

代数基础训练



高中二年级第二学期

河南省教委中小学教研室审订

河南教育出版社

代数基础训练

高中二年级第二学期

代数基础训练



高中二年级第二学期

代数基础训练

翟连林

河南省教委中小学教研室审订

河南教育出版社

出版说明

为了帮助高中学生加强基础知识和基本技能的训练，我们根据现行教材的要求，编辑、出版了这套基础训练丛书。计有语文、英语、数学、物理、化学等五种，按年级分学期陆续出版。

《高中课程基础训练》紧扣教学大纲和教材。所设题目都是根据教材内容顺序编排的，力求做到教师教到哪里就练到哪里，基本不偏离教学。练习的内容力求既系统、全面，又重点突出，分量适中，不设任何偏题、怪题，也不需要大量地抄写、计算；题型大多是填空题、选择题和改错题。这样设题可以免去抄写之劳，不至加重学生负担；而更重要的是能引导学生通过观察、比较、分析、概括、判断、推理等活动，更好地巩固所学知识，增强基本技能，收到良好的训练效果。

这套训练册可以根据不同情况灵活使用，有的可在课前预习时做，有的可在课堂上做，有的也可作为课外练习。究竟在什么时间做为好，应由任课老师根据教学的实际情况对学生进行具体指导。

河南教育出版社

1987年5月

目 录

第八章	复数	(1)
一	复数的概念.....	(1)
二	复数的运算.....	(9)
三	复数的三角形形式.....	(26)
第九章	排列, 组合, 二项式定理	(60)
一	排列与组合.....	(60)
二	二项式定理.....	(78)

507900

(182) (C)

$\overline{Q \cap R \cap C}$ 是

- (A) {实数}; (B) {复数};
(C) {有理数}; (D) {无理数}.

[答] ()

3. 选择题:

下题给出代号为A、B、C、D的四个不同的结论, 其中至少有两个结论是正确的, 试把正确结论的字母代号写在题后的圆括号内(这种选择题称为多重选择题).

如果两个复数不能比较大小, 那么这两个复数只需具备的条件是

- (A) 都是虚数;
(B) 至少有一个是实数;
(C) 至少有一个是虚数;
(D) 最多有一个是虚数.

[答] ()

4. 填空题:

设 $R = \{\text{实数}\}$, $C = \{\text{复数}\}$, $N = \{\text{自然数}\}$, $Z = \{\text{整数}\}$, $Q = \{\text{有理数}\}$, 那么这几个集合的关系为 $\underline{\hspace{1cm}} \subset \underline{\hspace{1cm}} \subset \underline{\hspace{1cm}} \subset \underline{\hspace{1cm}} \subset \underline{\hspace{1cm}}$.

5. 问答题:

(1) 能够说 $2 + 5i$ 大于 $1 + 4i$ 吗? 为什么?

答:

(2) $-5i$ 是负数吗?

答:

(3) 当 a 取什么值时, $\sqrt{4-a^2}$ 与 $\sqrt[3]{a^2-4}$ 可以比较大小? 不能比较大小?

答:

6. 简述数的概念的发展过程.

答:

8.2 复数的有关概念

1. 问答题:

有人说: “实部就是实数, 虚部就是虚数”, 这种说法正确吗? 为什么?

答:

2. 填空题:

(1) $C = \{\text{复数}\}$, $R = \{\text{实数}\}$, $\overline{Q} = \{\text{无理数}\}$, 则 $R \cup Q =$

_____, $\overline{R} \cap \overline{Q} =$ _____.

(2) 设 $z_1 = m^2 - (5m+6)i$, $z_2 = 6m - m^2i$, 当实数 $m =$ _____ 时, $z_1 - z_2$ 是实数; 当 $m =$ _____ 时, $z_1 - z_2$ 是纯虚数; 当 $m =$ _____ 时, $z_1 - z_2$ 等于零.

(3) 已知复数 $z_1 = a + 4i$, $z_2 = 3 + bi$ ($a, b \in R$), $z_1 + z_2 = 5i$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

3. 单项选择题:

(1) 下列命题正确的是: _____

(A) 复数是虚数; (B) 实部为 0 的复数是纯虚数;

(C) 复数就是实数加上纯虚数;

(D) 实数是复数.

〔答〕 ()

(2) $a = 0$ 是 $a + bi$ 是纯虚数的

(A) 充分而不必要的条件;

(B) 必要而不充分的条件;

(C) 充分必要条件;

(D) 既不充分又不必要的条件.

