目　录

一、误差与实验数据处理教学中的几个问题

一、名词和概念

1. 误差：是指测量值与真实值之差①，即

误差＝测量值－真实值

上式定义的误差反映的是测量值偏离真实值的大小和方向，因此又常称为绝对误差。

误差与真实值之比叫做相对误差，考虑到一般情况下测量值与真实值相差不会太大，故可用误差与测量值之比作为相对误差。

在实验教学中，还经常用到修正值的概念，显然，当我们对含有误差的测量值加上修正值后，就可以消除误差的影响而得到真实值，即

修正值＋测量值＝真实值

或　　　修正值＝真实值－测量值

由上述定义可知，修正值与误差大小相等，符号相反。

2. 偏差：是各测量值与其算术平均值之差。

3. 精密度、准确度、精确度、正确度、精度：

精密度（precision）：是指重复测量所得结果相互接近的程度。显然它是描述实验（或测量）的重复程度的尺度。

准确度（accuracy）：是指测量值或实验所得结果与真值符合的程度。它是描写测量值接近真值程度的尺度。在英美的书中，accuracy一词有时也指精确度（包含精密和准确两方面内容）

精密度、准确度、精确度和正确度在使用上有两种表示方法：

（1） 用精密度反映偶然误差大小的程度，用准确度反映系统误差大小的程度[1]，用精确度反映系统误差与偶然误差的综合效果。

（2） 用精密度反映偶然误差大小，用正确度反映系统误差大小，用准确度反映二者的综合效果[2]

比较上述两种表示方法，可以看出准确度这个词目前尚无统一的定义。从计量学看，推广后一种表示方法。大学物理实验教材一般采用前一种表示方法。为了概念上的统一，我同意在实验教材中仍采用前者。此外，前一种表示方法词义比较确切，词形（词的组合方式）

① 更广义的理解是，某量值的得到值（如测量值、标称值、近似计算值）与其客观真值（如校准值、理论值、公认值等）之差。

与误差合成的概念对应一致[3]

精度是一个含义不确切的词，其意义可以这样来理解，如实验结果的相对误差为 0.1%，则可笼统地说其精度为10^{-3}，如果误差纯由偶然误差引起，精度就是指精密度；如果误差是由偶然误差与系统误差共同引起（如未经校准的 0.5 级或 1 级电表），则精度泛指二者。

4. 不确定度：它是用来表示误差范围的一个重要概念。在计量工作中就常用不确定度来评定实验结果的误差，因为误差是指测量值与真实值之差，而不确定度则是表示测量误差可能出现的范围，因此不确定度这个概念是更能反映测量结果的特征，其次不确定度包含了各种来源不同的误差对测量结果的影响，而它们的计算又反映了这些误差所服从的分布规律。为了取得对不确定度计算和表示方法上的统一，国际计量局在1980年10月召开了国际会议，专门讨论了这一问题并提出了建议书[4]从这一建议可以看到，实验不确定度主要还是用标准差表示。

5. 灵敏度：它是指仪器指示器的最小变化与造成该变化所需的待测量的变化之间的关系，如二量的单位一定，即灵敏度可表示成数字比。它和精密度一样均可用仪器本身来测定。通常，仪器或测量装置的灵敏度和精确度可认为是平行的两种特性。

二、系统误差与偶然误差

按照误差对实验仪器和实验结果影响的特征，一般将误差分为系统误差及偶然误差两类。

1. 系统误差

它是在同一条件下多次测量同一量时，误差的绝对值和符号保持恒定；测量条件改变时，误差亦按确定的规律变化（例如，分光仪偏心差引起的角度测量误差是按正弦规律变化）。系统误差的特征是它的确定性。此外，还有一类方向和绝对值未知（或尚未确定）的系统误差，叫做未定系统误差，在数据处理中，这类误差常用估计方法得出，并与处理偶然误差相似，用统计方法来处理。系统误差需要改变实验条件和测量方法才能够发现。系统误差的减小和消除是个比较复杂的问题，只有在很好地分析了整个实验所依据的原理和测量方法的每一步以及所用的各件仪器之后，才能找出产生误差的各种原因，从而有可能设法在测量结果中消除或减小它的影响。

2. 偶然误差

一般说来，在相同条件下，对同一量进行多次重复测量时，在极力消除或改正一切明显的系统误差之后，每次测量结果仍会出现一些无规律的起伏，我们将这种起伏归结于偶然误差的存在①。和系统误差相反，偶然误差的出现，从表面上看，似乎是纯属偶然（偶然误差在单次测量时可正可负，可大可小），但若测量次数很多，结果中就显示出明显的规律性。

① 实际上，系统误差未消除时，偶然误差也常常会表现出来。

实践和理论都证明，大部分的测量误差均服从正态分布（高斯分布）。服从此分布的偶然误差具有下面的一些特性：

（1） 单峰性：绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

（2） 对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

（3） 有界性：在一定测量条件下，误差的绝对值不超过一定限度。

（4） 抵偿性：偶然误差的算术平均值随着测定次数的增加而越来越趋向于零，即

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\Delta x_i=0$$

误差理论的任务主要就是研究这种偶然误差对测定结果的影响，并通过对测量数据的适当处理，尽可能减少这种影响，此外，还要对测量结果的精度做出正确的估计。

3. 偶然误差与系统误差的关系

系统误差的特征是它的确定性。而偶然误差的特征则是它的随机性，二者经常是同时存在于一切科学实验中，它们之间也是相互联系的，有时难以严格区分。我们经常把一些不可定系统误差看作是偶然误差，也常把一些可定的但规律过于复杂的系统误差当作偶然误差来处理，从而使得部分误差被抵偿以得到较准确的结果。有时系统误差与偶然误差的区别还与空间和时间的因素有关。时间因素有两方面的含义：一是指时间的长短，例如校验仪表所用的标准，它的温度在校验所需的短时间内可保持恒定或缓慢变化，但在长时间中它却是在其平均值附近作不规则的变化，因而环境温度对标准仪表的影响在短时间内可以看成是系统误差，而在长时间内则为偶然误差；另一含义是，随着科学技术的发展，人们对误差来源及其变化规律认识加深，就有可能把过去认识不到而归之于偶然误差的某些误差确定为系统误差。总之，系统误差与偶然误差之间是否有本质上的差别还是当前误差理论中存在争论的问题。

