# 数　　学

（三角函数与对数函数）

中国人民解放军海军水面舰艇学校

一九七五年十一月

# 毛主席语录

为了反对帝国主义的侵略，我们一定要建立强大的海军。

事物的矛盾法则，即对立统一的法则，是唯物辩证法的最根本的法则。

学制要缩短。课程设置要精简。教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

# 目　　录

# 第一章　函数和它的图象

## 第一节　函　　数

客观世界是在不断变化、不断运动和不断发展的，我们要认识它只有从变化中去考察。**“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”**。数学从数量方面反映事物（例如路程与时间、圆周长与半径、三角形的面积与底边和高等）之间联系的就是函数概念。

### 1·1. 常量与变量

例 1　海军某部战士遵照毛主席关于**“提高警惕、保卫祖国”**的号召，日夜巡逻在祖国辽阔的海疆。

若某舰以30节的航速从基地出发，到伏击海区待命，离开基地 $t$ 小时后的航程为 $S$ 浬。这里涉及到舰速、航行时间和航程三个量，在该舰航行的过程中，舰速这个量保持30节的数值不变，时间和航程这两个量则随着航行的继续而不断地改变着。

例 2　圆的周长 $l$ 和它的半径 $r$ 之间满足下列关系式：

$$l=2\pi r$$

圆的周长 $l$ 和半径 $r$ 这两个量，随圆的大小不同它们的数值也是不同的，而上式中 $r$ 的系数$2\pi$却并不改变（$2\pi=2\times3.14159\cdots$）。

从上面两个例子看，我们研究的量，根据它在研究过程中的特点，可以分为两类：即在研究的过程中，保持一定数值的量，叫做常量；在研究的过程中，可以取不同数值的量叫做变量。

例 3　如图 1·1，三角形的底边为 $BC$，顶点 $A$ 沿着平行于底边的直线移动。在顶点 $A$ 移动的过程中，三角形的两腰和各角的大小都是变量，而它的底边、高和面积的值保持不变，所以是常量。若三角形的顶点沿的是一条不平行于底边的直线移动，那末不仅它的两腰和各角的大小是变量，而且它的高和面积也是变量了。所以常量和变量不是绝对的，而是根据研究过程的一定条件来确定的，若条件变了，则常量可以转化为变量，变量也可以转化为常量。这就是说，观察自然现象和处理任何问题时，都需要根据当时的具体条件，作具体的分析。

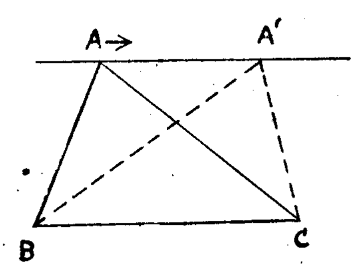



图 1·1

## 1·2. 函　　数

毛主席教导我们说："**每一事物的运动都和它的周围其它事物互相联系和互相影响着**"。作为反映客观事物变化的量也不例外，它们的变化不是孤立的，而是与另一些量通过一定关系，互相联系和影响着。如上面举的例 1 中，两个变量 $t$（航行时间）和 $S$（航程）之间满足下面的公式：

$$S=30t$$

（$t$ 的单位为小时，$S$ 的单位为浬），变量 $S$ 随变量 $t$ 的变化而变化，当变量 $t$ 取一个数值时，通过上面的公式，航程 $S$ 对应地有一个确定数值。又如例 2 中，圆周长 $l$ 和它的半径 $r$ 这两个变量间，满足公式：

$$l=2\pi r$$

变量 $l$ 随着变量 $r$ 的变化而变化，当圆的半径 $r$ 取一个数值时，通过上面的公式，圆周长 $l$ 的数值也相应地确定了。

下面的函数定义就是从数量方面反映事物联系的特点的。

定义　在某个变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$，变量 $y$ 随着变量 $x$ 的变化而变化，并且对于变量 $x$ 所能取的每一个数值，变量 $y$ 便有确定的对应值，则变量 $y$ 叫做变量 $x$ 的函数，$x$ 叫做自变量。

如上面例 1 中，$S=30t$　$S$ 是 $t$ 的函数，$t$ 是自变量；又如上面例 2 中，$l=2\pi r$，$l$ 是 $r$ 的函数，$r$ 是自变量。

再譬如，火炮发射时，随着发射角 $\theta$ 的变化，水平射程 $x$ 也跟着变化，这两个变量 $\theta$ 与 $x$ 之间存在着一定的关系，给发射角 $\theta$ 一个值，便可得出 $x$ 的一个对应值，所以说，水平射程 $x$ 是发射角 $\theta$ 的函数。

