华东师范大学函授教材

代数学习指导书

（第三册）

华东师范大学数学系
代 数 教 研 組 編

华东师范大学函授部

华东师范大学函授教材

代数学习指导書

第三册

华东师范大学数学系代数教研組編

华东师范大学函授部

1959年

目　录

第七章 数的概念

在本章中将数的概念作了一个比較系統的論述．介紹了自然数公理以后，用扩張数集的方法依次給出整数环、有理数体、实数体及复数体的概念．对于数的概念的历史的發展，我們虽有所涉及，但它不是我們討論的主要問題．同时对于各个数集我們除了給出了它們的定义外，只对于这些数集的某些重要方面作了論証．在自然数集方面，討論了数学归納法原理①；在整数环方面，討論了整数的可除性，同余式；在有理数体方面，着重在有理数体之建立；在实数体方面，着重在引入实数体概念；在复数体方面，除了建立了复数体而外，还討論了复数的几何表示及开方根等；最后我們也对实数体上根式运算及复数体上根式运算作了討論．

§1. 自然数与数学归納法原理

本节的主要內容为：(一)自然数公理，自然数的基本性質；(二)数学归納法原理，数学归納法与自然数最小性質的关系．

I. 自然数公理．

在此我們叙述了自然数公理，講到若在非空集合 N 中，对于某些元素 a 和 b 之間存在着关系"b 是 a 的直接后者"，而且滿足所說的四个公理，則称此集合 N 为自然数集合．

1. 究竟如何理解所說到的存在的关系呢？那就是說，我們对 N 的元素作了一个規定：对于 N 中任何两个元素 a 和 b，在怎样一种情形下，我們說 b 是 a 的直接后者．在这种規定下，N 中任何两个元素 a，b，或者符合所說情形就說 b 是 a 的直接后者，或者不符合

① 我們准备在第一章中不講数学归納法而放在此处講。那一部分教材适当地放在此处。

所說情形就說 b 不是 a 的直接后者.

2. 以我們已經很熟悉的自然数集合 1, 2, 3, …来看,它滿足定义中所說性質是容易驗証的. 此时所說关系可以这样规定:对于任何两个自然数 a 和 b, 如果 $b=a+1$①, 就說 b 是 a 的直接后者. 这样一来,对于任何两个自然数 a 和 b 来說,或者符合所說情形,或者不符合,二者必居其一,例如, 2 和 3, 3 就是 2 的直接后者 ($\because 3=2+1$); 25 和 26, 26 就是 25 的直接后者 ($\because 26=25+1$); 但 7 和 15 就无此种情形, 15 不是 7 的直接后者.

这样規定的关系也是滿足公理 I—IV 的.

(1)在我們所說的自然数集合中有 1, 并且因为 1 不能写作一个自然数与 1 的和的形式,故 1 不是任何自然数的直接后者.

(2) 1 的直接后者就是 2, 2 的直接后者就是 3, ….

(3) 1 不是任何自然数的直接后者, 2 是 1 的直接后者, 3 是 2 的直接后者,…

(4)若 M 是全部自然数集合的一个子集,它具有性質:

1° M 中含有自然数 1;

2° 若 M 中含有自然数 a, 則 M 中就含有自然数 $a+1$.

容易說明它含有所有自然数,因为由 1°, M 含有 1, 由 2°, 有 1 就有 2, 于是有 2 就又有 3, …, M 含有所有自然数.

3. 但是仅从 2 中的說明并不能看出自然数公理中所說基本关系及其滿足的四个公理就是自然数集合的特征,还应作更多的研討. 可以証明,滿足上面定义的集合,对于基本关系“b 是 a 的直接后者”来說,都是同构的(未証).