三、测量精度的评定(测量的偶然误差估计)

对于偶然误差的概率处理，是在完全排除系统误差的前提下进行的，即是在认为系统误差不存在，或已得到改正，或者小到可以忽略的情况下进行的。

设对某一物理量在同样条件下作多次测量，得x_1，x_2，…，x_K，各次测量值的误差为$\Delta x_i=x_i-x(i=1,\cdots,K)$，$x$为该物理量的真实值。根据偶然误差的基本特性可得出误差密度分布函数：

$$f(\Delta x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-h^2\cdot\Delta x^2}$$

式中h为一常数，对不同的实验，h有不同的值。h大，曲线狭，h小，曲线平坦（图 1—1），但曲线与横坐标所包围的面积相等，因为这面积表示各种测量值出现的概率的总和，应恒等于1。即

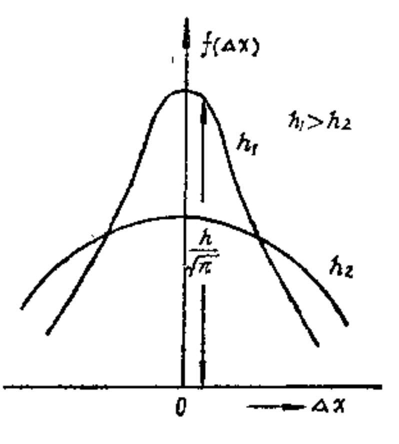

图 1—1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta x)\, d(\Delta x) = 1$$

h 可以作为实验（或测量）精密度的标志，h 的大小反映了测量值的离散情况和集中趋势，故称 h 为精密度常数，但它只具有理论上的意义。为了能从实验数据来确定结果的精密度，下面引入平均误差、均方误差、概差等概念。

1. 平均误差 η

定义

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{K} |\Delta x_i|}{K} \tag{1}$$

η 应与 h 有关，现推求如下：

已知 $f(\Delta x)$ 代表某一误差 Δx 发生的概率，在误差为 $\Delta x - [\Delta x + d(\Delta x)]$ 之间各种误差发生的概率是 $f \cdot d(\Delta x)$，如果误差的总数是 K，而误差在 $\Delta x - [\Delta x + d(\Delta x)]$ 之间的数目是 K'，则由概率定义，$f \cdot d(\Delta x) = K'/K$，因而 $K' = K \cdot f \cdot d(\Delta x)$，该区间内误差的总合便是 $\Delta x \cdot K \cdot f \cdot d(\Delta x)$，故整个误差分布的区域上误差的总合为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K \cdot \Delta x \cdot f \cdot d(\Delta x)$$

故平均误差

$$\eta = \frac{2K \cdot \int_{0}^{\infty} f \cdot \Delta x \cdot d(\Delta x)}{K} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot h} \tag{2}$$

（2）式是在 $K \to \infty$ 的结果，亦即在 K 很大时合理，且 η 计算简便。但实际情况 K 不大，故 η 随 K 变（不稳定），其次 η 不能反映数据的离散情况，因为不同精度的两组测量数据可以算出相同的 η。此外，K 有限，不能直接推出极限误差。

2. 均方误差 ε

定义

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K} (\Delta x_i)^2}{K}} \tag{3}$$

同 η 一样，ε 与 h 有关，

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} K \cdot (\Delta x)^2 \cdot f \cdot d(\Delta x) / K = 2\int_{0}^{\infty} (\Delta x)^2 \cdot f \cdot d(\Delta x) = \frac{1}{2h^2}$$

故
$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot h} \tag{4}$$

用均方误差来评定测量数据的偶然误差情况具有如下优点：

（1） ε 有相当稳定性，ε 随 K 的变化比较小。

（2） 它以平方计值，故其值与个别偶然误差的符号无关，且能反映数据的离散度。

（3） 它与最小二乘法的观点相吻合。

（4） 对于有限次测量，它与极限误差仍存在固定而简单的关系。

因此，一般均用 ε 来反映测量精密度，亦即用它来反映偶然误差的大小。

3. 概差 P

它是这样一个误差值，即比它大的误差出现的概率和比它小的误差出现的概率相同，即

$$\int_{-P}^{+P} f \cdot d(\Delta x) = \frac{1}{2}$$

计算出

$$P = \frac{0.477}{h} \tag{5}$$

综合 η，ε，P 三者，得

$$P = 0.675\varepsilon = 0.845\eta \tag{6}$$

$$\varepsilon = 1.25\eta$$

并把它们表示在误差曲线上（见图 1—2）。

由图可以明显看出，我们用一个数来表示误差，只不过表示测量值的概率分布，亦即对测量结果可靠性的一个估计。把结果写成 $x \pm \varepsilon$，这只是说，对量的任何一次测量值 x_i 出现在 $x+\varepsilon$ 到 $x-\varepsilon$ 间的概率为68.3%（由拉普拉斯积分表查出）；平均误差 η 表示误差落在 $\pm\eta$ 区间概率为 57.5%；概差则表示落在相应区间内的概率为50%。即这三种误差表示的都是在一定概率下的误差范围，因此三种误差的数值之前都要加“±”号。

