



流体力学与应用数学讲座



分层流

易家训



科学出版社

流体力学与应用数学讲座 (1)

分 层 流

易 家 训 讲 授

李 家 春 整 理

科 学 出 版 社

1 9 8 3

内 容 简 介

美国工程科学院院士、密执安大学教授易家训，于1981年5月应邀来我国讲学，在中国科学技术大学研究生院讲授“分层流”。本书是根据该讲座的内容，整理编写而成的。内容包括：小振幅波，有限振幅定常流，分层流的稳定性等。其中很多工作是易教授多年来的研究成果。

本书可供高等院校应用数学、流体力学、大气物理、海洋科学等专业的教师，高年级学生，研究生及有关专业的科技人员参考。

流体力学与应用数学讲座 (1)

分 层 流

易 家 训 讲 授

李 家 春 整 理

责任编辑 谈德颜

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年3月第一版 开本：850×1168 1/32

1983年3月第一次印刷 印张：2 7/8

印数：0001—6,320 字数：70,000

统一书号：13031·2183

本社书号：2989·13—2

定 价： 0.58 元

序 言

一九八一年五月至七月，在北京举办了我国首次流体力学与应用数学讲习班。今天，讲习班的讲稿以讲座丛书的形式陆续与读者见面了，这是值得高兴的事情。

这次讲习班是由美国麻省理工学院林家翘教授倡议，由中国科学院、北京大学和清华大学共同主办的。应邀前来讲学的先后有：美国密执安大学易家训教授、麻省理工学院梅强中教授和加州理工学院吴耀祖教授。他们分别讲授了《分层流》、《水波动力学》、《船舶水动力学、空泡和尾流》这三门水动力学专题课程。内容包括：分层流中的波动和稳定性理论、线性和非线性水波及波浪与海洋工程结构的相互作用、船舶的兴波阻力和二维轴对称自由流线理论等。参加听讲者共约一百七十人次，来自全国三十多个科研机构 and 高等院校。讲习班期间，中外学者进行了广泛的学术交流，共同探讨了学科的研究方向。同时，我国的力学工作者还作了《海洋大气耦合系统中多年振荡的理论》、《缓变截面渠道中的孤立波》、《渤海潮流的数值模拟》、《地形对洋流影响的实验模拟》、《河口不定常流的数值计算方法》等学术报告。由于讲习班较注意理论和实验的基础知识，又重视实际应用，参加者普遍感到颇有收益。可以肯定，这次讲习班将会对我国的水动力学研究起一定的促进作用。

流体力学是一门古老而目前仍富有生命力的学科，其生命的源泉在于生产实践。早在二千二百多年前，在李冰父子的指导下，我国修建了规模宏大的都江堰。差不多与此同时，古希腊学者阿基米德创立了液体平衡理论，特别是物体浮力理论。经历了中世纪的黑暗之后，随着生产和技术的发展，一批先驱者——伽里略、牛顿等逐步完善了流体静力学理论，并开始探索流体中运动物体的

阻力规律。工业革命推动了流体力学的突飞猛进,从十八世纪中叶到十九世纪下半叶的百余年间,经过力学家的努力,根据牛顿力学原理建立了理论流体动力学的完整体系,并且随着实验技术的发展,奠定了实验流体力学的基础。从而使这门学科在低速(即不可压缩)流动问题中得到了极为广泛的应用。在此同一时期,气体动力学已处于萌芽状态。

本世纪初,人类进入航空时代,作为航空基础之一的气体动力学开始迅速发展。本世纪四、五十年代是这门学科的黄金时代,人类以气体动力学的理论和实践为后盾,跨越了“声障”、闯进了超声速禁区,接着又冲破了“热障”,使飞行器达到了第一宇宙速度,人类迈入了空间时代。六十年代,载人宇宙飞船的问世标志着高速气体动力学的发展已达到成熟阶段。

七十年代前后,根据实践的迫切需要,科学工作者开始对能源开发、环境保护、疾病防治等问题作更深入的研究,从而赋予流体力学以新的使命。地球流体力学、环境流体力学、海洋动力学、生物流体力学等一些边缘学科应运而生,并在海底采油、控制污染、天气预报等方面起着越来越大的作用。所研究的流体速度范围从高速又降到了常见的速度。

流体力学的发展与应用数学密切相关。由于流体力学基本方程具有非线性性质,而且定解条件十分复杂,因此不断给应用数学提出新课题,并使一些数学方法日臻完善,而应用数学的各种方法(例如奇点分布法、运算微积法、渐近分析法以及近几十年来发展起来的奇异摄动法和有限元法等等)对流体力学的研究起了极大的推动作用。事实上,流体力学家往往也是应用数学家。正因为应用数学技巧的发展和高速电子计算机的出现,使原来难于求解的流体力学问题有了解决的途径,经典流体力学的“返老还童”才有了可能。另外,由于实验物理学、电子技术与激光技术的飞跃发展,流体力学实验出现了崭新的局面。