〔答〕 ()

(3) 复数 $a + bi$ 是纯虚数的充要条件是

(A) a, b 不同时为零; (B) a, b 都不为零;

(C) a 是零而 b 不是零;

(D) a 不是零而 b 是零复数共轭一定是 (B)

：复数共轭的性质： $z = a + bi$ 的共轭复数是 $\bar{z} = a - bi$ (答) ()

(4) 若复数 z 满足 $z + \bar{z} = 16i$ ，则复数 z 与它的共轭复数之和为

(A) $16i$; (B) $16i$; (C) -10 ; (D) $-16i$.

：复数共轭的性质： $z + \bar{z}$ 是实数 (答) ()

设 $z = x + yi$ 在复平面内表示满足方程 $2x^2 - 3x + 1 + i(y^2 - y - 2) = 0$ 的实数对 (x, y) 的点是 (B)

(A) 1 个点; (B) 2 个点; (C) 3 个点; (D) 4 个点.

：解方程组 $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$ (答) (B)

() (答) ()

(6) 已知复平面上一个正三角形 MNP 的顶点 M 表示复数 -1 ， $\triangle MNP$ 的中心在原点 O 上，那么顶点 N 和 P 表示的复数是

(A) $N: 1 - i, P: 1 + i$;

(B) $N: (\sqrt{3} - 1) - i, P: (\sqrt{3} - 1) + i$;

(C) $N: \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, P: \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

(D) $N: \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, P: \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

(答) ()

一、(17) 两个共轭复数之差是 $2i$ () (答) ()

(A) 虚数; (B) 纯虚数; (C) 实数; (D) 零.

(C) 零; (D) 纯虚数或零.

(答) ()

(8) 设 z_1, z_2 均为复数，则 $z_1 + z_2$ 为实数的充要条件是

(A) z_1, z_2 均为实数;

(B) z_1, z_2 是一对共轭复数;

(C) z_1, z_2 的虚部互为相反数;

(D) z_1, z_2 的虚部和实数均互为相反数.

[答] ()

4. 多重选择题:

若复数 $3a^2 + (1 - 2a - 3a^2)i$ 为实数, 则 a 的值是

(A) 3; (B) 2; (C) 1; (D) -1;

(E) $\frac{1}{2}$; (F) $\frac{1}{3}$.

[答] ()

5. 求证: 虚数 $a = -\overline{a}$ 的充要条件为 a 是纯虚数.

证明:

6. 已知方程 $(1+i)x^2 + (p-4i)x - (p-1)i - 3 = 0$ 有实数解, 求实数 p 的值.

解:

8.3 复数的向量表示

1. 多项选择题:

满足 $|\log_3 m + 4i| = 5$ 的实数 m 是

(A) $\frac{1}{9}$; (B) 9; (C) $\frac{1}{27}$;

(D) 27; (E) $\frac{1}{81}$.

[答] ()

2. 单项选择题:

(1) 若 $|x| - x = 1 + 2i$, 则 x 为

(A) 任意实数; (B) $-\frac{1}{2}$;

(C) $\frac{3}{2} - 2i$; (D) $\frac{1 \pm \sqrt{11}i}{2} - 2i$.

[答] ()

(2) 在复平面内, 满足不等式 $|3 + i - z| > |3 + i|$ 的复数 z 所表示的点 D 的区域是

(A) 以点 $(3, 1)$ 为圆心, 以 1 为半径的圆的外部;

(B) 以点 $(3, 1)$ 为圆心, 以 3 为半径的圆的内部;

(C) 以点 $(3, 1)$ 为圆心, 以 $\sqrt{10}$ 为半径的圆的内部;

(D) 以点 $(3, 1)$ 为圆心, 以 $\sqrt{10}$ 为半径的圆的外部.

[答] ()

(3) 若复数 z 满足条件 $|z + i|^2 = 1$, 则它在复平面内的图形是

(A) 点;

(B) 圆;

(C) 直线;

(D) 三角形.

1/5 () 1/6 () 1/6 (答) ()

3. 填空题:

(1) 已知复数 $z = (x^2 + 2x - 1) + (2x - 1)i$ ($x \in R$) 的模不大于 $\sqrt{10}$, 则 x 的取值范围是

(2) z 是复数, 且 $|z + \bar{z}| = 4$, 则复数 $z =$

(3) 如果 $x + y - 130 - 7xyi$ 和 $60i$ 是共轭复数, 则 $x =$, $y =$.

4. 画出适合不等式 $2 \leq |z| < 3$ 的复数 z 的集合所表示的图形.

[解] [答]

$|z| < |z - 2 + 2i|$ 表示平面上以 $(2, 2)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆的内部.

以 $(2, 2)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆的内部, 以 $(2, 2)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆的内部.

以 $(2, 2)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆的内部, 以 $(2, 2)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆的内部.

