地球坐标系统中的
各种笛卡儿坐标换祘式

朱华统

一九七九年四月

地球坐标系统中的各种笛卡儿坐标换算式

一、笛卡儿坐标变换公式的意义

随着现代测量技术和计算技术的发展，对各种坐标系统的研究变得越来越重要了。坐标系统若从其根本的性质来分类，可以区分为测量坐标系统和计算坐标系统两大类。前者是以某些客观存在的自然特性为基础的，这些特性是：地球自转的旋转轴；地面一点的铅垂线；地面一点的天文子午面（以格林尼治天文子午面作为起始天文子午面）和大地水准面。用天文经度λ，天文纬度φ和正高$H_{正}$表示一个点的空间位置的天文坐标系就是其典型代表。为了便于计算，根据不同的使用需要，产生各式各样的坐标系统。用大地经度L，大地纬度B和大地高$H_{大}$表示一个点的空间位置的大地坐标系则是计算坐标系的一个典型代表。大地坐标系是全球统一的一种通用的坐标系，为世界各国所普遍采用，它是研究其它各种坐标系的基础。对于所用的地球椭球，通过一定的条件（椭球短轴平行于地球地轴；起始大地子午面平行于起始天文子午面）予以定位，从而可以建立天文坐标系和大地坐标系间的简单关系式。从这两个坐标系统相应的曲线坐标系统和笛卡儿坐标系统，通过不同的推导方法，均可以导出如下公式，参见文献[2][3][7]：

$$\left.\begin{aligned} B &= \varphi - \xi \\ L &= \lambda - \eta \sec\varphi \\ A &= \alpha - (\lambda - L)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

表示空间一点的坐标系，从表现形式上来区分，可以分为

曲线性坐标系和笛卡儿坐标系两类，它们之间可以构成许多的数学解析式。众所周知，对于空间一点的大地坐标系和笛卡儿坐标系间关系式是：

$$\vec{R}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(N+H_{大})\cos B\cos L\\(N+H_{大})\cos B\sin L\\(N(1-e^2)+H_{大})\sin B\end{bmatrix} \quad (2)$$

由曲线坐标（L，B，$H_{大}$）求笛卡儿坐标（X，Y，Z）按（2）式是非常容易的。（2）式的反算，可以採用迭代法或直接法完成[1]，类似的方法在国内外各种有关文献中不胜枚举。

空间一点用三维的统一的各种不同的笛卡儿坐标表示，随着测量手段的变化（如人卫大地测量方法）和实际使用的需要（如航空摄影测量中的解析空中三角测量和导弹发射等），显得更为重要了。

空间一点的位置，可以用各种不同的笛卡儿坐标系来表示。一种笛卡儿坐标系的确定，主要需指明坐标系原点的位置和三个坐标轴的指向。

从研究地球上各种直角坐标系统出发，当前使用比较多的有以下六种笛卡儿坐标系统，这里分别命名其为：地心大地平直角坐标系；地心大地瞬时直角坐标系；地心惯性直角坐标系；参心（局部）大地直角坐标系；测站中心大地直角坐标系和测站中心导弹发射坐标系等。这六种直角坐标系的定义，见表一有关天球坐标系统和轨道坐标系统的各种笛卡儿坐标系可参见文献[1][8]。

测站中心大地直角坐标系，国外各文献中称乎和定义不一如有局部大地坐标系统（X、Y、Z构成左手坐标系）[1]，局

卫大地直角坐标系统（X、Y、Z 構成右手坐标系）[3]和剿平面坐标系统（Y轴指向北点，構成右手坐标系[4]，Y轴指向北点，構成左手坐标系[5]）等。

表一中六种笛卡儿坐标系，鉴于原点所在位置的不同，可以区分为三类：第一类，原点在地球质心上（不估及测量误差），可简称为地心直角坐标系，如表一中第一，第二，第三等三种直角坐标系；第二类，原点在所採用的参考椭球中心上（如近似地也可以认为在地球质心附近，世界上各国所採用的参考椭球中心相对于地球质心约为几十至几百米左右），可简称为参心直角坐标系，如表一中第四种直角坐标系；第三类，原点在某一测站的法线方向上或垂线方向上，具体位置可选择在地面上，大地水准面上、椭球面上或某一剿平面上，可简称为测站中心直角坐标系，如表一中第五、第六等贰种直角坐标系。