新中国成立以后,流体力学和应用数学的研究在我国有了很大发展。产业部门在结合生产实际开展科学研究的过程中,已形

成了一支力量可观的力学队伍，许多高等院校开设了各种类型的力学专业。五十年代中期，钱学森、郭永怀教授等回国后，在中国科学院数学研究所的力学研究室的基础上，建立了力学研究所。高等院校、产业部门和研究机构的力学队伍共同配合、互相促进，为我国的水利、造船、航空、航天等工程作出了贡献。人造卫星和洲际导弹的发射成功，说明了我国气体动力学的研究达到了相当高的水平。目前，我国的力学工作者要把握住学科发展的新动向，要足够重视水动力学的研究，以期满足大型水利工程、海洋工程、化工工程等方面的发展需要。广大力学工作者要努力学习先进的理论和方法，学习计算机技术和近代实验技术，勇于开辟新的研究领域。

值此讲座丛书正式出版之际，我谨代表中国科学院向为这次讲习班作出积极贡献的国内外学者，特别向林家翘、易家训、吴耀祖、梅强中教授表示衷心的感谢，同时感谢为组织这次讲习班付出辛勤劳动的工作人员，感谢科学出版社的大力支持。我希望这套丛书将为我国流体力学和应用数学界，以及大气物理、海洋工程、船舶建造等方面的工作人员广泛利用，对他们的实际工作有所裨益。

周培源

一九八二年二月八日

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 概述	1
§ 1.2 密度或熵变化的惯性效应	3
§ 1.3 密度或熵变化的重力效应	6
§ 1.4 由非均匀性产生的涡, V. Bjerknes 定理	8
§ 1.5 分层流的相似律	10
第二章 小振幅波	16
§ 2.1 基本方程	16
§ 2.2 边界条件	18
§ 2.3 Sturm-Liouville 理论及其应用	19
§ 2.4 波速、波长关系的简单证明	24
§ 2.5 大气背风波	27
§ 2.6 在变深度水池、水槽中的内波	30
第三章 有限振幅定常流动	37
§ 3.1 二维、无粘、不可压缩分层流的基本方程	37
§ 3.2 选择取水、流入线汇的分层流	39
§ 3.3 大气背风波	44
§ 3.4 可压缩分层流的基本方程	46
§ 3.5 轴对称分层流的基本方程	49
§ 3.6 有限振幅的行波	50
§ 3.7 选择取水的 Craya 解	52
§ 3.8 内部水跃, 密度流	57
第四章 分层流的稳定性	61
§ 4.1 双扩散效应	61
§ 4.2 Helmholtz 界面不稳定性	67
§ 4.3 连续分层流的稳定性	69
§ 4.4 Miles 定理	70

§ 4.5	Howard 半圆定理	72
§ 4.6	稳定的其它充分条件	74
§ 4.7	由共振造成的失稳	77
§ 4.8	多孔介质中的流动稳定性	81

第一章 绪 论

§ 1.1 概 述^[1]

所谓分层流 (stratified flow), 是指密度或熵非均匀的流体运动, 具有自由表面的流动是分层流的一个特例.

我们知道, 当流体静止时, 密度或熵的分布必须满足一定条件时才是稳定的. 一般说来, 重的液体总在下面, 热的空气总在上面, 这是我们在平时生活中常见的事实. 所以, 对于不可压缩流, 其密度随高度增加而减小; 对于可压缩流, 其熵随高度增加而增加, 这是稳定的条件.

我们可以假定流体微团发生一个小位移, 看它能否再回到原来的平衡位置来判定它是否稳定.

对于不可压缩流, 事实很明显. 如果密度分布满足稳定的条件, 即 $\frac{d\rho}{dz} < 0$, 当流体微团向上移动时, 由于该微团周围流体的密度小于它本身的密度, 重力大于浮力而下沉; 反之, 当流体微团向下移动时, 该微团周围流体的密度大于它本身的密度, 浮力大于重力而上升. 由此可见, 流体微团在受到外来扰动后, 总能回到平衡位置. 所以, 这种密度分布是稳定的.