5. 解方程: $|2z - 1 + 4i| = 5$ ($z \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位).

解:

二 复数的运算

8.4 复数的加法与减法

1. 填空题:

(1) 计算: $-2i + (-i - 3) =$ $-3 - 3i$.

(2) 复平面上的向量 $\overrightarrow{AB}$ 所对应的复数是 $-3 - 4i$, 向量 $\overrightarrow{CB}$ 所对应的复数是 $1 + i$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 所对应的复数是 $4 - 5i$.

(3) 复平面内以 Z_0 点为圆心, r 为半径的圆的方程的复数形式是 $|z - z_0| = r$.

(4) z 为复数, 则 $|z - (1 + i)| \leq 1$ 表示的图形是 以 $1 + i$ 为圆心, 1 为半径的圆及其内部.

(5) 若 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), 且满足 $|z - i| = |y + 1|$, 则复数 z 在复平面上对应的点集合是 直线 $y = 0$.

(6) 若向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 的数值分别为 2 和 3, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ 的数值为 2, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 的数值为 _____。

(7) 曲线方程 $4x^2 + y^2 = 4$ 用复数表示为 _____。

2. 单项选择题:

(1) 若复数 $3 + i$ 与 $2 + 3i$ 对应的点分别为 P 与 Q , 则向量 $\overrightarrow{PQ}$ 对应的复数为

(A) $5 + 4i$; (B) $1 - 2i$;

(C) $-1 + 2i$; (D) $\frac{1}{2} - i$;

(E) $-\frac{1}{2} + i$.

[答] ()

(2) 已知 $M(-2, 0)$, $N(0, 4)$, 则向量 $\overrightarrow{MN}$ 所对应的复数为

(A) $-2 + 4i$; (B) $4 - 2i$;

(C) $2 + 4i$; (D) $-2 - 4i$.

[答] ()

(3) 复平面内的方程 $|z + i| + |z - i| = 3$ ($z = x + yi$, x, y 是实数) 所表示的曲线是

(A) 焦点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$, 长轴 3, 短轴 $\sqrt{5}$ 的椭圆;

(B) 焦点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$, 长轴 3, 短轴 $\frac{3}{2}$ 的椭圆;

(C) 焦点 $(0, 1)$, $(0, -1)$, 长轴 $\sqrt{5}$, 短

轴 $\frac{3}{2}$ 的椭圆;

(D) 焦点 $(0, 1)$ 、 $(0, -1)$, 长轴 3, 短轴 $\sqrt{5}$ 的椭圆.

[答] ()

(4) 若 $MNPQ$ 是复平面内的平行四边形, 顶点 M , N , P 分别对应于复数 $-2-i$, $-5+6i$, $3+2i$, 则向量 $\overrightarrow{NQ}$ 对应的复数是

- (A) $6-5i$; (B) $5+3i$;
(C) $-5-3i$; (D) $11(1-i)$;
(E) $11(i-1)$.

[答] ()

(5) 已知 z 为复数, 且 $|z-1-i| \leq 2$, 则 $|z|$ 的最大值、最小值为

- (A) 最大值 $2+\sqrt{2}$, 无最小值;
(B) 最大值 $2+\sqrt{2}$, 最小值 $2-\sqrt{2}$;
(C) 最大值 $2+\sqrt{2}$, 最小值 0;
(D) 最大值 $1+\sqrt{3}$, 最小值 $1-\sqrt{3}$.

[答] ()

3. 若 $A = \{z \mid |z-2-3i| < 2\}$, $B = \{z \mid |z| = 5\}$. 试在复平面上用图形表示集合: $A \cap B$, $A \cup B$.

解:

解：(1) 设 $z = x + yi$ ，则 $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ ，其中 z 为复数。

4. 已知 $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ ，其中 z 为复数，求在复平面上满足此方程的 z 点的轨迹，并画出图形。

解：设 $z = x + yi$ ，则 $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ ，即 $|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$ 。

设 $z = x + yi$ ，则 $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ ，即 $|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$ 。

$$|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$$

$$|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$$

$$|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$$

() (答)

解：(1) 设 $z = x + yi$ ，则 $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ ，即 $|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$ 。

设 $z = x + yi$ ，则 $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ ，即 $|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$ 。

$$|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$$

$$|x + (y - 4)i| + |x + (y + 4)i| = 10$$

5. 已知复平面上四个点 A, B, C, D 所对应的复数顺次为 z_1, z_2, z_3, z_4 ，且有 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ 。

求证：ABCD 为矩形的充要条件是 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 。

证明：(1) 必要性：设 ABCD 为矩形，则 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 。

证明：(2) 充分性：设 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ ，则 ABCD 为矩形。