高联考研

2007年

李永乐·李正元考研数学①

数学一

【理工类】

数学复习全书习题全解

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

赠
(此书不售)

敬告读者

凡购买一本《2007年考研数学复习全书(理工类·数学一)》(李永乐等主编、国家行政学院出版社出版)的读者均可到原购书单位免费领取该书一本

国家行政学院出版社

2007年李永乐·李正元考研数学①

赠

数学复习全书习题全解

【理工类·数学一】

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

编者 （按姓氏笔画）
北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 刘西垣
中国人民大学 严颖
北京大学 范培华
中国人民大学 袁荫棠
空军雷达学院 徐宝庆
东北财经大学 龚兆仁
天津财经学院 鹿立江

国家行政学院出版社
·北京·

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

▶ 第一章　极限、连续与求极限的方法

一、填空题

1.【分析】　原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} 3\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x}{x} = 3+0=3$.

2.【分析】　原式 $\xlongequal[x\ln a = \ln(t+1)]{t=a^x-1} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(t+1)} = 1$.

3.【分析】　是 1^∞ 型极限.

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}\ln(\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x})}$. 而

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\ln(\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x})\right) \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{-[-\delta K^{-x}\ln K-(1-\delta)L^{-x}\ln L]}{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}}$$

$$= \ln K^{\delta}+\ln L^{1-\delta},$$

因此,原式 $= e^{\ln K^{\delta}+\ln L^{1-\delta}} = K^{\delta}L^{1-\delta}$.

4.【分析】　$f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0)$.

对此题, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin(bx)}{bx}\cdot b = b$,　$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-}(a+bx^2) = a = f(0)$.

即 $b=a$.

5.【分析】　由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^{2k}} \xlongequal{t=x^2} \lim_{t\to 0+}\frac{1+t-e^t}{t^k} \xlongequal[\text{洛必达}]{(k\geqslant 1)\ \frac{0}{0}} \lim_{t\to 0+}\frac{1-e^t}{kt^{k-1}} \xlongequal[\text{取 } k=2]{\frac{0}{0}} \lim_{t\to 0+}\frac{-e^t}{2} = -\frac{1}{2},$$

因此　$x\to 0$ 时 $1+x^2-e^{x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小.

> 评注　若用泰勒公式
>
> $$1+x^2-e^{x^2} = 1+x^2-\left(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right) = -\frac{1}{2}x^4+o(x^4),$$
>
> 更易得结论.

6.【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}x} = e^{2a} = 9.\quad\Rightarrow\quad a = \ln 3.$

二、选择题

1.【分析一】 连续与不连续的复合可能连续，也可能间断，故(A),(B)不对．不连续函数的相乘可能连续，故(C)也不对，因此，选(D)．

【分析二】 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处间断，又 $f(a)\neq 0$，$\Rightarrow$ $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断．(若不然，$\Rightarrow$ $\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$ 在 $x=a$ 连续，与已知矛盾)．选(D)．

评注 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant a,\\ -1, & x<a\end{cases}$ 在 $x=a$ 处间断，但 $\varphi^2(x)=1$ 连续．$f(x)=x^2+a$ 在 $x=a$ 处连续，$f(\varphi(x))=1+a$，$\varphi(f(x))=1$ 在 $x=a$ 处连续．

2.【分析】 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，$\Rightarrow|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续（$||f(x)|-|f(a)||\leqslant|f(x)-f(a)|$）．

$|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续 $\nRightarrow$ $f(x)$ 在 $x=a$ 连续．

如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant a,\\ -1, & x<a,\end{cases}$ $|f(x)|=1$，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续，但 $f(x)$ 在 $x=a$ 间断．

因此，选(B)．

3.【分析一】 直接考察．若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则

$$y_n=\frac{1}{x_n}\cdot x_ny_n\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim_{n\to+\infty}(x_ny_n)=0.$$