注："$y$ 是 $x$ 的函数"这句话，可以用符号 $y=f(x)$ 来表示。如航程 $S$ 是时间 $t$ 的函数，可以用 $S=f(t)$ 来表示；又如水平射程 $x$ 是发射角 $\theta$ 的函数，可以用 $x=f(\theta)$ 来表示。

## 1·3. 函数的公式表示法

自变量与函数之间的函数关系表示的方法很多，但不论用什么方法表示，一定要将由自变量的值求函数的对应值的方法给出。常用的有公式法、列表法和图象法。

函数的公式表示法就是用两个变量之间的一个公式来表示这两个变量之间的函数关系。如

$$S=30t,\ l=2\pi r,\ y=kx,\ y=3x^2+2x-1,$$

用公式表示法表示的函数，当给出自变量的值，通过公式的计算，便可得到对应的函数值。如函数 $y=3x^2+2x-1$，当 $x=1$ 时，则对应的函数值是 $y=3\times1^2+2\times1-1=4$。

## 1·4. 函数的列表表示法

列表表示法，就是把自变量的一部分数值和函数的对应值列成表格。例如，三角函数表就是用列表法表示三角函数，又如平方表就是用列表法表示 $y=x^2$ 的函数关系，平方根表就是用列表法表示 $y=\sqrt{x}$ 的函数关系等等。这种表示函数的方法在技术上和海军专业上得到广泛的应用。例如，当测者眼高 $e$ 变化时，视距 $D$ 也随之变化，即视距 $D$ 是眼高 $e$ 的函数，《航海表》中的表Ⅱ—8 就是用列表法表示了 $D$ 是 $e$ 的函数关系，下面我们摘录了其中的一部分：

| 眼高 $e$（米） | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 视距 $D$（浬） | 9.3 | 9.5 | 9.8 | 10.0 | 10.2 | 10.4 |

用列表法表示函数，当给出自变量的值，直接从表格中查出函数的对应值。如上面视距的例子，当眼高 $e=22$ 米时，查得视距 $D=9.8$ 浬；当眼高 $e=22.6$ 米时，用比例插值法算得 $D=9.9$ 浬（精确到 0.1 浬）。

## 1·5. 直角坐标

函数的图象表示法需要用到坐标概念。坐标概念在《代数式运算》的讲义中已经讲过，这里再重复一下，到下一段再讲函数的图象表示法。

在平面内，取两条互相垂直而且有公共原点的数轴 $XX'$ 和 $YY'$（图 1·2）。$XX'$ 叫做横轴或者 $X$ 轴，通常取向右的方向为正方向；$YY'$ 叫做纵轴或者 $Y$ 轴，通常取向上的方向为正方向。$X$ 轴和 $Y$ 轴统称坐标轴，它们的交点 $O$ 叫做坐标原点。两轴的单位可以不同，在数学中通常取成一致的。

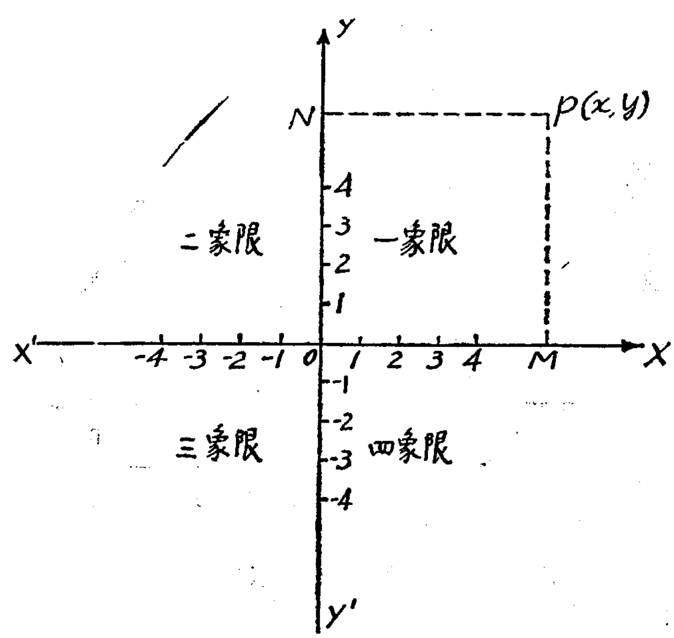


图 1·2

$X$ 轴和 $Y$ 轴把平面分成了四个部分，这四个部分依次叫做第一、二、三、四象限。

设 $P$ 是平面内的任一点，过 $P$ 向 $X$ 轴、$Y$ 轴作垂线，垂足分别为 $M$ 和 $N$，则 $OM$ 的长为 $x$（并规定当 $M$ 在原点右边时，$x$ 为正，