二、笛卡儿坐标变换的一般式

在三维空间中，相同性质的两个笛卡儿坐标系（均为右手坐标系或左手坐标系）间的关系可以用六个参数将其表示出来，即用一个笛卡儿坐系原点相对于另一个笛卡儿坐系原点的三维坐标值和两个坐标系间的三个旋转角。对于不同性质的坐标系，在上述基础上，还有一个坐标系某些坐标轴方向的变换。因此，不同的笛卡儿坐标系变换，可以通过坐标轴的"平移"、"旋转"、"反向"三個方向进行讨论。

六种笛卡儿坐标系原点位置和坐标轴指向

表一

坐标系类别	符号表系	原点位置	X轴指向	Y轴指向	Z轴指向
地心大地平直角坐标系	X_1, Y_1, Z_1	地球质心	格林尼治平天文子午面和平赤道面的交线，指向格林尼治方向	和Z_1，X_1构成右手坐标系	地球自转平旋转轴，指向平北极。
地心大地瞬时直角坐标系	X_2, Y_2, Z_2	地球质心	格林尼治平天文子午面和瞬时赤道面的交线指向格林尼治方向。	和Z_2，X_2构成右手坐标系	地球自转瞬时旋转轴，指向瞬时北极
地心惯性[注]直角坐标系	X_3, Y_3, Z_3	地球质心	位于真赤道面，指向真春分点方向	和Z_3，X_3构成右手坐标系	地球自转瞬时旋转轴，指向瞬时北极。
参心大地直角坐标系	X_4, Y_4, Z_4	参考椭球中心	起始大地子午面和包含椭球中心与椭球短轴垂直的平面的交线，指向平行于格林尼治平天文子午面的方向。	和Z_4，X_4构成右手坐标系	椭球短轴，指向平行于平北极的方向。
测站中心大地直角坐标系。	X_5, Y_5, Z_5	地面某点法线方向上任一点	原点的大地子午面和包含原点且和法线垂直的平面的交线，指向北点	和Z_5，X_5构成右手坐标	某点法线方向，指向椭球外。
测站中心[illegible]坦发射坐标系	X_6, Y_6, Z_6	地面发射点	原点至目标点的照准面和包含原点且和垂直的水平面的交线，指向目标点发射方向。	某点垂线方向，指向地球外	和X_6，Y_6构成右手坐标系。