因此(D)成立．

【分析二】 举例说明(A),(B),(C)不正确．

x_n:0,1,0,2,0,3,…… 发散，y_n:0,0,0,0,0,0,…… 收敛，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_ny_n=0$．(A)不正确．

x_n:0,1,0,2,0,3,…… 无界，y_n:1,0,2,0,3,0,…… 无界，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_ny_n=0$．(B)不正确．

x_n:0,1,0,1,0,1,…… 有界，y_n:1,0,1,0,1,0,…… 不是无穷小，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_ny_n=0$．(C)不正确．

因此，选(D)．

4.【分析】 取 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\in(-\infty,+\infty)(n=1,2,3,\cdots)$，则 $f(x_n)=(2n\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty\quad(n\to+\infty)$．

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界．选(C)

评注 取 $y_n=2n\pi(n=1,2,3,\cdots)$，则 $f(y_n)=0$．因此 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大．

5.【分析】 如：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续，但 $f(x)+g(x)=$

1，$f(x)\cdot g(x)=0$ 在 $x=0$ 均连续．又如：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续，而 $f(x)+g(x)=\begin{cases}3, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续．因此选(D)．

6.【分析】 该题就是要计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n-\mathrm{e}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}\frac{\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\mathrm{e}}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}\frac{\ln\left[(1+\frac{1}{n})^n\Big/\mathrm{e}\right]}{\frac{1}{n}}$$ （等价无穷小替换：$t\to0$ 时 $\ln(1+t)\sim t$）

$$=\mathrm{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$ （转化为求相应的 $\frac{0}{0}$ 型函数极限，然后用洛必达法则），

因此选(D)．

三、求下列极限

1.【解法一】

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}\cdot\frac{x\sin x}{\mathrm{e}^{x^2}-1}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}.$

【解法二】 用等价无穷小因子替换．

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}.$

2.【解】 记 $p_n=\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}$，则原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+p_n)^{\frac{1}{p_n}\cdot p_n(-n)}$．

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-np_n)=-t$，因此，原式 $=\mathrm{e}^{-t}$．

3.【解法一】 属 $\infty-\infty$ 型未定式．先通分

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}x^{1+x}-x(1+x)^x}{(1+x)^x\mathrm{e}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}x-x(1+\frac{1}{x})^x}{(1+\frac{1}{x})^x\mathrm{e}}$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{x \to +\infty} \frac{e - e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}}{\frac{1}{x}} \xlongequal{(t = \frac{1}{x})} \frac{1}{e^2} \lim_{t \to 0+} \frac{e - e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}}{t}$$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{t \to 0+} \left(-(1+t)^{\frac{1}{t}} \frac{\frac{t}{1+t} - \ln(1+t)}{t^2} \right) = -\frac{1}{e} \lim_{t \to 0+} \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}$$

$$= -\frac{1}{e} \lim_{t \to 0} \frac{-\ln(1+t)}{2t} = \frac{1}{2e}.$$

【解法二】

$$\text{原式} = \frac{1}{e} \lim_{x \to \infty} x\left(e\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} - 1\right) \xlongequal{\text{等价无穷小替换}} \frac{1}{e} \lim_{x \to +\infty} x\ln\left(e\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \xlongequal{(t = \frac{1}{x})} \frac{1}{e} \lim_{t \to 0+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{e} \lim_{t \to 0+} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2e}.$$

4.【解】 $\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x^2\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} - \lim_{x \to 0} \cos x = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$

5.【解】 1^∞ 型. 故原式 $= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}$. 而

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\ln x} \xlongequal[\text{(洛必达法则)}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{(\frac{\pi}{2} - \arctan x)} \xlongequal[\text{(洛必达法则)}]{} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = -1,$$

故原式 $= e^{-1}$.