$M$在原点左边时，$x$ 为负），叫做 $P$ 点的横坐标。$ON$的长为 $y$（规定当$N$ 在原点上方时，$y$ 为正；$N$在原点下方时，$y$ 为负），叫做$P$ 点的纵坐标。$P$ 点的横坐标 $x$ 和纵坐标 $y$ 统称为$P$ 点的直角坐标，记作$P(x,y)$。

在图 1·3 中，$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$ 和 $O$ 点的坐标分别为 $P_1(3,2)$、$P_2$ $(-2,1.5)$、$P_3$ $(-1,-2)$、$P_4(2.5,-1.5)$、$P_5(4,0)$、$O(0,0)$。

很明显，平面内任何一点，都有两个实数作为它的坐标。反过来，对于任何两个实数 $x$ 和 $y$，在平面内也总可以作出一个点，使它的坐标为 $(x,y)$。

如某个点的坐标为 $(-2,-4)$，我们可以过$X$ 轴上表示$-2$ 的点作$X$ 轴的垂线，再过$Y$ 轴上表示$-4$ 的点处作 $Y$ 轴的垂线，这两条垂线的交点为$Q$，则 $Q$ 点的坐标就是 $Q(-2,-4)$。（图1·4）

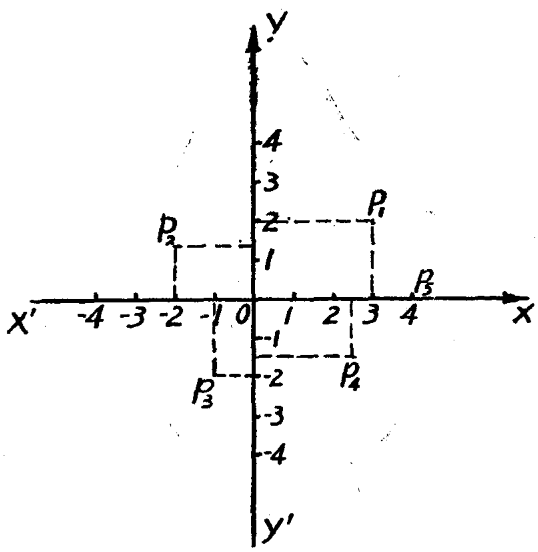



图 1·3

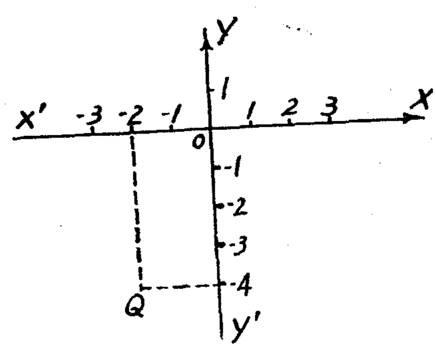



图 1·4

## 1·6. 函数的图象表示法

有了直角坐标，就可以利用图象表示函数了。

例 1　设函数 $y=x^2$，给 $x$ 一系列的值，计算出函数 $y$ 的对应值，如下表：

| $x$ | …… | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | …… | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 …… |

每一对 $x$ 与 $y$ 的对应值作为坐标可以在平面上作出一点，所有这些点连成的曲线就是函数 $y=x^2$ 的图象，如图 1·5。这种作函数图象的方法，称为描点法。用图象表示函数，容易看出函数的某些特点，如从图 1·5，明显地看出，当$x=0$时，函数 $y=x^2$ 取得最小值 0；当 $x$ 由负值不断增大时，函数 $y$ 的值下降；当 $x$ 由 0 再增大时，函数 $y$ 的值又上

升。

例 2　在一昼夜里，大气温度是随时间的变化而变化，对于一个确定的时间 $t$，大气温度 $T$ 有一个对应值，所以大气温度 $T$ 是时间 $t$ 的函数，如图 1·6 是气温自动记录器记下的某一天12时到第二天12时这一昼夜里气温随时间变化的函数图象，从图上可以看出，当 $t=18$ 时，对应的 $T=8.0$°C。