平移：

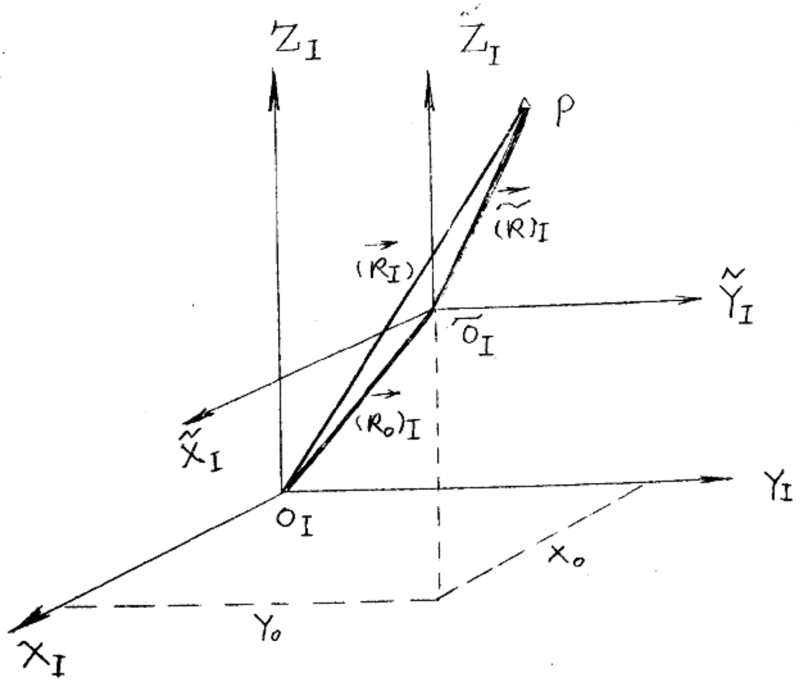


图　　一

由图一，（X_I，Y_I，Z_I）表示第一个笛卡儿坐标系，（$\tilde{X}_I$，$\tilde{Y}_I$，$\tilde{Z}_I$）表示平移后的坐标系。显然可得：

$$(\vec{R})_I = (\vec{R_0})_I + (\vec{\tilde{R}})_I \tag{3}$$

或写成

$$\begin{pmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{X}_I \\ \tilde{Y}_I \\ \tilde{Z}_I \end{pmatrix} \tag{4}$$

旋转

对于二维坐标系有：

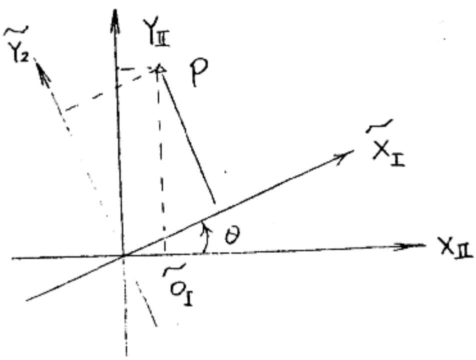


图 二

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_I \\ \tilde{Y}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{II} \\ Y_{II} \end{bmatrix} \quad (5)$$

对于三维笛卡儿坐标系，一般需要在三个坐标平面上通过三次旋转才能完成，旋转先后次序可以是任意的，例如文献[1]和文献[2]中就不一样。必须注意，围绕着坐标轴不同的旋转次序，虽然旋转角度都是三个，但各自旋转角度相互间的差别却可能是较大的，这就是说，根据旋转先后次序，它们的旋转矩阵在运算时是不能进行交换的。只是当旋转角很小时（如地球椭球定位中的尤拉角就是这种情况），设用 θ、ψ、ϕ 表示三个旋转角，并且允许可以视其 $\cos\theta = \cos\psi = \cos\phi = 1$，$\sin\theta = \theta$，$\sin\psi = \psi$，$\sin\phi = \phi$，$\sin\theta\sin\psi = \sin\theta\sin\phi = \sin\psi\sin\phi = 0$ 时，旋转矩阵才是可以进行交换。