II. 自然数集合的基本性質.

1. 在自然数集合中可以定义順序;

2. 在自然数集合中,阿几米德公理成立;

---

① 此处所說的加法是指的在中、小学数学中已講到的加法,在自然数公理結构中,加法是在引入自然数公理后才定义的,我們这样作,只是使大家便于理解自然数公理有它的实际意义。

3．自然数是分离的；

4．自然数集合的最小性．

这些性質都是在自然数公理的基础上，定义了自然数的加法与自然数的乘法，引入順序的概念后推导出来的．我們未一一作出它的証明．

为了証明自然数集合的最小性質，我們指出在加法定义中：$a+1=a'$，又指出1是最小的自然数，这些实际上也是应当証明的(我們未証)．

III．数学归納法原理与自然数的最小性質．

1．由归納公理我們推导出数学归納法的第一种形式；

2．定义了自然数加法(用数学归納法証明加法的存在与唯一)，引进順序概念以后，可以用归納公理，自然数的分离性等証明自然数的最小性質．

3．根据自然数的最小性質推导出数学归納法的第二种形式；

4．此外我們也指出数学归納法的另外两种形式．

5．数学归納法是在数学各种中应用很多，应当很好地掌握它．

应当注意的是，在本节中，我們并未将自然数公理結构作完整的論証，我們只在引入自然数公理以后，列举了自然数的基本性質(实际上这些都不是显然的，而是应当严密論証的)．証明自然数集合的最小性質的目的，为的是使讀者明了数学归納法与它之間的关系(参看前面提到的2，3)．

思考題：

1．何謂自然数公理？

2．自然数有那些基本性質？

3．何謂数学归納法原理？如何从归納公理証明它的合理性？

4．何謂自然数集合的最小性質？如何用归納公理及有关性質加以証明？

5．如何从自然数集合的最小性質推导数学归納法的第二种形式？

6. 試将数学归納法的两种形式作一比較.

§2. 整数及整数的可除性理論

本节的主要内容为：(一)扩張数集的原則，整数环的定义，整数的基本性質；(二)整数的可除性理論.

I. 从自然数集扩張到整数环，从整数环扩張到有理数体，从有理数体扩張到实数体，从实数体扩張到复数体都是遵循着扩張数集的原則进行的，因此它在数的概念的討論中占着很重要地位.

II. 根据扩張数集的原則，我們給出了整数环的定义. 然而在講义中我們沒有具体地作出一个整数环来，然而这作法是有的.

III. 对于整数的基本性質我們也只是列举出来，并未予証明.

IV. 对于整数的可除性理論我們作了系統的討論，它根据下面的步驟进行：

{整除概念及性質, 带余数除法} → {最大公約数, 輾轉相除法} → {$r_k=(a,b)$, $sa+tb=r_k$,} → {互質的定义, 互質的充要条件}

→性質 → {質数、合数，質数的性質; 算术基本定理 → 求最大公約数，最小公倍数; → 質数有无限多}

必須了解討論的全貌，同时也要明确每一个重要概念及掌握各个性質及結論的推导过程.

思考題：

1. 扩張数集的原則如何?

2. 何謂整数环? 何謂整数?

3. 整数有那些基本性質?

4. 在整数可除性理論方面，有那些重要概念，有那些有关的性、有那些重要結果? 这些性質及結果如何推导?

§3. 同余式

要内容为：(一)同余概念及性質；(二)二元一次不定方

程解法;(三)一次同余式解法,一次同余式組解法.

I. 在同余概念及性質方面,我們給出了同余的概念,两个定理,十个性質.

定理 1 給出了整数 a, b 对模 m 为同余的充分必要条件,关于同余的性質的有关証明很多地方都用到它. 定理 2 是性質 4, 5 的多次应用的結果. 在同余式計算中也是經常要用到的.

性質 1, 2, 3 說明"同余"概念有通常"相等"所具有的三个性質($a=a$;若 $a=b$, 則 $b=a$;若 $a=b$, $b=c$, 則 $a=c$). 利用它具有此种性質可将整数作一个分类:"对模 m 互相同余的整数屬于一类",則每一整数屬于一类且仅屬于一类,这实質上就是以 m 为模的剩余类.

性質 4, (i) 及 5 說明以同一正整数 m 为模的两个同余式两边分別相加或相乘仍然得到关于模 m 的一个同余式,或者說在討論对模 m 为同余的过程中,两数的和(或积)可以用分别与这二数为同余的二数来代替. 性質 4, (ii) 則說明对于同余式的項可以从同余式的一边移到另一边去,但要改变此項的符号(这些性質与等式的相当性質对应).