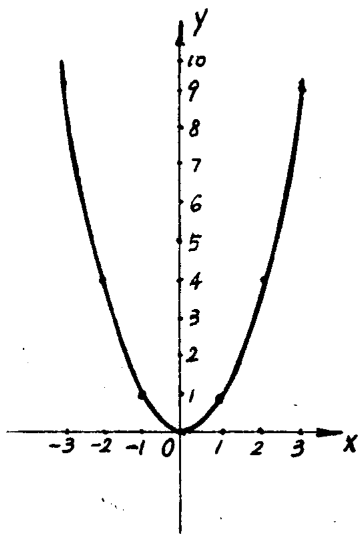



图 1·5

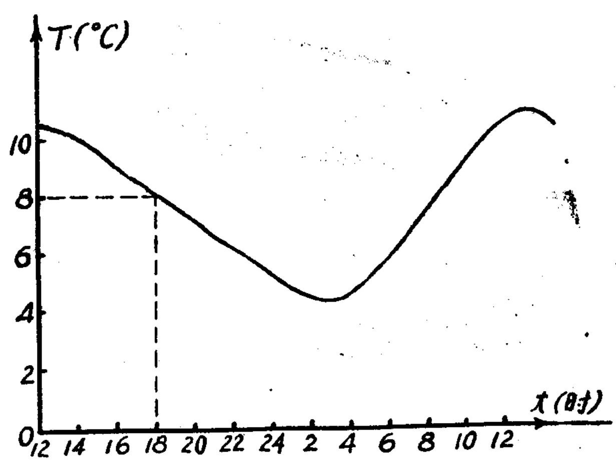



图 1·6

函数关系的三种表示法各有优点，公式法便于计算，列表法查找函数值方便，图象法便于研究函数的性质和变化情况，它们在专业中都得到广泛的应用。

## 习　题　一

1. 举出常量和变量的一些实例。
2. 举出函数的一些实例。
3. 已知下列各点的坐标，试在平面内作出各点，并说明各点所在的象限：
$A(2,3)$、$B(-5,4)$、$C(3.5,-2)$、$D(-3,-5)$、$E(1.5,0)$、$F(0,-3)$
4. 已知 $M$ 点的坐标为 $M(3,5)$，
（1）求 $M$ 点关于 $X$ 轴的对称点 $M_1$ 的坐标。
（2）求 $M$ 点关于 $Y$ 轴的对称点 $M_2$ 的坐标。
5. 设平面上的两点 $O(0,0)$、$A(3,4)$，
（1）求线段 $OA$ 与 $X$ 轴之间的夹角。
（2）用圆规作图，在 $X$ 轴上画出与 $A$ 距离为 5 的点，并写出这个点的坐标。
6. 自由落体的下落距离 $s$ 是时间 $t$ 的函数，试用公式法表示这个函数关系。
7. 作出函数 $y=\dfrac{1}{8}x^3$ 的图象。

8: 圆面积$A$是直径$d$的函数，列表如下：

| 直 径 $d$ | 1.50 | 1.51 | 1.52 | 1.53 | 1.54 |
|---|---|---|---|---|---|
| 圆面积 $A$ | 1.767 | 1.791 | 1.815 | 1.839 | 1.863 |

试用比例插值法求直径$d$为 1.502$cm$ 和 1.527$cm$ 时，对应的圆面积各是多少？（答数要求准确到 0.001$cm^2$）

## 第二节 几种函数关系

毛主席教导我们：**“就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物”**。在专业学习中，我们将遇到各种各样的函数关系，在本节中介绍几种简单的函数关系和它们的图象。

### 2·1. 正比函数

例如舰艇以某种航速航行时，航行了一定时间，耗油量相应地有一定的数值，所以耗油量是时间的函数，假如已知每航行 1 小时，耗油 2 吨，根据耗油量$y$（吨）和时间$x$（小时）之间的关系是正比关系，它们应满足下列公式：

$$\frac{y}{2}=\frac{x}{1},$$

或

$$y=2x,$$

如给出时间$x$的值，可以计算出$y$的对应值如下表：

| $x$（小时） | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 …… |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$（吨） | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 …… |

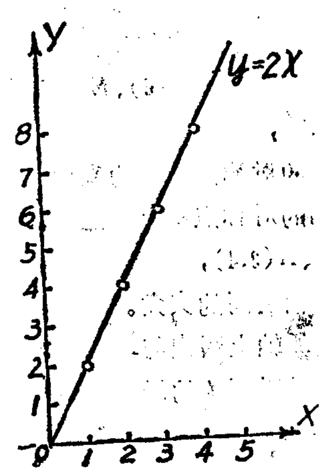



图 1·7

用描点法还可以作出这个函数的图象如图 1·7。

再例如某舰以20节的航速航行时，它的航程 S（浬）和航行时间 $t$（小时）是正比关系，满足下列公式：

$$S=20t$$

对于一般满足正比关系的两个量 $x$ 和 $y$，都可以用公式 $y=kx$ 表示，所以我们作出下面的规定：

定义　如果变量 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系是用公式

$$y=kx \quad (k\neq 0)$$

表示，我们称 $y$ 是 $x$ 的正比函数，$k$ 叫做比例系数。

正象上面我们作 $y=2x$ 图象那样，正比函数 $y=kx$ 的图象可以用描点法作出，它是一条通过原点(0, 0)的直线。图 1·8 中，描出的是三个正比函数 $y=\frac{1}{3}x$，$y=x$，$y=3x$ 的图象；图1·9中描出的是比例系数为负值的三个正比函数 $y=-\frac{1}{3}x$，$y=-x$，$y=3x$的图象。