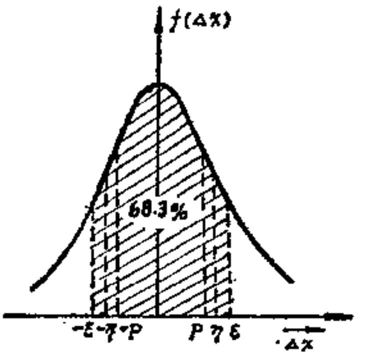

图 1—2

综上所述，可以看出在 $K\to\infty$ 时，用 η，ε，P 来表示一组测量中各测量值的精度都是可以的，但对有限次数的测量（我们只能计算出偏差），显然以均方误差来估计测量的精密度是比较可靠的。我国和世界上许多国家都在科学报告中使用均方误差，而在技术报告中则多使用极限误差。由概率论计算知，绝对值大于 3ε 的概率为0.3%，因而常取极限误差 $\Delta_{lim} = 3\varepsilon$。

对于有限次数的测量，数据将不会完全符合正态曲线的分布，均方误差也不能按（3）式来计算，那么我们该选择怎样的一个值，并以此值代替真值的话，就能使测量的各次数据 x_1，x_2，…，x_K 相对于该值的偏差按概率最大的正态分布呢？依据最小二乘法原理，这个最佳值就是算术平均值，现证明如下：

由最小二乘法原理，被测量的最可几值是这样一个值，它与各次测量值之差的平方和为最小。设以 $\overline{x}$ 表示这个最可几值，即有

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{K}(x_i - \overline{x})^2 = \min$$

令
$$f'(\overline{x}) = 0$$

则有
$$f'(\overline{x}) = -2\sum_{i=1}^{K}(x_i - \overline{x}) = 0$$

故 $$\bar{x}=\sum_{i=1}^{K}x_i/K \tag{7}$$

可以证明，对于有限次测量，一次测量值（测量列）的误差计算公式应取如下形式：

$$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{K}|\delta x_i|}{\sqrt{K(K-1)}} \qquad (\delta x_i=x_i-\bar{x}) \tag{8}$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}(\delta x_i)^2}{K-1}} \tag{9}$$

对于一组等精度测量数据的算术平均值，其误差数值应该更小些（因为算术平均值比任何一次测量值都应更接近真值一些）.可以证明算术平均值的误差等于一次测量值的$\frac{1}{\sqrt{K}}$倍，

即 $$\varepsilon_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\Sigma(\delta x_i)^2}{K(K-1)}} \tag{10}$$

$$\eta_{\bar{x}}=\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K\sqrt{K-1}} \tag{11}$$

根据上述分析知，一列等精度的测量结果应表示成（如用平均误差表示）

$$x=\bar{x}\pm\frac{\sum_{i=1}^{K}|\delta x_i|}{K\sqrt{K-1}} \tag{12}$$

(12) 式的意义是：被测量 x 的最佳值是 $\bar{x}$，误差区间 $\bar{x}+\eta_{\bar{x}}$ 到 $\bar{x}-\eta_{\bar{x}}$包含 x （客观真值）的概率是57.5%。应该注意的是 (12) 式不能理解为 x 落在 $\bar{x}+\eta_{\bar{x}}$ 到 $\bar{x}-\eta_{\bar{x}}$区间内的概率为57.5%，因为 x 具有确定的值，不存在概率的问题。

目前许多普通物理实验教材和讲义，一般都将多次测量结果表示成

$$x=\bar{x}\pm\frac{\sum_{i=1}^{K}|\delta x_i|}{K} \tag{13}$$

这就出现一个问题，即近似地用一次测量（或测量列）的平均误差来表示算术平均值的平均误差显然是不妥当的，它也决不具有平均误差所对应的概率涵义。我们只能这样来理解(13)式，因为$\eta_{\bar{x}}=\frac{\eta}{\sqrt{K}}$，一般测量要求$K$在10次左右，因而单次测量的平均误差 $\eta=\sqrt{K}\eta_{\bar{x}}\approx 3.2\eta_{\bar{x}}$，故 (13) 式相当于

$$x=\bar{x}\pm 3.2\eta_{\bar{x}} \tag{14}$$

由概率论估算，$3.2\eta_{\bar{x}}$ 接近于极限误差。据此，可以把 (13) 式中的 $\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K}$ 勉强理解为最大误差，不这样就难于理解 (13) 式。进一步我们就可以说，真值一定在误差区间内。

顺便提一下：（1）式和（8）式表示的是误差和偏差的绝对值的平均值，而不是误差

和偏差的算术平均值，因为后者总是恒等于零，显然用它来表示测量误差是没有意义的。

四、关于测定次数的问题

算术平均值是一列等精密度测量的最佳值，其精度一般多采用（10）式表示的均方偏差（或称标准偏差）来进行评价。由(10)式可知，平均值的均方偏差等于一次测定值的均方偏差的 $1/\sqrt{K}$ 倍。由此可见，算术平均值的精密度和测定次数K密切相关，K愈大时所求出的算术平均值也越来越接近真值，因为其精密度越来越高。但是测量的精度主要还是取决于所用测量仪器的精度、测量方法、环境和观测者等因素。测量时应把这些条件所能达到的精度体现出来，超出这些条件单纯去追求测定次数是没有多大意义的，当然必要的次数还是需要的，特别是对比较精密的测量，没有一定的次数就得不到应有的可信赖值。