对于可压缩流, 事实就不那么明显. 这时, 我们要用等熵过程来代替等密度过程. 由气体动力学可知, 熵 S 的表达式为:

$$S = c_v \ln p / \rho^\gamma + \text{const} \quad (1.1)$$

其中, p 为压力, ρ 为密度, c_v , c_p 为定容、定压比热, $\gamma = c_p / c_v$ 为绝热指数. 稳定的熵分布应该是: 熵随着高度增加而增加, 即

$\frac{dS}{dz} > 0$ 或 $\frac{d}{dz}(p / \rho^\gamma) > 0$. 可以用类似的方法来进行推断, 当流

体微团向上移动时,该微团本身的密度 $\bar{\rho}_2$ 应由等熵过程来加以确定,即

$$p_2/\bar{\rho}_2^\gamma = p_1/\rho_1^\gamma \quad (1.2)$$

该微团周围流体的密度为 ρ_2 , 对于稳定的熵分布

$$p_2/\rho_2^\gamma > p_1/\rho_1^\gamma = p_2/\bar{\rho}_2^\gamma \quad (1.3)$$

所以, $\rho_2 < \bar{\rho}_2$, 即周围流体的密度大于流体微团本身的密度而下沉;同样可以推断,当流体微团向下移动时,浮力大于重力而上升.因此,这种熵分布对于外界的扰动是稳定的.

在气象学中,常常要应用势密度 (potential density) 的概念,它是指将某处的流体微团通过等熵过程移到海平面时的密度.这样一来,可压缩流的稳定条件可以阐述为:其势密度分布随着高度增加而减小,这同不可压缩流的密度分布随着高度增加而减小的条件十分类似.我们还把某处邻近的流体微团通过等熵过程移动到该处时的密度称为当地势密度 (local potential density).

必须注意区分等密度、等熵 (iso-); 均密度、均熵 (homo-) 的概念.前者是从历史观点观察问题,就定常运动而言,即沿着流线,密度或熵保持不变;后者则是从地域观点观察问题,即在全流场内,密度或熵保持不变.无热传导、无激波的流动是均熵的(如航空学上的亚声速问题);有热传导或有激波的流动是非均熵的(如气象学问题,航空学上的超声速问题).

为了研究密度变化所产生的效应,上世纪 Boussinesq 提出,除了在重力项中要计及密度变化的影响外,可以把密度当作常量,这就是众所周知的 Boussinesq 近似.下面,我们要导出分层流更为准确的控制方程.

不可压缩流

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{不可压缩性方程} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \text{连续性方程} \quad (1.5)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho X_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{动量方程 (1.6)}$$

式中, p , ρ , u_i 分别表示压力、密度和三个速度分量, X_i 为体积力, 上下指标相同时, 表示求和的意思. 考虑到方程(1.4), 可用下述方程代替连续性方程:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1.5')$$

上述方程组包括五个方程、含有五个未知量 p , ρ , u_i , 因而是封闭的. 注意, 方程(1.5')即使对于非定常、非均密度的不可压缩流动, 都是成立的.

可压缩流

$$\frac{D}{Dt} (p/\rho^\gamma) = 0 \quad \text{等熵方程} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \text{连续性方程} \quad (1.8)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho X_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{动量方程 (1.9)}$$

在方程 (1.9) 两边乘以 $p^{-1/\gamma}$, 可得

$$\frac{\rho}{p^{1/\gamma}} \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p^{1-1/\gamma}}{1 - \frac{1}{\gamma}} \right) + \frac{\rho}{p^{1/\gamma}} X_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.10)$$

比较 (1.4), (1.6) 同 (1.7), (1.10) 可见, 在可压缩流中, $\rho/p^{1/\gamma}$ 或熵 S 同不可压缩流中的密度 ρ 有着相似的作用. 当然, 连续性方程还不能完全变换成相应的形式, 但它毕竟不是动力学性质的方程, 其影响是居于次要地位的.

在气体动力学中, 我们常用能量方程代替方程 (1.7). 对于分层流, 熵是一个十分重要的物理量, 因此, 采用方程 (1.7) 是适宜的.

§ 1.2 密度或熵变化的惯性效应

密度或熵的非均匀性将通过两条途径来影响流体运动, 即惯

性效应和重力效应。为了把这两种效应分开进行讨论,我们先假定不存在重力,且限于定常流的情形来研究惯性效应。在下一节中,再来考察重力效应。

在上述假定下,不可压缩流的基本方程(1.4), (1.5'), (1.6)成为

$$u_{\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x_{\alpha}} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \quad (1.12)$$

$$\rho u_{\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\alpha}} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.13)$$

方程(1.11)表示密度的迁移导数为零,所以在运算时,密度可与迁移导数的符号互相交换次序。基于这一事实,引进变换:

$$u'_i = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} u_i, \quad p' = p \quad (1.14)$$