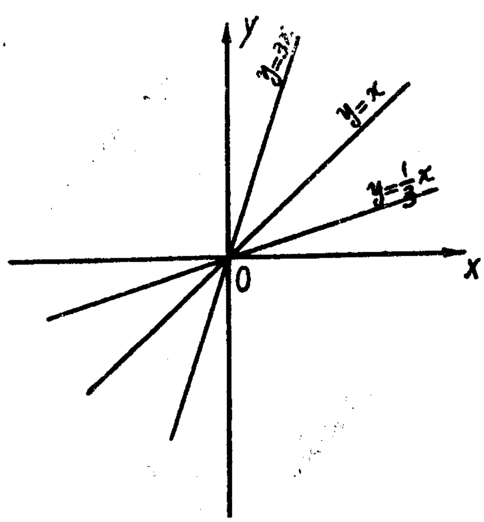


图 1·8

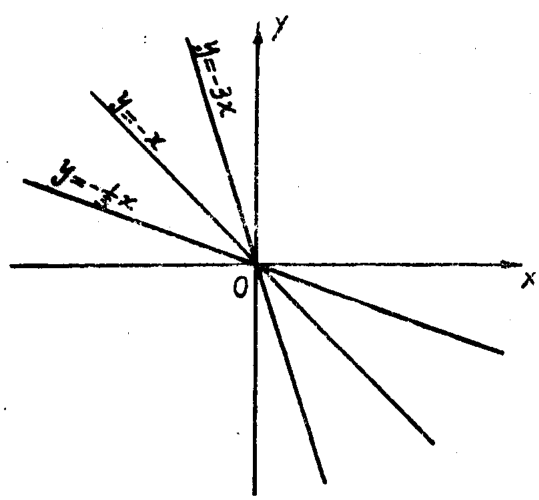


图 1·9

可见，正比函数 $y=kx$ 的图象是一条经过原点的直线，比例系数$k>0$时，直线位于一、三象限；$k<0$时，直线位于二、四象限，并且 $|k|$ 越大，直线愈接近$Y$ 轴，即直线愈陡。

既然 $y=kx$ 对 $x$ 轴的倾斜程度是由系数 $k$ 决定的，所以 $k$ 叫做这条直线的斜率。另外，根据角的正切定义，斜率的值恰好等于tg$\alpha$（图1·10(1)当$k>0$时，从直角三角形的边角关系很容易看出$k=\text{tg}\ \alpha$；图1·11(2)当$k<0$时，这时 $\alpha$ 是钝角，$k=\text{tg}\ \alpha$ 的道理

学了第二章第一节任意角的三角函数定义就可以清楚了），我们称直线与$X$轴之间的夹角$\alpha$为直线的斜角，且规定斜角的范围是 $0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$

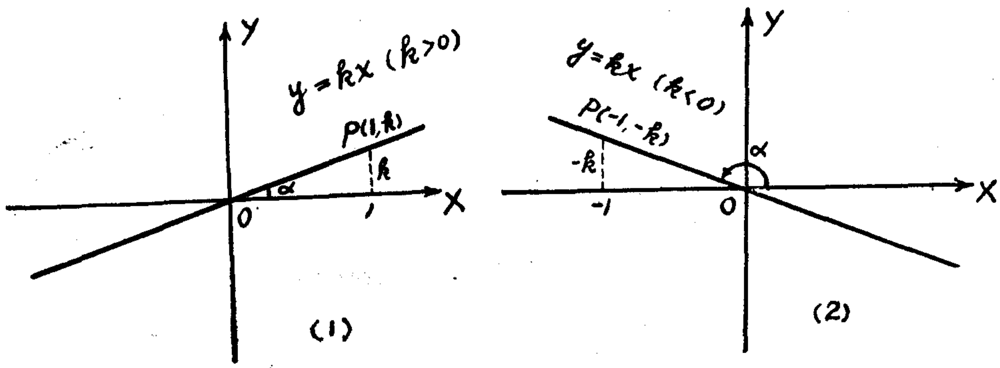



图1·10

## 2·2. 反比函数

甲、乙两港相距 300 浬，某舰从甲港航行到乙港，它的航速和航行时间之间是反比关系，即速度扩大（或缩小）几倍，航行时间就缩小（或扩大）几倍，这个关系是由下面公式表示：