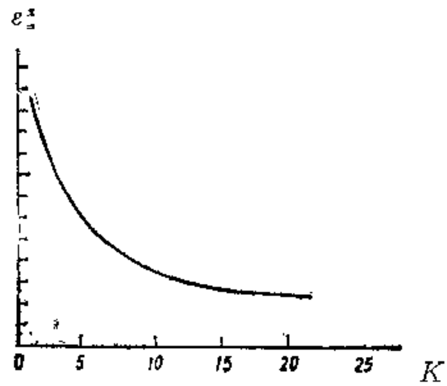

图 1—3

由 $\varepsilon_{\bar{x}}=\varepsilon/\sqrt{K}$，作 $\varepsilon_{\bar{x}}-K$的关系图，得图 1—3 所示曲线。由曲线可看出，随着测量次数K的增加，$\varepsilon_{\bar{x}}$ 逐渐减小，但在$K>10$以后，$\varepsilon_{\bar{x}}$ 减小极慢。因此，测量次数K不必过多，一般重复10次就可以了。同样（10）式表示的也是偶然误差对最后结果的影响，它只能由比较精确的仪器显示出来，对于一般仪器，由于仪器灵敏度或仪器精确度不高而产生的误差将掩盖住这些偶然误差。这就是说，对于这些情况下的测量次数还可以更少些，例如 5 次左右。

五、仪器的准确度和仪器误差

仪器准确度和仪器误差是由测量误差来限定的，例如用电表来测量一个实际值为2.00伏（相对真值）的电压，伏特计给出的读数为1.98伏，我们就说仪器(伏特计)准确度为 1 %，仪器误差为0.02伏。由此例可以看出，仪器误差就是指在正确使用仪器的条件下，测量所得结果和被测量的真值之间可能产生的最大误差。

仪器误差通常是由制造工厂和计量机关使用更精确的量仪、量具，经过检定比较，给出仪器的准确度级别，由所用仪器的量程和级别、或只用级别就可以算出仪器误差的大小来。

仪器准确度级别的确定方法如下：

以电表为例。对于电表，构成仪器误差的因素主要有以下几部分：（1）活动部分在轴承里的摩擦；（2）游丝弹性不均匀及游丝的老化；（3）磁场强度的不均匀；（4）分度不均匀；（5）外界因素变动对仪表读数的影响；（6）调节仪表指针到所要求的示值所引起的起伏；（7）检验用的标准所引起的误差（正常情况下，这一项引进的误差可以忽略）。仪表准确度等级就是根据这些可定的系统误差、不定的系统误差和偶然误差所造成的总的不确定度来决定的[5]。据此可把仪器的最大可能误差表示成

$$\Delta_{仪}=|e|+C\sqrt{\varepsilon_R^2+\varepsilon_s^2}=|e|+C\varepsilon$$

或 $$\Delta_{仪}=|e|+3\varepsilon \tag{15}$$

式中 e 为总的确定性误差（可定系统误差），ε_R 和 ε_s 分别为总的偶然误差及未定系统误差的标准差，C 为置信因了，其值取决于 ε 所服从的规律以及 $C\varepsilon$ 值的置信水平。当 ε 近于高斯分布时，对应的置信概率 $P=0.99$ 时的 $C=2.58$，为了简化，一般取 $C=3$，显然 $C\varepsilon$ 相当于偶然部分的极限误差。如果检测和计算出的 $\Delta_{仪}$ 与其对应的量程 之比等于 0.18%，则把这只表定为0.2级。一般精度级别高的（如 0.2 级，0.1 级）才进行这种严格和繁杂的检测和计算，对于 0.5 级以下的仪表，通常是借助标准仪表和它进行比较、校验，从而定出准确度级别。如果借助标准对它引入修正值，即从测量中去掉了确定的系统误差，则仪表的不确定度大约为由标称准确度级别计算出的 误差值的一半（级别太低的仪表除外）。这就表明，当对仪表进行校正引入修正值后，就完全能保证测量的不确定度小于仪器准确度等级所给出的误差，亦即测量的准确度可以高于仪表的准确度。但应指出，对于 0.2 级以上的精密仪表不允许有修正值，原因是这类表的可定系统误差在制造时均得到消除或减至最小，而它在正常情况下的允许偏差已经改变了这个修正值，所以意义不大。综上所述可以看出，仪表的级别误差有系统误差（可定的），也有偶然误差（包括未定系统误差）的因素，究竟以哪个为主，对于不同仪表不尽相同。0.2 级以上的仪表主要是偶然误差；实验室常用仪表(如 0.5 级)，两种误差都有，且数值相近；级别低的和工业用仪表则主要是系统误差。因此，有些实验教材笼统地把仪表误差称为系统误差，并用仪器误差的大小来表示系统误差的数值，用代数方法与其它误差合成，显然这样做是会夸大测量结果的误差数值。同样，对于以系统误差为主的仪表，也不能用标准差和概差等来反映测量结果的可靠程度。