在定理 2 中,假設二組整数 x_1, x_2, $\cdots$, x_k 及 y_1, y_2, $\cdots$, y_k 具有下面关系:

$$x_i\equiv y_i \pmod m, \quad (i=1, 2, \cdots, k)$$

那末根据性質 5, 作这些数的非負整数次乘冪的积仍然对模 m 为同余的数:

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}\equiv y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\cdots y_k^{\alpha_k} \pmod m$$

如果数 $A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}\equiv B_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha k}\pmod m$, 則由性質 5,

$$A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}\equiv B_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\cdots y_k^{\alpha_k} \pmod m$$

对于 α_1, α_2, $\cdots$, α_k 的任意一組非負整数值,都可以作出上面对模 m 为同余的两項,再根据性質 4, 这样所作項的和仍然同余(对模 m),

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k} A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}\equiv \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k} B_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_\alpha^{\alpha_k} \pmod m$$

在这里, 我們不过多次地应用了性質 4 和性質 5, 而 $A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}$, $B_{\alpha_1x_2\cdots\alpha_k}$ 是具有 k 个下标的記号, 它表示某二个整数, 而作为 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$,

$\cdots, x_k^{\alpha_k}$ 及 $y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}, \cdots y_k^{\alpha_k}$ 的系数的. 这个性質又可了解作在一个和中，每一項的每一因子皆可以与它們为同余的整数来代替. 例如

$$\begin{aligned}&7\cdot 8^4\cdot 11^3\cdot 13^2+5\cdot 8^3\cdot 11^2\cdot 13^3+4\cdot 11^4\cdot 13^4\\ &\equiv 1\cdot 2^4\cdot 2^3\cdot 1^2+2\cdot 2^3\cdot 2^2\cdot 1^3+1\cdot 2^4\cdot 1^4\\ &=16\cdot 8+16\cdot 4+16\\ &\equiv 1\cdot 2+1\cdot 1+1\\ &=4\equiv 1 \quad (\bmod 3)\end{aligned}$$

特別,若对二整数 x, y 有: $x\equiv y(\bmod m)$,則

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\equiv a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_n \quad (\bmod m)$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为整数, n 为非負整数.

性質 6 說明, 如果某一同余式之两边有公因数 $d(>0)$, 而 d 与 m 互質时, 則可从此同余式之两边消去公因数 d (相当于从等式两边消去不为另的公共因数).

从性質 4—6 都是对某一确定模 m 来說的, 在我們作的过程中沒有改变模.

性質 7 說明同余式的两边以及模可同时用同一个正整数来乘, 仍然得出一个同余式. 同余式的两边以及模也可同时都用它們的正的公因数来除.

性質 8 則說到由一組同余式

$$\begin{aligned}&a\equiv b(\bmod m_1)\\ &a\equiv b(\bmod m_2)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a\equiv b(\bmod m_k)\end{aligned}$$

得出以这些模的最小公倍数为模的同余式:

$$a\equiv b[\bmod (m_1, m_2, \cdots m_k)]$$

性質 9 說明若二整数 a, b 关于模 m 为同余, 則 a, b 对以 m 的任一正因数为模为同余.

性質 10 說明在以 m 为模的任一确定的剩余类中每一个数与 m 的最大公因数都是同一个数.

这些定理与性質在同余式的討論中都是很重要的.

II. 我們也講到同余概念在算术中的应用. 通过檢查因数方法及弃九法的学習,希望大家能把同余概念能应用到类似的問題上去.

III. 定理 3 中将全部整数作了一个分类,而这个分类就是根据“将与 m 为同余的整数归于一类”的方法来作出的.

模 m 的一个完全剩余系就是在每一类中选取一个代表元素来作出的.

IV. 在二元一次不定方程的討論中,基本理論就是有整数介的充要条件,以及已知其一介如何能到它的所有整数解的問題. 在解法方面有一定的步驟可循. 因此在二元一次不定方程求整数解方面有了一个完滿的結果.

同时我們也講到中学教材中的解法的根据,說明它的合理性与可能性.