6.【解】 ∞^0 型. 原式 $= \lim_{x \to 0+} e^{\tan x \ln\frac{1}{\sqrt{x}}}$. 而

$$\lim_{x \to 0+} \tan x \ln\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^2} \xlongequal[\text{(洛必达法则)}]{(\frac{\infty}{\infty})} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2t^2} = 0,$$

故原式 $= e^0 = 1$.

7.【解】 $\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \xlongequal[\text{(等价无穷小替换)}]{} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$

8.【解法一】 $\text{原式} \xlongequal[(x<0)]{\sqrt{x^2} = -x} \lim_{x \to -\infty} x^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{100}{x^2}}\right) = \lim_{x \to -\infty} -x^2\left(\sqrt{1 + \frac{100}{x^2}} - 1\right)$

$$\xlongequal[\text{因子替换}]{\text{等价无穷小}} \lim_{x \to -\infty} -x^2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{100}{x^2}\right) = -50.$$

【解法二】 同前，

$$原式 = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}}{\frac{100}{x^2}}\cdot 100\right)$$

$$\xlongequal{t=\frac{100}{x^2}} 100\cdot\lim_{t\to0+}\frac{1-\sqrt{1+t}}{t} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} 100\cdot\lim_{x\to0+}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) = -50.$$

【解法三】 用相消法.

$$原式 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot100}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1\right)} = -50.$$

9.【解】 注意立方和公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,则

$$原式 = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}-\frac{n}{4}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\frac{(n+1)^2-n^2}{n} = \frac{1}{2}.$$

10.【解】 分别求左、右极限：

$$\lim_{x\to1+0}f(x) = \lim_{x\to1+0}\frac{x^x-1}{x\ln x} = \lim_{x\to1+0}\frac{\ln((x^x-1)+1)}{x\ln x}\text{(等价无穷小替换)}$$

$$= \lim_{x\to1+0}\frac{x\ln x}{x\ln x} = 1,$$

$$\lim_{x\to1-0}f(x) = \lim_{x\to1-0}\frac{\sin(1-x)+\cos(1-x)-1}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to1-0}\frac{\sin(1-x)}{1-x} + \lim_{x\to1-0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x)^2}{1-x} = 1,$$

因此 $\lim\limits_{x\to1}f(x) = 1$.

四、证明题与计算题

1.【证明】 令 $f(x)=x(2-x)$,则 $x_{n+1}=f(x_n)$. 易知

$$f'(x)=2(1-x)>0,\quad x\in(0,1).$$

因 $0<x_0<1 \Rightarrow x_1=x_0(2-x_0)=1-(x_0-1)^2\in(0,1)$.

若 $x_n\in(0,1) \Rightarrow x_{n+1}=x_n(2-x_n)\in(0,1)$.

又 $x_1-x_0=x_0(1-x_0)>0 \Rightarrow x_n$ 单调上升且有界 $\Rightarrow$ ∃ 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

由递归方程得 $a=a(2-a)$. 显然 $a>0 \Rightarrow a=1$.

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$.

2.【解】 (Ⅰ) 注意:$x>\ln(1+x)\quad(x>0)$,于是

$x_{n+1}-x_n=\ln(1+x_n)-x_n<0\quad(n=1,2,3,\cdots) \Rightarrow x_n\downarrow$ 有下界0⇒∃ 极限

$$\lim_{x\to+\infty}x_n \xlongequal{\text{记为}} a.\quad(a\geqslant0)$$

$\Rightarrow a=\ln(1+a)$. ($a>0$ 时 $a>\ln(1+a)$)

$\Rightarrow \quad a = 0$.

(Ⅱ) 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n \ln(1+x_n)}{x_n - \ln(1+x_n)} \xlongequal[\text{函数极限}]{\text{数列极限转化为}} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{x-\ln(1+x)}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2x}{1-\dfrac{1}{1+x}} = 2.$$

3.【解】 先放大、缩小后可以化简

$$z_n \xlongequal{\text{记}} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k)^2} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(na+k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(na+k+1) \xlongequal{\text{记}} y_n,$$

而 $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(na+k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}(n^2a + \dfrac{n(n+1)}{2}) = a + \dfrac{1}{2},$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}(n^2a + \frac{(n+3)n}{2}) = a + \frac{1}{2},$$

因此,$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a + \dfrac{1}{2}$.