六、直接测量结果的误差表示

由前述可知，直接测量结果精度的评定可以有下面的一些表示方法：

1. 如测量中系统误差已排除或减至最小，且测量仪器又比较精确，这时，造成测量数据的起伏基本上是偶然误差，测量结果可用标准差、概差、平均误差或极限误差等来表示：

$$x=\bar{x}\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K}(\delta x_i)^2}{K(K-1)}}\qquad (P=0.682)\ 单位$$

$$x=\bar{x}\pm 0.675\varepsilon_{\bar{x}}\qquad (P=0.50)\ 单位;$$

$$x=\bar{x}\pm\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K\sqrt{K-1}}\qquad (P=0.582)\ 单位;$$

$$x=\bar{x}\pm 3\varepsilon_{\bar{x}},\quad (3\varepsilon_{\bar{x}}\ 为极限误差)。$$

为了保证这四个表示式的准确性，测量次数 K 不应小于10次。如 $K<10$ 次，测量数据将偏离正态分布。

2. 对于一般教学实验，所用仪表或仪器的精度也很不一致，有的能反映出测量数据的起伏，有的则相反。为了计算简单，习惯上均未严格按偶然误差理论来处理数据，一般把结

果表示成

$$x=\bar{x}\pm\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K}$$

式中 $\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K}$ 相当于最大误差。

下面写出三种情况下测量结果的误差表示法：

（1） 仪器精度不高，测量条件比较稳定，多次测量同一物理量结果相近，测量结果的最大误差就用仪器误差表示，即

$$x=\bar{x}\pm\Delta x_{仪}$$

（2） 被测量不允许作多次测量时，这时测量结果的误差可表示成

$$x=x_{测}\pm\Delta x_{仪}$$

（3） 如多次测量的最大误差 $\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K}$ 与仪器误差 $\Delta x_{仪}$ 接近相等，这时用 $\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K}$ 或 $\Delta x_{仪}$ 表示测量结果的最大误差都可以。

总之，因为 $\Delta x_{仪}$ 或 $\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K}$ 都是代表最大误差，所以不应把二者加起来作为结果的最大误差，一般取大的即可。

3． 测量条件不符合仪器所要求的工作条件时，测量结果的最大误差宜把 $\frac{\Sigma|\delta x_i|}{K}$ 与 $\Delta_{仪}$ 加起来。例如箱式电桥（或电位差计等），由于仪器灵敏度不符合仪器对灵敏度的要求，这时将引进附加误差。因而当用该电桥测电阻时，测量结果应表示成

$$R=R_x\pm(R_x\cdot f\%+0.2/s) \tag{16}$$

（16）式是对应于一次测量，0.2 是判断检流计平衡的视差，f 是电桥的级数，s 是电桥灵敏度。如进行了多次测量，则测量结果应写成

$$R=\overline{R}_x\pm\left(\overline{R}_x\cdot f\%+\frac{\Sigma|\delta R_{xi}|}{K}\right) \tag{17}$$

这里应当指出，（16）和（17）式中的最大误差表示项中所包含的两部分宜用高斯合成法合成，以避免过分地扩大测量结果的误差数值。

七、单次测量的标准差、平均误差和概差的估计方法

在科学实验的测量实践中，特别是一般的教学实验的某些测量，经常碰到的是只作单次测量（如用温度计测温、用电表测电流和电压等）。这时应如何确定测量结果的平均误差、标准差和概差？这是实验数据处理中的一个实际问题。为了解决这个问题，先简单介绍均匀分布。所谓均匀分布是指在其误差范围

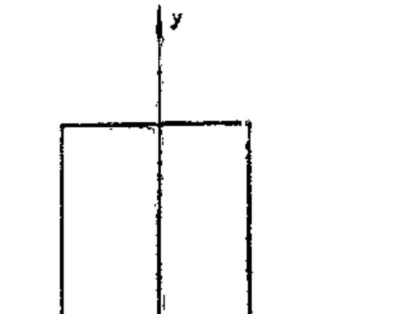

图 1—4

内，各种误差（不同大小和符号）出现的概率都相同，区间外则为0（如图1—4所示）。因而误发生的概率为

$$y=f(\Delta x)=k \qquad (k\text{ 为一常数}),$$

于是有

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} y d(\Delta x)=\int_{-\Delta}^{+\Delta} k \cdot d(\Delta x)=1$$

故得

$$k=\frac{1}{2\Delta} \qquad (\pm\Delta\text{区间内})$$

因而在此情况下误差服从的规律为

$$y=\frac{1}{2\Delta} \tag{18}$$

对标准差进行计算，得

$$\varepsilon^2=\frac{\int_{-\Delta}^{+\Delta} K(\Delta x)^2 \cdot y \cdot d(\Delta x)}{K}=\frac{\Delta^2}{3}$$

故 $$\varepsilon=\Delta/\sqrt{3} \tag{19}$$

对概差进行计算，得

$$\int_{-P}^{+P} y \cdot d(\Delta x)=\frac{1}{\Delta}\int_0^P d(\Delta x)=\frac{P}{\Delta}=\frac{1}{2}$$

概差 $$P=\Delta/2 \tag{20}$$

平均误差

$$\eta=\int_{-\Delta}^{+\Delta}(\Delta x) \cdot y \cdot d(\Delta x)=\Delta/2 \tag{21}$$

遵从或近似遵从均匀分布的误差实例有不少，例如，示波器实验中调整利萨如图形不能稳定引起的频率测量误差；电共振实验中由于调谐不准确而产生的频率误差；指零仪表判断平衡的视差；仪器度盘或其它传动齿轮的回差所产生的误差；停表在其分布度值内不能分辨引起的误差；游标尺的仪器误差；数据截尾引起的舍入误差；级别较高的仪器和仪表的误差等。总之，对于一些我们只能估计它们的极限大致在某一范围内的误差（例如某些未定的系统误差）而对其分布规律完全不知道的情形，通常都假定它们在区间（$+\Delta$，$-\Delta$）内任一处出现的概率相同，即服从均匀分布，因为这样考虑在物理意义上是比较合理的。

下面举例说明如何具体运用均匀分布来估计平均误差、标准差及概差。

1. 停 表

对于1/10秒的停表（经过检定的），当时间在0.1秒内变化，它是不能得到反映的，因而我们说0.1秒为该停表的灵敏阈，0.1秒也是停表的仪器误差，用 $\Delta t_{仪}$ 表示。根据停表误差的来源——系统和偶然因素都有，故可假定在灵敏阈内误差遵守（或近似遵守）均匀分布，由（19）、（20）及（21）式得