$$t=\frac{300}{V}$$

其中 $t$ 表示航行时间（单位是小时），$V$ 表示航速（单位是节）。一般的反比函数的定义如下：

定义　如果变量 $x$ 和 $y$ 之间的函数关系是用公式

$$y=\frac{k}{x} \text{ 或 } xy=k \quad (k\neq 0)$$

表示，我们称 $y$ 是 $x$ 的反比函数，$k$ 叫做反比例系数。

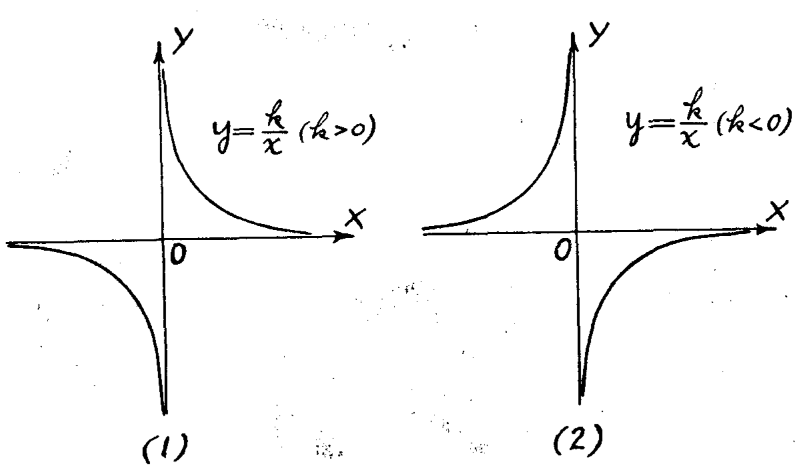



图1·11

反比函数的图象用描点法作出的形状(如图1·11)叫等边双曲线。当$k>0$时，等边双曲线的一支在第一象限，另一支在第三象限；当$k<0$时，等边双曲线的两支分别位于二、四象限。并且曲线无限伸展时与两根坐标轴无限靠近，但永远不相交。

### 2·3. 一次函数

定义　函数$y=kx+b$　$(k\neq0)$，叫做$y$是$x$的一次函数。

在$y=kx+b$中，如$b=0$，则一次函数就成为正比函数$y=kx$了。所以说，正比函数是一次函数的特例。

一次函数的图象和正比函数的图象有密切的联系，下面的例1，我们把一次函数描点作图和正比函数描点作图联系起来，便于看出它们图象之间的关系。

例1　在一个坐标平面中作出函数$y=2x+3$，$y=2x$，$y=2x-3$的图象。

解　列出对应数值表：

| $x$ | …… | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=2x$ | …… | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | …… |
| $y=2x+3$ | …… | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ | $7$ | …… |
| $y=2x-3$ | …… | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | …… |

从表中可以发现，对于同一个$x$值，函数$y=2x+3$的值都比$y=2x$的值大3个单位，也就是说，函数$y=2x+3$的图象上的点都在函数$y=2x$的图象上横坐标相同点的上

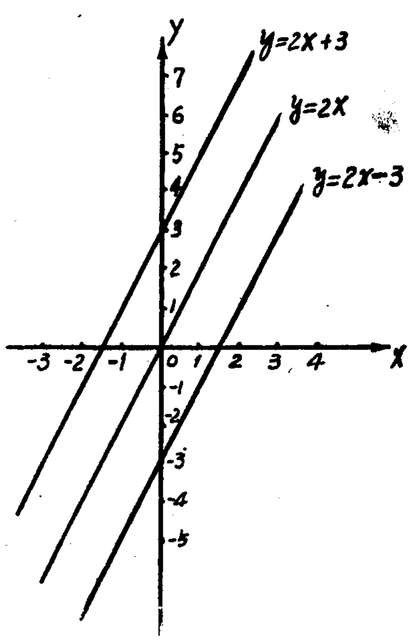



图1·12

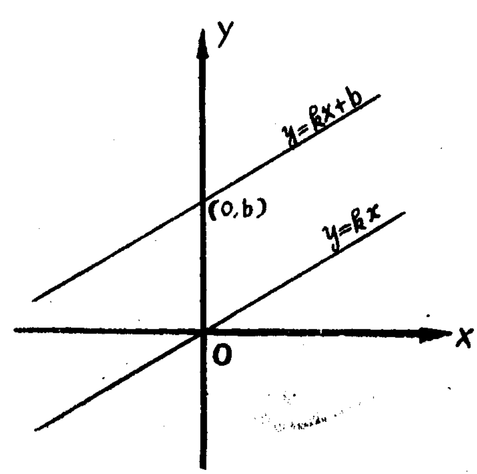



图1·13

方 3 个单位。因此，把 $y=2x$ 的直线向上平行移动 3 个单位，就可以得到$y=2x+3$的图象，即函数 $y=2x+3$ 的图象是经过（0, 3）点且平行于 $y=2x$ 的一条直线。同样，函数 $y=2x-3$的图象是经过（0, −3）点且平行于 $y=2x$ 的一条直线。（图1·12）