4.【证明】 令 $x_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n-1)} = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n^n(1+\dfrac{1}{n})\cdots(1+\dfrac{n-1}{n})}$

$$= \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n-1}{n})},$$

取对数化乘积为和差

$$y_n = \ln x_n = \frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1+\frac{n-1}{n})]$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{积分和的极限}} \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$

$$= \ln2 - \int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \ln2 - 1 + \ln(1+x)\Big|_0^1 = 2\ln2 - 1 = \ln4 - 1,$$

故 $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{y_n} = e^{\ln4-1} = \dfrac{4}{e}$.

5.【解】 (Ⅰ) 这是初等函数,它在定义域($x^2 \neq 1$) 上连续. 因此,$x \neq \pm1$ 时均连续. $x = \pm1$ 时,

$$\lim_{x\to1+0}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2} = 2\times(-\frac{\pi}{2}) = -\pi,$$

$$\lim_{x\to1-0}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2} = 2\times(+\frac{\pi}{2}) = \pi,$$

故 $x = 1$ 是第一类间断点(跳跃的). 又

$$\lim_{x\to-1+0} y = 0, \quad \lim_{x\to-1-0} y = 0,$$

故 $x = -1$ 也是第一类间断点(可去).

(Ⅱ) 先求极限函数. 注意 $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n} = 0(|x| < 1)$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^{2n}} = 0(|x| > 1)$,

$$\Rightarrow \qquad y=\begin{cases}-1-x, & |x|<1,\\ -x, & |x|=1,\\ 1-x, & |x|>1.\end{cases}$$

$x\neq\pm 1$ 时，$|x|<1$ 与 $|x|>1$ 分别与某初等函数相同，故连续.

$x=\pm 1$ 时均是第一类间断点（跳跃间断点）. 因左、右极限均 $\exists$，不相等.

（Ⅲ）在区间 $(0,+\infty)$，$[-1,0)$ 上函数 y 分别与某初等函数相同，因而连续. 在 $x=0$ 处 y 无定义，而

$$\lim_{x\to 0+}y=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0-}y=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1,$$

$\Rightarrow x=0$ 是第一类间断点（可去间断点）.

（Ⅳ）**方法 1°** 先求 $f(g(x))$ 表达式.

$$f(g(x))=\begin{cases}g^2(x), & g(x)\leqslant 1,\\ 2-g(x), & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 2-(x+4), & x>1\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ -2-x, & x>1.\end{cases}$$

$x>1$，$x<1$ 时，$f(g(x))$ 分别与某初等函数相同，因而连续. $x=1$ 时，分别求左、右极限

$$\lim_{x\to 1+0}f(g(x))=\lim_{x\to 1+0}(-2-x)=-3,\quad \lim_{x\to 1-0}f(g(x))=\lim_{x\to 1-0}x^2=1,$$

故 $x=1$ 为第一类间断点（跳跃间断点）.

方法 2° 不必求出 $f(g(x))$ 的表达式，用连续性运算法则来讨论. $x\neq 1$ 时 $g(x)$ 连续，$f(u)$ 处处连续.（因为 $f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1,\\ 2-u, & u\geqslant 1\end{cases}$ 在 $(-\infty,1]$ 与 $[1,+\infty)$ 分别与某初等函数相同，故连续，因而 $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续）. 因此，$x\neq 1$ 时由连续函数的复合函数的连续性 $\Rightarrow f(g(x))$ 连续.

$x=1$ 处分别求左、右极限

$$\lim_{x\to 1+0}f(g(x))=\lim_{x\to 1+0}f(x+4)=\lim_{x\to 1+0}[2-(x+4)]=-3,$$

$$\lim_{x\to 1-0}f(g(x))=\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x^2=1,$$

故 $x=1$ 为第一类间断点（跳跃间断点）.