标准差

$$\varepsilon=\frac{\Delta t_{仪}}{\sqrt{3}}$$

平均误差和概差分别为

$$\eta=\frac{\Delta t_{仪}}{2}, \qquad P=\frac{\Delta t_{仪}}{2}$$

2. 判断平衡的视差

通常取视差为 0.2 分度，因而作单次测量时，视差的平均误差为 0.1 分度，标准差等于 $0.2\sqrt{3}$分度值。

3. 电　表

对于标出精确度级别的电表，仪器误差是很容易计算的，设为 $\Delta_{仪}$，仪器误差与标准差的关系可近似按（19）式估算。

由前面的讨论知，对于级别高的精密仪表，这样估算出的标准差是比较可靠的。例如 0.2 级的电表，仪器误差的性质主要是偶然误差和未定系统误差，因而误差服从的规律更接近均匀分布，其次 0.2 级的仪表，仪器误差大约为 0.2 分格，相当于电表的灵敏阈。至于常用的 0.5 级和 1 级电表，用（19）式估算标准差就比较近似一些，如对这两级仪表又经过校准并引入修正值，这时宜用标称准确度所算出的仪器误差的一半来估计标准差和平均误差，即

$$\varepsilon=\frac{\Delta_{仪}}{2\sqrt{3}} \qquad \eta=\frac{\Delta_{仪}}{4}$$

对级别更低的仪表，由于仪器误差的性质主要是系统误差，自然（19）、(20）和（21）式也不成立。总之，对于一些精度很差的仪器和仪表，也就是以系统误差为主的仪表，用标准差等概念来评价结果的可靠性是没有意义的。这种情况只须用系统误差合成法估算出误差限来反映测量结果的准确程度。目前在普通物理实验教学中还经常采用系统误差合成法来估算结果的误差限。虽然这样处理简便，但不是最恰当，原因是：（1）由于实验室的建设，仪器设备得到充实，以系统误差为主的仪器和仪表已日趋减少；（2）科学实验要求能够更准确地来评价测量结果的精度。基于这两点，完全有必要介绍和要求学生在某些实验中较严格地按照误差理论来处理数据，即用标准差、置信概率和置信限等来评价测量结果的精确性和可靠性。

八、误差的传播和结果精度的评定

设间接测量量 y 是由直接测量量 x_1，x_2，…，x_n 计算的，即

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中每一种直接测量量又是在同样条件下进行了多次重复测量，并假定各直接测量量 x_1，x_2，…x_n 是彼此独立的，且只含有偶然误差，容易证明

$$\bar{y}=f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$$

其中$\bar{y}$就是函数的最可信赖值。$\bar{y}$的标准差为

$$\varepsilon_{\bar{y}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\varepsilon_{\bar{x}1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\varepsilon_{\bar{x}2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\varepsilon_{\bar{x}n}^2} \tag{22}$$

这里不用平均偏差来评价结果的精度，是因为对于有限次数的测量用标准偏差来估计测量精度较为可靠。（22）式中的$\varepsilon_{\bar{x}1}$由下式计算

$$\varepsilon_{\bar{x}1}=\sqrt{\sum_{i=1}^{K}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2/K(K-1)}$$

$\varepsilon_{\bar{x}2}$，$\varepsilon_{\bar{x}3}$，$\cdots\varepsilon_{\bar{x}n}$可用同样方法算出。

应指出，建立在正态分布上的标准差计算式在测量次数少时对实际精度评价还是过高的，当K为4—5次时，$\varepsilon_{\bar{x}1}$的误差约为它本身的17%*，若测量次数少到2—3次，对结果进行这种精度估计就无意义了。因此，对于测量次数比较少时的精度估计又常采用W. S. Gosset的方法，即用置信概率和置信限（区间）来表示测量结果的误差限，并把它作为对标准差表示的补充。

$$y=\bar{y}\pm t\cdot\varepsilon_y/\sqrt{K}$$

$$y=\bar{y}\pm t\cdot\varepsilon_{\bar{y}} \tag{23}$$

t代表一定置信水平（confidence level）下的置信因子，它是描述某一置信概率下标准差和置信限之间关系的一个量，t值的大小取决于测量次数，可由t分布表查出。例如，取置信水平为0.95，由表查出，当$K=5$次时，$t_{0.95}=2.78$。设把置信水平提高到0.99，则在$K=5$时的t值为4.60。下面列出测定次数$K=3$—10次的t分布表：

K	3	4	5	6	7	8	9	10
自由度	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_{0.95}$	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26
$t_{0.99}$	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25

从上述分析知，置信限和熟知的极限误差（3ε）相当，其差别在于前者还考虑了测量次数对分布的影响，因而更合理一些。置信限$t\varepsilon_{\bar{y}}$（或$t\varepsilon_y$）又称为‘偶然’不确定度，当取$t=1$时，‘偶然’不确定度就等于标准差。

对于以系统误差为主的实验，对结果准确度的评定当然不能用标准差等概念，适合于这种情形的误差总合公式为

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{24}$$

即按代数方法合成。（24）式中Δx_1，Δx_2，$\cdots\Delta x_n$分别代表独立变量x_1，x_2，$\cdots x_n$的误差，Δy即为总合误差。考虑到许多实际情况，Δx_i（$i=1$，$\cdots$，n）的符号未予确定，尽管它们

* ε_x的误差由古典公式证明，其值等于$1/\sqrt{2(K-1)}$

可能有正有负，(24) 式右侧中应相消一部分，但在无法确定（对误差分析要求不太严格时，也常常不需要确定）Δx_i 的符号的情况下，(24) 式通常改写成

$$\Delta y=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\cdot|\Delta x_1|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\cdot|\Delta x_2|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\cdot|\Delta x_n| \qquad (25)$$