一般地，一次函数$y=kx+b$的图象是经过（0, $b$）点而且平行于直线 $y=kx$ 的一条直线。并且我们称 $k$ 为这条直线的斜率，它决定直线对$x$轴的倾斜程度；$b$称为直线在$Y$ 轴上的截距，它是决定直线与$Y$轴相交的位置的，见图1·13。

例 2　作函数 $y=\frac{1}{2}x-3$的图象，并指出它的斜率和截距。

解　函数 $y=\frac{1}{2}x-3$是一次函数，故它的图象是经过（0, −3）点且平行于 $y=\frac{1}{2}x$ 的直线。在作图时，根据几何上两点决定一直线的道理，我们只需描出它的两个点，用直尺连接即可画出直线了。例如，取$x=0$，对应的$y=-3$，即得直线与$Y$ 轴的交点为$A$（0, −3）；又取$y=0$，对应的$x=6$，又得到直线与$X$ 轴的交点为$B$（6,0），连接 $A$、$B$ 两点作出直线，这就是所求直线。（图1·14）

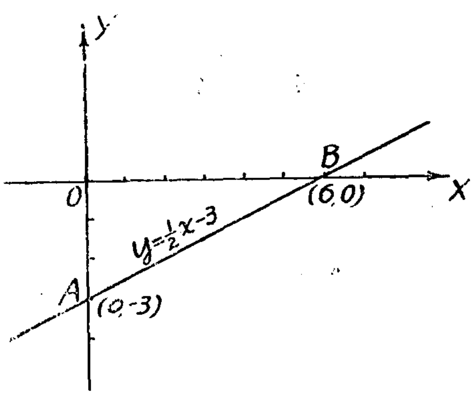



图1·14

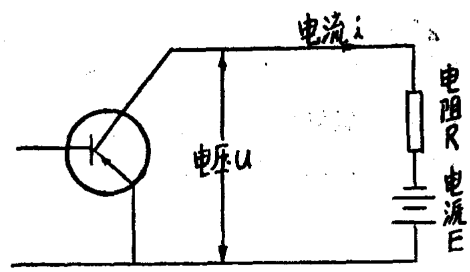



图1·15

直线 $y=\frac{1}{2}x-3$的斜率是 $k=\frac{1}{2}$，在$Y$ 轴上的截距是$b=-3$。

*例 3　在无线电中，晶体管的输出回路（图1·15）中的电流 $i$ 是电压 $u$ 的一次函数：

$$i=-\frac{1}{R}u+\frac{E}{R}\ （E、R是常数）$$

求作这个一次函数的图象。

解　根据一次函数的图象是直线可知，$i$ 是 $u$ 的一次函数，图象是直线，这条直线的斜率是 $-\frac{1}{R}$，在 $i$ 轴上的截距是$\frac{E}{R}$。

取$u=0$，得到对应的 $i=\frac{E}{R}$；

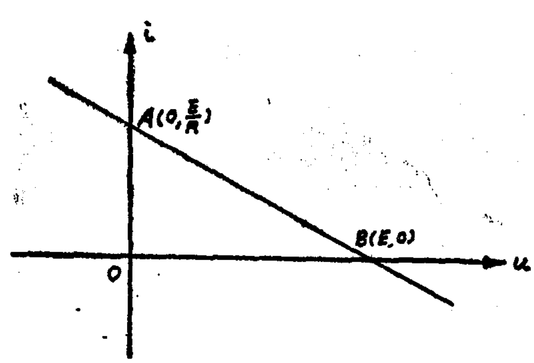



图1·16

取 $i=0$，得到对应的 $u=E$。

作出两点$A(0,\frac{E}{R})$和 $B(E,0)$，连接 $A$ 和$B$ 所得直线即为所求。此直线在无线电中叫做负载线。（图1·16）

## 2·4 二次函数

定义 函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$叫做 $y$ 是 $x$ 的二次函数。

当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中 $b$ 和 $c$ 都为 0 时，就成了 $y=ax^2$ 的形式，图1·17描出的是$a>0$，且 $a$ 取不同值时的函数图象，图1·18描出的是 $a<0(a=-1)$ 时的函数图象。