▶ 第二章　一元函数的导数与微分概念及其计算

一、填空题

1.【分析】 $y=f(u)$，$u=\dfrac{3x-2}{3x+2}=1-\dfrac{4}{3x+2}$，$u\Big|_{x=0}=-1$.

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=f'(-1)\cdot\left(1-\frac{4}{3x+2}\right)'\Big|_{x=0}=f'(-1)\left(-\frac{-4\cdot 3}{(3x+2)^2}\right)\Big|_{x=0}$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}\pi.$$

2.【分析】 $F'(x)=f(e^{-x})(-e^{-x})-f(x^2)\cdot 2x=-e^{-x}f(e^{-x})-2xf(x^2)$.

3.【分析】 $f^{(2)}(x)=3f^2(x)f'(x)=3f^5(x)$，$f^{(3)}(x)=3\cdot 5f^4(x)f'(x)=3\cdot 5f^7(x)$，可归纳证明

$$f^{(n)}(x)=(2n-1)!!f^{2n+1}(x).$$

4.【分析】 y 为偶函数 $\Rightarrow y^{(5)}(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow y^{(5)}(0) = 0$.

5.【分析】 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{-\sin t}{2t}$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(-\dfrac{\sin t}{2t}\right)'_t \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2} \cdot \dfrac{1}{2t} = \dfrac{\sin t - t\cos t}{4t^3}$.

6.【分析】 $t = 2$ 时 $(x,y) = (5,8)$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3t^2}{2t} = \dfrac{3}{2}t = 3$.

切线方程为 $\quad y - 8 = 3(x - 5)$,即 $y = 3x - 7$.

7.【分析】 参数方程 $\begin{cases} x = r\cos\theta = a\cos\theta + a\cos^2\theta, \\ y = r\sin\theta = a\sin\theta + a\cos\theta\sin\theta, \end{cases}$ 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{a\cos\theta + a\cos^2\theta - a\sin^2\theta}{-a\sin\theta - 2a\cos\theta\sin\theta} = \frac{\cos\theta + \cos2\theta}{-\sin\theta - \sin2\theta}.$$

(Ⅰ)在点 $(r,\theta) = (2a,0)$ 处,$(x,y) = (2a,0)$,切线 $x = 2a\left(\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{dy}{dx} = \infty\right)$.

(Ⅱ)在点 $(r,\theta) = \left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处,$(x,y) = (0,a)$,$\dfrac{dy}{dx} = 1$,切线 $y - a = x$.

(Ⅲ)在点 $(r,\theta) = (0,\pi)$ 处,$(x,y) = (0,0)$,$\dfrac{dy}{dx} = 0$,切线 $y = 0$.

$\dfrac{f(\frac{1}{2}\pi^2)}{\pi^2} = \dfrac{f(\frac{1}{2}\pi^2)\pi}{2\pi}$

$$\left(\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{\theta\to\pi}\frac{-\sin\theta - 2\sin2\theta}{-\cos\theta - 2\cos2\theta} = 0\right)$$

8.【分析】 将方程对 x 求导 $\Rightarrow \dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}y' = 0$,即 $y' = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$.

在 M_0 处 $\quad y' = \dfrac{b}{a}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,法线方程为

$$y - \sqrt{3}b = -\frac{a}{b}\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2a), \quad \sqrt{3}y - 3b = -\frac{a}{b}\frac{3}{2}(x - 2a).$$

即 $$\frac{\sqrt{3}}{3a}y + \frac{1}{2b}x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

9.【分析】 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x) - f(0)}{1 - \cos x} \cdot \dfrac{1 - \cos x}{\tan x^2} = f'(0) \cdot \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

10.【分析】 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(1 + \frac{1}{n})^k - 1}{\frac{1}{n}} = (x^k)'\Big|_{x=1} = k$.