这就是从最不利的情况考虑求得的是 y 的最大误差。(25) 式就是处理方向未定的系统误差传播的常用计算式，当然这是很不准确的，对于未定系统误差的合成，也应采用概率估计方法，象合成标准差那样去处理 Δy。如何总合，这取决于它们所服从的分布规律，或按方和根法（高斯分布），或按均匀分布及一般分布合成方法。鉴于这类误差多数都接近均匀分布，因而宜用后者进行合成。

(25) 式也是过去普通物理实验中经常采用的误差计算公式，这种方法简便，合成后的总误差可靠性高，能保证误差不会超过此范围，但缺点是总合误差偏大，特别是 n 比较大时，总误差偏大的问题更为突出。因此，间接测量量的最大误差也宜采用与 (22) 式相似的公式来计算。

九、有效数字及其有关问题

1. 有效数字两种定义

（1）对有效数字概念的一类提法

凡误差的绝对值小于或等于0.5（末位）时，则读数的全部数字就可称为有效数[6]。

如果计算结果 L 的极限误差是某一位上的半个单位，该位到 L 的左起第一个非零数字一共有 n 位，我们就说 L 有 n 位有效数字[7]。

（2）一般物理实验教材中对有效数字概念的表述

实验中，凡是用量仪和量具直接读出的数字（包括最后一位估计的读数）都称为有效数。

为了教学上的统一，实验教材中采用（2）的规定还是适宜的。

2. 与有效数字有关的几个问题

（1）书写不带误差的有效数字时，应使左起第一个非零数至最后一位数皆为有效数，即保留一位欠准数。

例如用伏特计来量度电压，得到读数为 11.15 伏，其中 0.05 伏是在最小分度内估读的。因为一般情况下我们认为它的误差不大于0.05（最小分度的一半），故可认为电压值在11.10伏和 11.20 伏之间。这种只根据有效数字来估计测量结果的可靠程度是不准确的，有时甚至出入很大。例如我们用游标尺（1/10分度）测某物体长度，得 $l=81.6$ 毫米，由于游标读数的特点，测量结果没有估读数，也不适宜在 6 后面加零，这时如仍按上例来理解 l，就会造成差误。又如用钢卷尺量一长度，得 $l=159.3$ 厘米，也绝不能理解为长度在 158.8 到 159.8 之间，因为钢尺的允许误差可达 3—5 毫米。因此，为了使测量结果准确一致和便于使用，要求测量数字带上误差。

（2）书写带误差的有效数字，常用极限误差（如用其它误差表示应说明置信概率）。例

如仪器误差或者是平均误差$\left(\frac{\sum|\delta x_i|}{K}\right.$，普通物理实验中常用它来表示最佳值的极限误差$\left.\right)$。这时应使测量值的末位与误差对齐，因此测量结果的有效位数归根到底还是由误差来定。例如用钢卷尺测长，设$l=152.65\pm0.3$厘米（0.3为钢卷尺的最大误差），考虑到l还要参与运算，测量值中最后一位"5"宜保留，但为了书写的统一，可写成$l=152.6_5\pm0.3$（厘米）。如果l为最后测量结果，应写成$l=152.7\pm0.3$（厘米）。类似这样的情况很多，如在改装电表实验中，表头串一高电阻，可改成某量程的伏特计，但由于线路灵敏度低，在确定串联电阻值时，调节个位欧姆档在仪表上反映已经不太灵敏，设所用电阻箱最小变动值为0.1欧姆，这时就出现一个问题，即1欧姆以下的可读数还要不要？我认为记录和处理这一类问题是否以仪器或装置的灵敏阈为标准，本例中由于电阻箱的0.1欧姆档读数已不能分辨，故电阻值就记录到个位欧姆数（如能分辨，就必须估读）。这时计算串联阻值的误差也不能只考虑电阻箱的仪器误差，还应考虑灵敏度引进的误差，而后者常常会是误差值的主要部分。电桥、电位计等都会有类似的问题。

对于一些比较精确和重要的测量结果，又常将结果或误差或二者都比上面规定的多保留一位，例如普朗克常数

$$h=(6.626176\pm0.000036)\times10^{-34}\mathrm{J\cdot S}$$

十、误差公式的推导和误差计算的简化

1. 用对数微分法推求相对误差（最大）公式

用全微分法推求函数的绝对误差（最大）公式，虽然对函数的任何组合形式都是正确的，但误差计算式较繁杂，计算容易出错且不易检查。因此，对于以乘除为主的函数形式，宜先推求相对误差表示式，算出相对误差和函数值，就很容易求出绝对误差。