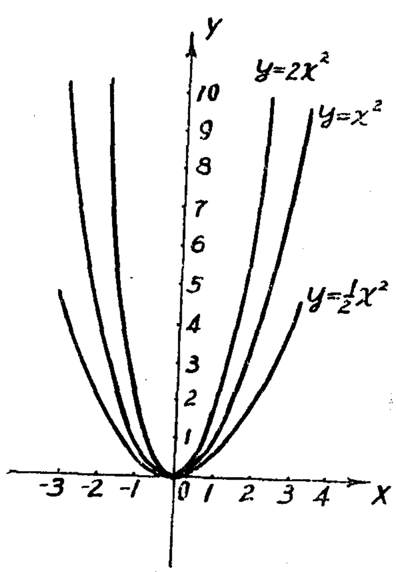



图1·17

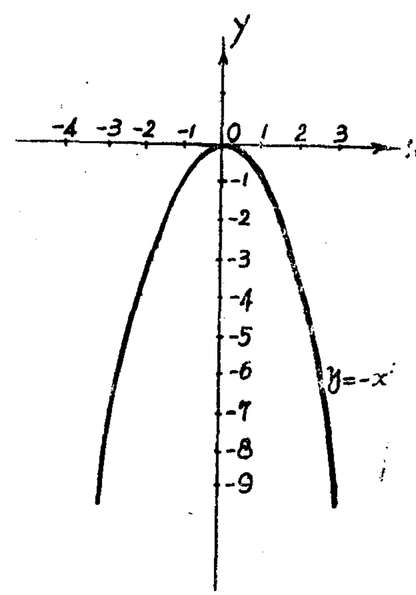



图1·18

以上描绘的$y=ax^2$的曲线叫做抛物线，(0, 0) 点叫抛物线的顶点，它们都以$Y$ 轴为对称轴。

当 $y=ax^2+bx+c$ 中，$b$、$c$ 不全为 0 时的函数图象，也可以用描点法作出，它们的形状都是抛物线，举例如下：

例 求作二次函数 $y=-x^2+4x$ 的图象。

解 在列出对应值表之前，先将函数式右端进行一次配方：

$$\begin{aligned}y&=-x^2+4x=-(x^2-4x)\\&=-(x^2-4x+4)+4\\&=-(x-2)^2+4\end{aligned}$$

在$x=2$的左右，给一些 $x$ 的值，并找出对应的 $y$ 值，就可以描得顶点为（2·4）的抛物线图象。

列出对应值表

| $x$ | …… | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | …… | $-5$ | 0 | 3 | 4 | 3 | 0 | $-5$ | …… |

描点作图如图1·19。

注：真空弹道（即不考虑空气阻力等影响时炮弹的轨道）的形状就是如图1·19所示的抛物线，它是通过二次函数来研究的。

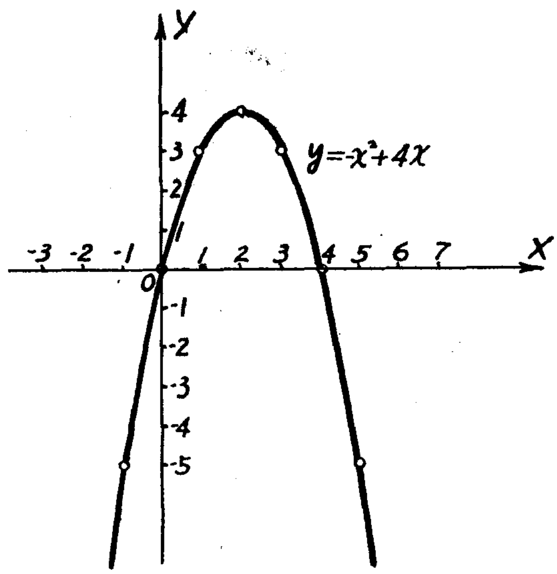


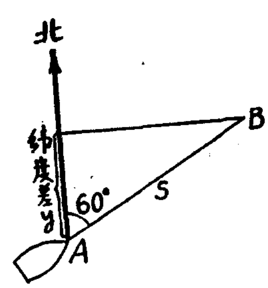

图1·19

## 习　题　二

1. 某舰以 60°航向航行时，航行两点 $A$、$B$ 的纬度差 $y$（单位是分）是航程$S$ 的正比函数：

$$y=S\cos 60°=\frac{1}{2}\cdot S$$

试作出这个正比函数的图象。




（第 1 题）

2. 作出正比函数 $y=-\frac{1}{2}S$ 的图象。

3. 作出反比函数 $y=\frac{6}{x}$的图象。

4. 某稀有金属棒的导电能力随温度变化而变化，并符合下列关系：