V. 在解一次同余式时,我們是把它与二元一次不定方程介法联系起来作的,这样就毫不費事地得出可介条件,及求介方法. 应当注意的是,在介同余式时,是以整个的一个剩余类作为一个解的,因此在二元一次不定方程是有无限多个解(一对整数值作为一个解)时,而对同余式来說經过归类結果只有有限多个解.

在求簡單的一次同余式的解时,不必通过相应的二元一次不定方程来作,但是要应用到一般討論的結果. 例如,解同余式

$$7x \equiv 3 \pmod 5$$

首先,因为 $7 \equiv 2 \pmod 5$,故原同余式与

$$2x \equiv 3 \pmod 5$$

有相同的解. 又 $(2, 5)=1$,故此同余式有唯一解. 在我們要找出一个整数滿足此同余式时,我們只要考慮,若某一整数 a 滿足此同余式,则与 a 同余的任一整数皆滿足此一同余式. 而每一整数皆与模 m 的最小完全剩余系中的一个数同余,故我們只須在模 m 的完全剩余系中来找滿足此同余式的整数. 在此,$m=5$,它的最小完全剩余

系为 0, 1, 2, 3, 4．依次将它們代入檢驗，知 4 能满足 ($2\cdot4\equiv3 \pmod 5$)，故所求同余式的解为

$$x\equiv4 \pmod 5.$$

又如，介同余式

$$9x\equiv6 \pmod{12}$$

因为 $(9, 12)=3$，而 $3|6$，故此同余式有介，且有三个解．

要求出满足 $9x\equiv6 \pmod{12}$ 的一个整数，只須求满足 $3x\equiv2 \pmod 4$ 的一个整数，得到整数 2，于是原同余式的解为

$$x\equiv2 \pmod{12},\ x\equiv2+4=6,\ \pmod{12}$$
$$x\equiv2+2\cdot4=10 \pmod{12}.$$

$\left(\text{在此, } d=(9, 12)=3,\ m_1=\dfrac{12}{3}=4\right)$.

VI．孙子定理給出了模为两两互素的正整数的一次同余式組介法．給出了这样一个同余式組，我們判定它們的模是两两互素的，就可以按下面步驟求解：求出 $m=m_1m_2\cdots m_k$；求出 $M_1, M_2, \cdots, M_k$，求 $M_1', M_2', \cdots, M_k'$；所求解即为

$$x\equiv M_1'M_1b_1+M_2'M_2b_2+\cdots+M_k'M_kb_k \pmod m$$

在孙子定理的証明中，說明这样的 M_i' 是存在的，然后証明上面所說的剩余类为所求的一个解，最后証明任意两个解都是同余的，因此这面这个解就是它的唯一解．

思考題：

1．如何引入同余的概念，关于同余有何重要定理与性質，如何推导．

2．何謂模 m 的剩余类？何謂模 m 的完全剩余系？

3．关于二元一次不定方程有何重要定理？二元一次不定方程求整数解的步驟若何？

4．如何求一次同余式的解？如何求一次同余式組的解？

5．同余概念在算术中的应用有那些？中学里二元一次不定方程解法的根据若何？

§4. 有理数体及其基本性質

本节的主要内容为：(一)有理数体的定义，有理数体的建立，有理数体的基本性質；(二)商体.

I. 根据扩張数集的一般原則我們給出了有理数体的定义，构成有理数体的元素称为有理数.

II. 在整数环里，对某些数来說，除法可以施行，但一般来說除法是不能施行的. 在除法可施行的情况下，对于商来說，具有下面性質：

1. $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ 当且仅当 } ad=bc;$$
$$(b\neq0,\ d\neq0)$$

2. $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\quad (b\neq0,\ d\neq0)$$

3. $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.\quad (b\neq0,\ d\neq0)$$

参照着这些性質，我們来建立有理数体. 重要步驟有下面这些：

(1)討論整数序偶 $(a,\ b)\ b\neq0$ 的成集合

$$M=\{(a,\ b)\,|\,a,\ b \text{ 整数},\ b\neq0\};$$

(也就是說，討論所有的有序的整数对 $(a,\ b)$，其中 $b\neq0$ 的，例如 $(2,\ 3)$，$(1,\ -2)$，$(3,\ 5)$，$(0,\ 1)$，$\cdots$).