例如，用阿基米德原理测量物体密度。计算公式为

$$\rho=[m_1/(m_1-m_2)]\rho_0$$

水的密度ρ_0是个比较精确的常数，只要计算时ρ_0取必需的位数，使$\Delta\rho_0/\rho_0$很小，可以忽略。对ρ取对数并微分，得

$$d(\ln\rho)=d[\ln m_1+\ln\rho_0-\ln(m_1-m_2)]$$

$$d\rho/\rho=(1/m_1)dm_1-[1/(m_1-m_2)]dm_1+[1/(m_1-m_2)]dm_2$$

按独立变量合并同类项再取绝对值相加，相应的微分符号改为误差符号，可得

$$\Delta\rho/\rho=|1/m_1-1/(m_1-m_2)|\Delta m_1+|1/(m_1-m_2)|\Delta m_2$$

这里应注意，如果不先合并同类项，再对各项系数取绝对值，就会夸大Δm_1项的误差。

2. 误差计算的简化

（1）误差公式推导的简化

考虑到我们这里仅计算误差限，而不是严格地按误差理论较准确地计算误差值，因此在推导最大相对误差公式时，可先作两步简化：（1）公式中的已知数（如 π、光速、电子电荷等）都看成精确的常数，为了不给结果带来附加误差，只须在计算时取值比函数中有效数字最多的自变量多一位；（2）对于出现在公式中的修正项、在推导误差公式时先忽略掉（注意计算函数值时则不能忽略）。例如球落法测粘滞系数公式中的修正项；单摆测 g 值实验中的摆幅和摆球对悬点的转动惯量修正项等。由于略去修正项，使误差公式推导和计算大为简化，且不会明显地影响结果的误差值，原因是修正项的误差一般均比该自变量的误差小一个数量级，按微小误差原则是可以不计的。

（2）误差计算的简化

由于先求相对误差，计算时最好把每一项（按独立自变量）表成百分差的形式，且只须计算出两位数。这样做有几个好处：（1）因只要求两位（过多无意义），计算就非常简便；（2）可以看出函数中各独立自变量对结果的误差贡献，从而知道是哪一因素对结果影响最大。要提高实验精确度，就必须着重减小该项的误差。可能的措施是对该量仔细地进行测量，并适当增加测量次数以减少偶然误差的影响，或者换上（有可能的话）更精确的量仪和量具；（3）由各自变量对结果的误差贡献，不仅可以看出各仪器的配置是否合理，也有可能发现计算是否有错误。例如某一量的相对误差高出其它量很多，这就可能是计算错误造成，也可能是实验仪器选配不合理所致。总之，这样作学生就有可能发现实验中的一些问题，这正是我们需要培养学生的一种能力。

十一、仪器和测量条件的选择与配合

1. 测量最有利条件的确定

测量结果通常与若干条件有关，设若后者的误差已知，则应如何选择测量条件结果的精确度最高。设函数

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

若 x_i 的最大误差为 Δx_i，相应的 y 的误差为 Δy，为了使 $(\Delta y/y)_{最大}$ 为极小，则要求

$$\left.\begin{array}{l}(\partial/\partial x_1)(\Delta y/y)=0\\ \quad\vdots\\ (\partial/\partial x_n)(\Delta y/y)=0\end{array}\right\}\qquad(26)$$

由此可定出最佳测量条件。

例 1. 用线式电桥测电阻

$$Rx=R_0\frac{l_1}{l_2}=R_0\frac{l_1}{L-l_1}$$

式中 R_0 为已知标准电阻箱，l_1 和 l_2 为滑线两臂长，$L=l_1+l_2$。问滑键在什么位置作测量，就能使 Rx 的相对误差最小？

相对误差

$$\frac{\Delta Rx}{Rx}=\frac{\Delta R_0}{R_0}+\frac{L}{l_1(L-l_1)}\Delta l_1+\frac{1}{L-l_1}\Delta L$$

去掉与本问题无关的因素，即假定 R_0 与滑线总长 L 为准确数。这时有

$$\Delta R_X/R_X = L\Delta l_1/[l_1(L-l_1)]$$

由 $(\partial/\partial l_1)(\Delta R_X/R_X)=0$，求得$l_1=L/2$这就是线式电桥测电阻的最有利条件。

例 2. 在放射性测量中，如何分配测量放射性时间 t_2 与本底计数时间 t_0，就可以使源的计数率测定的结果的误差最小？

设T为要求作放射性测量的时间，即 $t_2+t_0=T$，故 $t_0=T-t_2$。放射源的真正计数率为n_2-n_0，其标准误差为[8]

$$(n_0/t_0+n_2/t_2)^{\frac{1}{2}}=[n_0/(T-T_2)+n_2/t_2]^{\frac{1}{2}}$$

由 $$(\partial/\partial t_2)[n_0/(T-t_2)+n_2/t_2]^{\frac{1}{2}}=0$$

得 $$t_2/t_0=\sqrt{n_2/n_0} \tag{27}$$

即按（27）式关系分配测量放射性时间 t_2 与本底计数时间 t_0，就可使源的真正计数率测定结果的误差最小。（27）式只是两个时间的比例关系，至于各时间究竟要多长，则视对测量精确度的要求而定。

2. 测量仪器和测量条件的选择

（1） 误差分配的一般原则

若函数由K个独立自变量组成，即

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_K)$$

若对函数的最大相对误差要求是 $\Delta y/y$，则对各独立变量的 $(\Delta x_i/x_i)_{最大}$按等贡献分配，因

$$\Delta y/y=\Delta x_1/x_1+\Delta x_2/x_2+\cdots+\Delta x_K/x_K$$

故有 $$\Delta x_1/x_1=\Delta x_2/x_2=\cdots=\Delta x_K/x_K=(1/K)(\Delta y/y) \tag{28}$$

这样选配仪器的精度是比较合理的。当然，限于实际条件，有时不能完全作到，因此在处理具体问题时完全可以依实际情况调整误差分配要求，但无论如何按等（或近似等）影响原则分配误差是选配仪器的一个重要方法。

（2） 仪器和测量条件选择示例

请参阅第 页，“欧姆定律的应用参考资料”。

（3） 若已知测量中各误差应按方和根法合成，则等贡献原则应对 $(\varepsilon_y/y)^2$进行，处理方法与（1）相似，只不过稍繁一些。

(感谢中国计量科学研究院刘智敏同志对本文提了宝贵意见和建议。

参 考 文 献

[1] L. G. Parratt, Probability and Experimental Errors in Science, New York, John wiley & Sons, Inc., (1961), 65.