方程(1.12), (1.13)若用新变数 u'_i , p' 来表达就成为:

$$\frac{\partial u'_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \quad (1.15)$$

$$\rho_0 u'_{\alpha} \frac{\partial u'_i}{\partial x_{\alpha}} = - \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.16)$$

变换后的物理量标以记号“'”, u'_i 称为关联速度(associated velocity), 方程(1.15), (1.16)显然是不可压缩均密度的流体运动方程组。由此可见,对应于每一个均密度的关联流动(associated flow), 存在着无数非均密度的流动,其速度和密度间的关系由(1.14)来表达。这就是说,当流体密度增加时,速度减小;流体密度减小时,速度增加,这种惯性效应的物理意义是显而易见的。

类似地,我们来讨论可压缩的情形。在同样的假定下,方程(1.7), (1.8), (1.9)成为

$$u_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (p/\rho^r) = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial(\rho u_a)}{\partial x_a} = 0 \quad (1.18)$$

$$\rho u_a \frac{\partial u_i}{\partial x_a} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.19)$$

我们定义

$$\lambda = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma} = \text{const} \times e^{-s/\epsilon_p} \quad (1.20)$$

由(1.17)式可以导出

$$u_a \frac{\partial}{\partial x_a} F(\lambda) = 0 \quad (1.21)$$

其中, $F(\lambda)$ 是 λ 的任意函数. 这就是说, 在运算时 λ 或 λ 的任意函数可与迁移导数的符号互相交换次序. 仿照(1.14), 引进变换

$$u'_i = \sqrt{\lambda} u_i, \quad \rho' = \rho/\lambda, \quad p' = p \quad (1.22)$$

方程(1.18), (1.19) 可以化成

$$\frac{\partial(\rho' u'_a)}{\partial x_a} = 0 \quad (1.23)$$

$$\rho' u'_a \frac{\partial u'_i}{\partial x_a} = - \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.24)$$

在式(1.22)中, 带有“'”记号的物理量是可压缩情形下的关联速度, 关联密度或关联压力. 关联流动的压力、密度满足

$$\frac{\rho'}{(p')^{1/\gamma}} = \frac{\rho_0}{p_0^{1/\gamma}} = \text{const} \quad (1.25)$$

所以, 关联流动是均熵的. 同样可以得出结论: 对应着均熵的关联流动, 存在着无数非均熵的流动, 它们的物理量之间由变换(1.22)相联系. 虽然 Munk, 钱学森等阐述过这种类似的对应关系, 但没有获得式(1.25).

易家训还认为, 上述结论对于有激波存在的情况依然成立. 为简单起见, 我们仅考虑二维流动, 这时, 激波前后物理量满足 Rankine-Hugoniot 关系:

$$\rho_1 u_1 \sin \beta = \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta) \quad (1.26)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 \sin^2 \beta = p_2 + \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta)^2 \quad (1.27)$$

$$\rho_1 u_1^2 \sin \beta \cos \beta = \rho_2 (u_2 \sin \beta - v_2 \cos \beta) (u_2 \cos \beta + v_2 \sin \beta) \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} (u_2^2 + v_2^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (1.29)$$

上式中, 下标 1, 2 分别表示激波前后之意, β 为激波同来流方向的当地倾角. 如果我们对于激波前后的物理量都采用激波前的 λ 来作变换 (1.22), 不难看出, 关联流动依然满足激波关系 (1.26) — (1.29), 该关联流动在激波前是均熵的 (注意, 若激波是弯曲的, 关联流动在激波后是非均熵的). 所以, 对应着激波前为均熵的流动, 存在无数激波前为非均熵的流动, 它们的物理量之间同样由 (1.22) 相联系.

变换 (1.14), (1.22) 来自 Bernoulli 公式的启示. 把该公式应用于相邻的两层不同密度的流体可得

$$\left(\frac{\rho u_\alpha u_\alpha}{2} \right)_1 + p_1 = c \quad (1.30.1)$$

$$\left(\frac{\rho u_\alpha u_\alpha}{2} \right)_2 + p_2 = c \quad (1.30.2)$$

为保证相邻两层界面上压力相等, 即 $p_1 = p_2$, 所以每层流体的速度应与密度的平方根成反比:

$$(\sqrt{\rho} u_i)_1 = (\sqrt{\rho} u_i)_2 \quad (1.31)$$

上式就相当于变换 (1.14).