或利用等价无穷小替换:$t \to 0$ 时,$(1 + t)^k - 1 \sim kt$,有

$$原式 = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(k \cdot \frac{1}{n}\right) = k.$$

二、单项选择题

1.【分析】 注意 $P(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,又 $\lim\limits_{n\to+\infty}P(x) = +\infty \Rightarrow x > x_0$ 时 $P(x) > 0 \Rightarrow$

$$P'(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+0} \frac{P(x)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

选(D).

2.【分析】 实质上就是讨论 $g(x) = x^2|x| = \begin{cases} x^3, & x \geqslant 0, \\ -x^3, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 时，$g^{(n)}(0)$ ∃ 的最高阶数 n.

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geqslant 0, \\ -3x^2, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad g''(x) = \begin{cases} 6x, & x \geqslant 0, \\ -6x, & x \leqslant 0 \end{cases} = 6|x|,$$

$|x|$在 $x = 0$ 不可导. 因此 $n = 2$. 选(C).

3.【分析】 首先，$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$，即 $0 = b$.

然后，$f(x)$ 在 $x = 0$ 可导 $\Leftrightarrow f'_+(0) = f'_-(0)$.

当 $b = 0$ 时，$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ ax, & x \leqslant 0. \end{cases}$

按定义求出 $\quad f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0.$

由求导法则知 $\quad f'_-(0) = (ax)'\Big|_{x=0} = a.$

由 $\quad f'_+(0) = f'_-(0)$ 得 $a = 0$.

因此选(A).

4.【分析】 直接由定义出发

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

由极限的保序性 $\Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $x \in (a - \delta, a + \delta)$，$x \neq a$ 时

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

$\Rightarrow \quad f(x) > f(a) \quad (x \in (a, a + \delta))$，$f(x) < f(a) \quad (x \in (a - \delta, a))$.

因此选(C).

5.【分析】 显然$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. 又

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = -\infty,$$

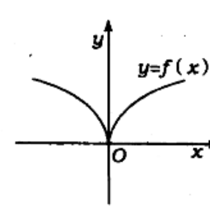

图 2.1

$y = f(x)$ 的图形见图 2.1 .

因此，$f'(0)$ 不 ∃，$y = f(x)$ 在$(0,0)$ ∃ 切线 $x = 0$. 选(D).

三、计算题

1.【解】 $\dfrac{dy}{dx} = e^{\sin^2 x} 2\sin x \cos x + \dfrac{1}{2} \dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}} 2^{\sqrt{\cos x}} + \sqrt{\cos x} \cdot 2^{\sqrt{\cos x}} \left(\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \right) \ln 2$

$$= e^{\sin^2 x}\sin 2x - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}2^{\sqrt{\cos x}}(1+\sqrt{\cos x}\ln 2).$$

2.【解】 $\ln|y| = \frac{1}{5}\ln|x-5| - \frac{1}{25}\ln(x^2+2)$，求导得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5} - \frac{1}{25}\frac{2x}{x^2+2},\quad y' = y\left(\frac{1}{5(x-5)} - \frac{2x}{25(x^2+2)}\right).$$

3.【解】 $$dz = \left[e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\frac{1}{x} + e^{\tan\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]dx$$

$$= -\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\tan\frac{1}{x}\sec\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)dx.$$

4.【解】 $$y' = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)^2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{a+b}\frac{a+b}{(a+b)+(a-b)\tan^2\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2} + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{a+b\cos x}.$$

5.【解】 $$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(tf'(t)-f(t))'}{f''(t)} = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(t) = (t)'\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f''(t)}\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{f^{(3)}(t)}{f''^2(t)}\cdot\frac{1}{f''(t)} = -\frac{f^{(3)}(t)}{(f^{(2)}(t))^3}.$$

6.【解】 $$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t^2 - 2t^2\sin t^2 - \frac{\cos t^2}{2t}\cdot 2t}{(-\sin t^2)\cdot 2t} = t\,(t>0),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(t)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2t\sin t^2},$$

故 $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}.$$

从而 $$\left.\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{2}.$$

7.【解法一】 两边取对数得 $y\ln x = x\ln y$.