規定序偶的等价关系“$\cong$”：

$$(a,\ b)\cong(c,\ d) \text{ 当且仅当 } ad=bc;$$

(讀序偶 $(a,\ b)$ 与 $(c,\ d)$ 等价)

定义序偶的加法与乘法：

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(ad+bc,\ bd);$$
$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac,\ bd).$$

可以証明，这样定义的加法与乘法是序偶的代数运算，满足加法交換群，結合律，乘法交换律，結合，分配律对等价关系来說是成立的.

(2)将 M 中所有序偶作一个分类：将互相等价的序偶归于一

类，于是每一个序偶屬于一类且仅屬于一类，在同一类的序偶彼此等价，不同类中的序偶不为等价。

討論所有的等价类所成集合

$$\Gamma_0=\{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}.$$

有时候我們也用記号 $\underline{|(a, b)|}$ 表示序偶 (a, b) 所屬的类.

定义类的加法与乘法：

$$\underline{|(a, b)|}+\underline{|(c, d)|}=\underline{|(ad+bc, bd)|};$$

$$\underline{|(a, b)|}\cdot\underline{|(c, d)|}=\underline{|(ac, bd)|}.$$

証明这样定义的加法与乘法是 Γ_0 的代数运算，且 Γ_0 构成一个体.

Γ_0 中含有一个部分集合 $c'=\{\underline{|(a, 1)|}\ |a \text{ 整数}\}$ 与整数环 c 同构.

(3)在 Γ_0 中去掉分集合 c' 中所含的那些元素，換入所有整数，得到集合 Γ.

在 Γ_0 与 Γ 的元素間建立一个一一对应关系，使为从 c 到 c' 上的对应的扩充对应. 在 Γ 中建立加法与乘法运算：

$$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta};$$

$$\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=\overline{\alpha\cdot\beta}.$$

証明集合 Γ 关于这样定义的加法与乘法构成的体就是有理数体.

在証明过程中，我們証明了 Γ 中任一元素是两个整数之商.

III. 关于有理数体的唯一性（那就是說，滿足有理数体定义中所說条件的体是彼此同构的）我們未作証明.

IV. 有理数体的基本性質也只作了列举，并予証明.

V. 根据商体的定义，我們知道有理数体是商体的一个特例，它是整数环的商体. 关于任意一个具有單位元素、沒有零因子的可換环的商体的存在可以像有整数序偶理論建立有理数体一样来証明，此时所討論的是环的元素所成序偶，其它步驟与运算規則完全类似，讀者可以在学習过有理数体的建立后，独立地将它作出.

在討論多項式集合时，我們將提出多項式环的商体問題，也是用同样方法来作的.

思考題：

1. 何謂有理数体？如何建立一个有理数体？

2. 有理数体有那些基本性質？

3. 何謂商体？如何証明一个具有單位元素沒有另因子的可換环的商体存在？

§5. 实数

在本节中我們給出了实数体的定义，簡略地敘述建立实数体的一种方法.

I. 从求两个不可公度的綫段的比的問題，引出了有理数序列的討論. 在求某些正有理数的某次方根时也將引出同样的序列. 在討論有理数序列时，我們將有理数体作了扩充，得到实数体.

II. 在給出实数体定义前，我們需要作一些准备工作. 那就是給出下面一些有关的定义.

(1)收斂序列. 給出了一个序列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

組成此序列的每个元素都是某一个体 P 內的元素. 又 a 为体 P 中一个元素. 如果对于 P 中任何大于零的元素 ε，总存在着一个自然数 n_0，使对于任何大于 n_0 的自然数 N，皆有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

則称 a 为此序列的極限. 記作 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

例如，給出了序列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots\ \frac{1}{2^n}\ \cdots,$$

它的元素都是有理数，而有理数零就是它的極限.