§ 1.3 密度或熵变化的重力效应

现在来考察密度或熵变化的第二种效应——重力效应. 为了对它单独进行讨论, 我们考虑缓慢的流动, 以略去动量方程中的惯性项. 还是象上节一样, 仅限于研究定常的情况, 这时, 动量方程应为:

$$\begin{aligned} & \rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) (u, v, w) \\ & = - \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) p + (0, 0, -\rho g) \end{aligned} \quad (1.32)$$

我们用 (u, v, w) 表示速度向量, 对其余物理量亦用类似的记号表示. 不可压缩性方程为

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (1.33)$$

对于分层流, 可以假定

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = O(1) \quad (1.34)$$

如果这种缓慢流动的速度分量均为 $O(\epsilon)$ 阶小量, 由动量方程的第一、三; 二、三方程交叉微分得

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = O(\epsilon^2) \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = O(\epsilon^2) \quad (1.36)$$

由连续性方程可见

$$w = O(\epsilon^3) \quad (1.37)$$

在略去 $O(\epsilon^4)$ 阶小量后, 运动方程为

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.38)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.39)$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (1.40)$$

连续性方程仅略去 $O(\epsilon^3)$ 阶的小量得出

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.41)$$

从简化了的近似方程 (1.38) — (1.41) 可得出如下结论:

- (i) 缓慢的分层流动, 压力分布近似于流体的静压;
- (ii) 流体在水平层内作二元运动, 在该水平层内, 保持流体的有旋性 or 无旋性不变;
- (iii) 分层流体总是在水平面内绕过有限物体, 尽量不作垂直方向的运动. 因此, 对于二维的情况, 物体的运动将使其前后的流

体象刚体一样平移,产生前后尾流(wake)。

上述结论,尤其是上游尾流的存在已为易家训以及 Benard & Pritchard, Debler 的实验所证实^[2]。流速极小时,Debler 的实验(未发表)表明在上、下游确实都有尾流存在。实验时 Froude 数为 10^{-3} 量级,速度的非均匀性是因粘性、扩散效应所致(图 1.1)。

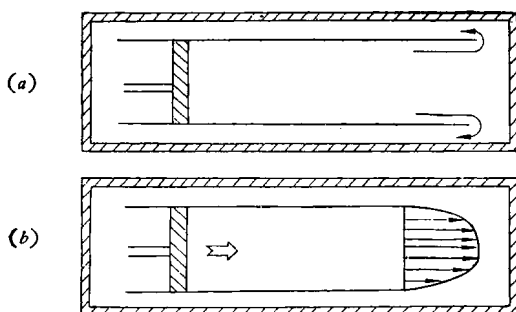


图 1.1 分层流的重力效应

(a) 实验装置(顶视图)

(b) 速度剖面(正视图)

§ 1.4 由非均匀性产生的涡, V. Bjerknes 定理

对于非均匀密度或熵的介质,古典流体力学的 Kelvin 定理不再成立。由于上述的非均匀性的存在,它可以成为产生涡的根源,从而使原来为无旋的流体运动变为有旋的流体运动。

运用向量公式,可把运动方程改写成:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \mathcal{Q} \quad (1.42)$$

这里 $\mathbf{u}$ 代表速度向量, $\mathcal{Q}$ 表示重力势。将上述方程两边取 curl, 且令 $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}$, 导出

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u}) = -\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p \quad (1.43)$$

由向量公式

$$\begin{aligned}\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u}) &= \boldsymbol{\xi}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} \\ &\quad - \mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{u}\end{aligned}\quad (1.44)$$

上式第三项因 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ 等于零, 方程 (1.43) 成为

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} + \boldsymbol{\xi}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p$$

由连续性方程可知

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

于是, 我们求得

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p \quad (1.45)$$

对于不可压缩流, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, 可以得到

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p \quad (1.46)$$

方程 (1.45), (1.46) 左边代表涡矢量的变化率, 右边第一项代表着沿着涡矢量方向流体的拉伸和切变引起的涡量的变化; 右边第二项代表因流体密度或熵的非均匀性产生的涡。如果流体是均密度或均熵的, 这一项就不存在, 所以流体运动只要初始时刻是无旋的, 那么它在以后就永远是无旋的。

我们还可以考虑环量 Γ 的变化率来阐明这一点。环量的定义是

$$\Gamma = \oint_c u_i dx_i \quad (1.47)$$

因为 $\frac{D}{Dt}(dx_i) = du_i$, 所以我们有

$$\begin{aligned}\frac{D\Gamma}{Dt} &= \oint_c \frac{Du_i}{Dt} dx_i + \oint_c \frac{d(u_i u_i)}{2} \\ &= - \oint_c \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i\end{aligned}$$

应用 Stokes 定理, 上式成为

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \iint_A \left(\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.48)$$