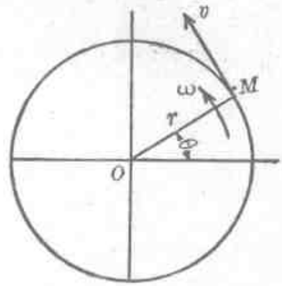
由上式求角速度時, 先須將 θ 寫成 t 之函數.

124. 線速度與角速度間之關係 分速度 設質點M運動於第414圖之圓周上,圓之半徑設爲r,設M點於某瞬間之線速度爲v,角速度爲ω,則

$$v=\frac{ds}{dt},\qquad \omega=\frac{d\theta}{dt}$$

由第414圖得

$$ds=rd\theta$$

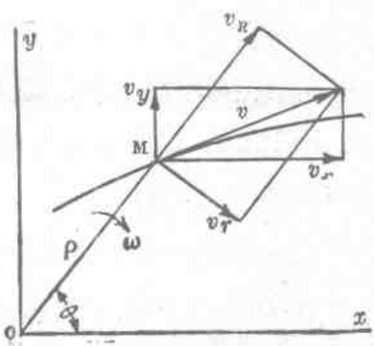


第414圖

$$\therefore\quad v=\frac{rd\theta}{dt}=r\omega \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

若質點不於圓周上運動,則視r爲質點徑路上該瞬間所佔位置之點之曲度半徑,ω爲對於該點上曲度中心爲極點時之角速度,上式$v=r\omega$仍可應用.

次設質點運動於任意之曲線徑路,而極點不取於曲度中心時,如第415圖,設ρ爲某瞬間時質點M所佔位置處之動徑.此時M處之線速度v與徑路相切,此速度可分成二個分速度 (Component of velocity).通常有二種分解方法,卽(i)分成平行於座標軸



第415圖

之軸向分速度(Axial components of velocity) v_x, v_y, v_z, 或 (ii) 分成

動徑方向之徑向分速度(Radial component of velocity) v_R 及與動徑成直角之橫向分速度 (Transverse component of velocity) v_T, 如圖所示因線速度乃位置變化對於時間之比率,故得下式.

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt} \cdots\cdots\cdots (2)$$

若 x, y, z 座標之變化爲均一時,則

$$v_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1},\quad v_y=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1},\quad v_z=\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}$$

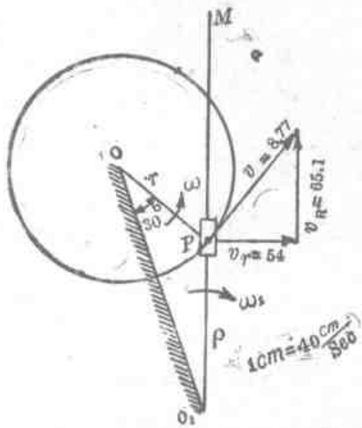
同樣得

$$v_R=\frac{d\rho}{dt},\quad v_T=\frac{\rho d\theta}{dt}=\rho\omega \cdots\cdots\cdots (3)$$

但 $d\rho$ 與 $d\theta$ 爲 dt 時間內質點沿徑方向及與動徑成直角方向之變位.而 ω 爲對於極點 O 之角速度.若極點取於曲度中心上時,則橫向分速度即爲總速度 v,而與徑路相切,徑向分速度 v_R 爲零.換言之若徑路爲圓弧而極點在於其中心上時,或極點在於任意曲線徑路之曲度中心上時,則 $d\rho$ 及 $\frac{d\rho}{dt}$ 皆爲零,而 v_T 與 v 相同,皆等於 $\rho\omega$.

因第415圖上之極點 O 爲任意取定者,故若極點改變時,M 點之 v_T 與 v_R 均有變動.但 M 點之 v_x, v_y, v_z 對於 O 點之位置無關係.苟座標軸方向不變時,此三分速度常爲一定.若爲平面運動時,則 v_z 爲零.

例1　第416圖所示之機構(Mechanism) O 與 O_1 爲固定. P 點運動於 O 之圓周上, O_1M 桿因之前後搖動於 O_1 點. 設 $\overline{OO_1}$ 爲 45 cm., 曲柄 $\overline{OP}$ 爲 20 cm., 曲柄之角速度爲 40 r. p. m., 求 P 點速度. 又試用圖解法求 P 點速度之直交於 O_1M 桿之分速度, 并求 O_1M 桿之角速度.



第 416 圖

解　設 P 點對於圓周中心 O 之角速度爲 ω, 對於 O_1 極點之角速度爲 ω_1, $\overline{OP}$ 之長爲 ρ, 則 P 點之線速度與圓周相切. 其大小如下:

$$v=\omega r=\frac{40\times 2\pi}{60}\times 20=87.7 \text{ cm/sec},$$

用作圖法將 v 分成二分速度,得

$$v_T=54 \text{ cm/sec.},\qquad v_R=65.1 \text{ cm/sec.}$$

但

$$v_T=\omega_1\rho=\omega_1\times O_1P,$$

但由三角形 OPO_1 解得

$$O_1P=29.5\text{cm}.$$

$$\therefore\quad \omega_1=\frac{54}{29.5}=1.83 \text{ rad/sec.}=17.6 \text{ r. p. m}$$

例2　一質點由原點出發,沿曲線 $y=\frac{1}{4}x^2$ 運動,使水平分速度常爲 2 m./sec. 求該質點在二秒末之速度.

解 因 $v_x=2$, $x=\int v_x dt=2t+C$, 因 $x=0$ 時, $t=0$, 故 $C=0$, 因之 $x=2t$, 又 $y=\frac{1}{4}x^2=t^2$, $v_y=\frac{d_y}{d_t}=2t$, 故 $t=2$ 時, $v_x=2$, 其方向向右. $v_y=4$, 其方向向上. 故速度 v 向右上方, 其大小爲

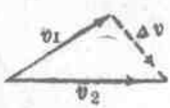
$$v=\sqrt{2^2+4^2}=4.47 \text{ m./sec.}$$

此速度與水平所成之角 θ 爲

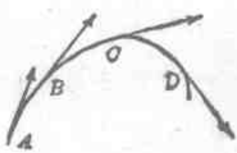
$$\theta=\tan^{-1}\frac{4}{2}=63^\circ 26'.$$

125. 線加速度 運動中一質點於某瞬間內之加速度者乃該瞬間質點之速度變化對於時間之比率是也.

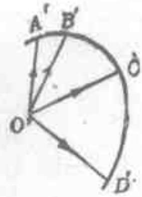
速度之方向及大小均有變化,某瞬間內變化之總量爲該瞬間內速度增量 (Velocity-increment). 其符號當然可有正負,設 $v_1=$ 初速度, $v_2=$ 終速度, $\Delta v=$ 速度增量, 則 $v_1 \dashv\!\!\!\rightarrow \Delta v=v_2$, $\Delta v=v_2 \rightarrow v_1$, 此關係可示於第417圖. Δv 非表示 v_2 與 v_1 間大小之相差. 速度由 v_1 變化爲 v_2 時,速度增量 Δv 非起於同一瞬間速度之變化乃於某時間內連續起生.第418圖中質點 P 沿曲線運動,次第經過 A, B, C, D 等點. 各點上作切線表示該點上



第 417 圖



第 418 圖



第 419 圖