两边对 y 求导，并注意 $x = x(y)$，得 $\ln x + \frac{y}{x}\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}\ln y + \frac{x}{y}$.

两边乘 xy，并移项得 $(y^2 - xy\ln y)\frac{dx}{dy} = x^2 - xy\ln x$.

解出$\dfrac{dx}{dy}$得 $\quad \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^2-xy\ln x}{y^2-xy\ln y}$

【解法二】 利用多元函数微分学的方法：$x=x(y)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 确定，其中 $F(x,y)=x^y-y^x$，直接代公式得

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{-(x^y\ln x-xy^{x-1})}{yx^{y-1}-y^x\ln y}.$$

约去 $x^y=y^x$ 得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{xy^{-1}-\ln x}{yx^{-1}-\ln y}=\frac{x^2-xy\ln x}{y^2-xy\ln y}.$$

8.**【解】** $e^y=y^x$，两边取对数得 $y=x\ln y$.

对 x 求导(注意 $y=y(x)$)$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\ln y+\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}$, $\quad y\dfrac{dy}{dx}=y\ln y+x\dfrac{dy}{dx}$.

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{y-x}.$$

求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$有两种方法：

方法 1° 将$\dfrac{dy}{dx}$的方程 $y\dfrac{dy}{dx}=y\ln y+x\dfrac{dy}{dx}$ 两边对 x 求导得

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{dy}{dx}\ln y+2\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

解出$\dfrac{d^2y}{dx^2}$并代入$\dfrac{dy}{dx}$表达式得

$$(y-x)\frac{d^2y}{dx^2}=(\ln y+2)\cdot\frac{y\ln y}{y-x}-\frac{y^2\ln^2y}{(y-x)^2}=\frac{[(\ln y+2)(y-x)-y\ln y]y\ln y}{(y-x)^2}.$$

注意 $\quad y=x\ln y$，于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y-2x)y\ln y}{(y-x)^3}.$$

方法 2° 将$\dfrac{dy}{dx}$的表达式再对 x 求导得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y\ln y}{y-x}\right)=\frac{(\ln y+1)\dfrac{dy}{dx}(y-x)-y\ln y\left(\dfrac{dy}{dx}-1\right)}{(y-x)^2}.$$

注意 $\quad y=x\ln y$，化简得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y\ln y-x\dfrac{dy}{dx}}{(y-x)^2}.$$

代入$\dfrac{dy}{dx}$表达式得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y-2x)y\ln y}{(y-x)^3}.$$

9.**【解】** 注意 $y=y(x)$，将方程两边对 x 求导，由复合函数求导法及变限积分求导法得

$$2-\frac{1}{\cos^2(x-y)}(1-y')=\sec^2(x-y)(1-y').$$

$$\Rightarrow\quad \sec^2(x-y)(1-y')=1,\text{即}\quad (1-y')=\cos^2(x-y). \qquad ①$$

再对 x 求导 $\Rightarrow \quad -y''=2\cos(x-y)(-\sin(x-y))(1-y')$.

代入①式 $\Rightarrow \quad y''=\sin 2(x-y)\cos^2(x-y)$.

10.【解】 把方程中的$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$用$\frac{dx}{dy},\frac{d^2x}{dy^2},\frac{d^3x}{dy^3}$来表示.

由反函数求导法得 $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$.