有極限的序列，称为收斂序列，否則称为發散序列.

(2)基本序列. 給出了一个序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

它的元素屬于某一个体 P. 如果对于 P 中任何大于零的元素 ε, 总存在着一个自然数 n_0, 对于任何大于 n_0 的自然数 p, q, 皆有

$$|a_p - a_q| < \varepsilon,$$

則称此序列为一个基本序列.

在(1)中的例子就是一个基本序列,序列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$$

(每一有限十进小数都是有理数) 为元素是有理数的一个序列, 它也是一个基本序列. 但它不是有理数体中的收斂序列, 因为不存在这样的有理数 a, 滿足(1)中所說条件.

一般而言,在有理数体中每一收斂序列都是一个基本序列,反之則不尽然,上面所說序列是基本序列,但不是收斂序列.

(3)有序体. 設給出了一个体 P, 如果对于它的元素定义了一种所謂"正的"性質,对于这个"正的"性質是要滿足下面条件的:

(i)对于 P 中每一元素 a 来說,或者 $a=0$, 或者 a 是正的, 或者 $-a$ 是正的,三种情形有一种且只有一种情形成立;

(ii)对于 P 中任二元素 a, b, 若 a, b 都是正的, 則 $a+b$, $a\cdot b$ 也都是正的.

則称(定义了这种"正的"性質的)体 P 为有序体.

有理数体是一个有序体.

(4)完备体 設給出了一个有序体 P. 如果体 P 具有下面性質: 这个体 P 的元素的任意基本序列都是收斂序列 (即在体 P 中有極限),則称体 P 为一个完备体.

从(2)中的例子可知,有理数体不是一个完备体.

III. 应当注意的是, 上面所說序列收斂, 基本序列, 完备体的概念都与体 P 有关. 例如,給出了体 P 的元素所組成的一个序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

同时 a 是体 P 中的一个元素. 如果对体 P 中任何大于另的元素 ε, 总存在自然数 n_0, 使对于任何大于 n_0 的自然数 n, 皆有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

根据定义可知,此序列是体 P 中元素的一个收斂序列. 倘使 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 以及 a 也都是 P 的某一个子体 P' 中的元素,显然这个序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 也是 P' 的元素的一个收斂序列(因为对于 P' 中任何大于另的元素 ε'—含于 P 內,同样存在自然数 n_0,使对任何自然数 $n>n_0$,皆有 $|a_n-a|<\varepsilon$).

反之,对于 P' 中元素的任一收斂序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是否皆 P 中元素的一个收斂序列呢,这就不尽然了,尽管 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 以及其極限都是 P 中元素(因为 P' 包含在 P 內),但原来只就 P' 中大于另的元素 ε' 来說,总能找到具有前面所說性質的 n_0,現在要对 P 中大于另的元素 ε 来看(范圍較大了)是不是也皆能找到这样的 n_0 呢,这就不一定了,因此它不一定是 P 中元素的一个收斂序列.

对于基本序列也有类似的情况. 討論到完备体的概念时亦应密切注意这一点.

IV. 我們还要繼續引进两个有关定义.

1. 阿几米得式有序体. 設給出了一个有序体 P,如果 P 具有下面性質,即:

对于体 P 的任意元素 a,存在着一个自然数 n,使得 $ne>a$,則称体 P 为一个阿几米德式有序体.

显然,所說性質是与下面性質有同等意义的.

对于体的任意二个元素 a, b,此处 $b>0$,存在着一个自然数 n,使得 $nb>a$.

講义中指出,若体 P 是一个連續体,P' 是 P 的任一子体,則体 P' 中元素的任一收斂序列也是体 P 中元素的一个收斂序列,体 P' 中元素的任一基本序列也是体 P 的一个基本序列.

2. 連續体. 設体 P 为一阿几米得式有序体,且为一完备体,則称体 P 为一連續体.

V. 如前面所指出的,有理数体不是完备体. 現在我們要将有理数体作一个扩充,使得在扩充了的体內每一基本序列皆有極限. 这