再由复合函数求导法及反函数求导法 $\Rightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}\right)=\frac{d}{dy}\left(\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}\right)\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-2}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}=-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-3}\frac{d^2x}{dy^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{d}{dy}\left(\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-3}\frac{d^2x}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}=\left[3\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-4}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-3}\frac{d^3x}{dy^3}\right]\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$=3\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-5}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-4}\frac{d^3x}{dy^3}.$$

将它们代入原方程 $\Rightarrow$

$$3\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-6}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-5}\frac{d^3x}{dy^3}-3\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-6}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2=x,$$

即 $$\frac{d^3x}{dy^3}+x\left(\frac{dx}{dy}\right)^5=0.$$

11.【分析与求解】 由条件可知,$x\in(0,a]$ 时 $f(x)$ 可导 $\Rightarrow$

$$f^2(x)=\int_0^{x^2}f(\sqrt{t})\,dt.$$

两边对 x 求导 $\quad\Rightarrow$

$$2f(x)f'(x)=f(\sqrt{x^2})(x^2)',\text{即 } 2f(x)f'(x)=f(x)2x.\quad\Rightarrow\quad f'(x)=x.$$

又原式中令 $x=0\Rightarrow f(0)=0$.

因此 $\quad f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

12.【分析与求解】 这是$\frac{0}{0}$型极限. 由 $f''(x)$ ∃ ⇒ 在 x 点邻域 $f(x)$ 一阶可导,可用洛必达法则得

$$\text{原式}=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}.$$

这也是$\frac{0}{0}$型极限,但没有 $f(x)$ 在 x 邻域二阶可导的条件,不能对上式再用洛必达法则. 但由 $f''(x)$ 的定义可得

$$\text{原式}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{2h}\cdot 2-\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\right]=2f''(x)-f''(x)=f''(x).$$

▶ 第三章 一元函数积分概念、计算及应用

一、填空题

1.【分析】 原式 $=\int_{-1}^{1}[x^2+2x\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)]\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} dx + 2\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx = 2.$$

（注意：$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx = 0$—— 奇函数在对称区间上积分为零）

2.【分析】 原式 $\xlongequal[(x=t^2)]{t=\sqrt{x}} \int_0^2 e^t 2t dt = 2\int_0^2 t de^t \xlongequal{\text{分部积分}} 4e^2 - 2\int_0^2 e^t dt$

$= 4e^2 - 2e^2 + 2 = 2e^2 + 2.$

3.【分析】 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin^2 x}{1+e^{\sin^2 x}} \xlongequal{t=\sin^2 x} \int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_0^1 \frac{e^{-t}dt}{1+e^{-t}}$

$= -\ln(1+e^{-t})\Big|_0^1 = \ln\frac{2e}{e+1}.$

4.【分析】 原式 $= \int_0^1 \frac{1}{2}\arcsin x dx^2 \xlongequal{\text{分部积分}} \frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8},$

其中$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ 是$\frac{1}{4}$ 单位圆的面积即$\frac{\pi}{4}$.

5.【分析】 原式 $= \frac{1}{n}\int\frac{x^n+1-1}{1+x^n}dx^n = \frac{1}{n}\int(1-\frac{1}{1+x^n})dx^n = \frac{1}{n}(x^n - \ln|1+x^n|) + C.$

6.【分析】 曲线由参数方程表出，直接套弧长公式得

$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}dt$

$= a\int_0^{2\pi} t dt = a\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a.$

7.【分析】 用曲率计算公式 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

由 $y^2 = 2x \Rightarrow 2yy' = 2,\quad y' = \frac{1}{y},\quad y'' = -\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{y^3}.$

$\Rightarrow k = \frac{\frac{1}{y^3}}{(1+\frac{1}{y^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}.$

二、单项选择题

1.【分析】 $I = \int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dtx \xlongequal{tx=u} \int_0^s f(u)du$，选(D).

2.【分析一】 显然，(A)，(B)，(C) 中的 $f(x)$ 在$[-1,2]$ 均有界，至多有一个或两个间断点，因而 $f(x)$ 在$[-1,2]$ 均可积，即 $\exists\int_{-1}^{2} f(x)dx$. 选(D).