如图，设旋转次序按下列次序进行：

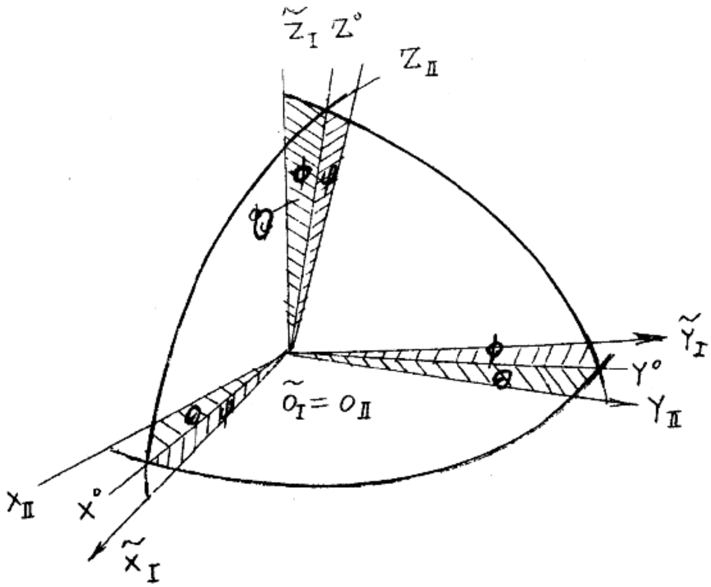


图　　三

保持Z_{II}轴不同，$O_{II}X_{II}Y_{II}$按右手规则，旋转θ角；

保持Y^0轴不同，$O_{II}Z_{II}X^0$按右手规则，旋转ψ角；

保持$\tilde{X}_I$轴不同，$O_{II}Y^0Z^0$按右手规则，旋转ϕ角。

式中（X_{II}，Y_{II}，Z_{II}）表示旋转前的第二个笛卡儿坐标系。经旋转后，则两个笛卡儿坐标系间关系是：

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_I \\ \tilde{Y}_I \\ \tilde{Z}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & co\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{II} \\ Y_{II} \\ Z_{II} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

引入旋转矩阵符号：

$$R_1(\phi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$R_2(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$R_3(\theta)\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$R=R_1(\phi)\ R_2(\psi)\ R_3(\theta) \tag{10}$$

将（7），（8），（9），（10）式入（6）式得：

$$\begin{bmatrix}\bar{X}_I\\ \bar{Y}_I\\ \bar{Z}_I\end{bmatrix}=R_1(\phi)\ R_2(\psi)\ R_3(\theta)\begin{bmatrix}X_{II}\\ Y_{II}\\ Z_{II}\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}X_{II}\\ Y_{II}\\ Z_{II}\end{bmatrix} \tag{11}$$

综合（4）式和（11）式则有：

$$\begin{bmatrix}X_I\\ Y_I\\ Z_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_0\\ Y_0\\ Z_0\end{bmatrix}+R_1(\phi)R_2(\psi)R_3(\theta)\begin{bmatrix}X_{II}\\ Y_{II}\\ Z_{II}\end{bmatrix} \tag{12}$$

反向

在研究天球坐标系统以及本文的测站中心坐标系中，有时採用左手坐标系，如测站中心大地直角坐标系。由于该坐标系的 X_5 轴指向北点，我们知道大地方位角一般由北按顺时针方向寻取，当 Z_5 轴和法线重合，指向椭球体外时，如采用左手坐标系，则用此坐标系表示曲线坐时，显然是比较方便的。

坐标系轴的方向改变，可以通过反向矩阵完成。设三个反向矩阵是：

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

利用 P_1，P_2，P_3 反向矩阵可以分别改变 X，Y，Z 的轴的方向。显然，奇次数的反向，则可以改变右(左)手坐标系为左(右)手坐标系。

综合坐标系平移，旋转和反向三种情况，则笛卡儿坐标系变换的一般式可表示为：

$$\begin{bmatrix} X_{I} \\ Y_{I} \\ Z_{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + R_1(\varphi)\, R_2(\psi)\, R_3(\theta)\, P_1 P_2 P_3 \begin{bmatrix} X_{II} \\ Y_{II} \\ Z_{II} \end{bmatrix} \tag{16}$$

在（16）式运用中，当变换前后坐标系原点相同时，则 $X_0=Y_0=Z_0=0$，当某一个旋转矩阵或反向矩阵不存在时，可以将其"视作"为一个单位阵。另外，由于在旋转时，旋转角往往要和测易中一些曲线坐标系的坐标相联系，因此旋转的次序要视实际情况而定，如也可以按 $R_3(\theta)R_2(\psi)R_1(\phi)$ 等次序完成；另外，某一个旋转矩阵也可以重复出现。

根据矩阵运林规则和正交矩阵特性，还可以写出如下公式：

$$\left.\begin{aligned} R_1(\phi)^{-1} &= R_1(-\phi) \\ R_2(\psi)^{-1} &= R_2(-\psi) \\ R_3(\theta)^{-1} &= R_3(-\theta) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}(R_1(\phi)R_2(\psi)R_3(\theta))^{-1} &= R_3(\theta)^{-1}R_2(\psi)^{-1}R_1(\phi)^{-1} \\ &= R_3(-\theta)R_2(-\psi)R_1(-\phi)\end{aligned} \tag{18}$$

$$P_1^{-1}=P_1,\quad P_2^{-1}=P_2,\quad P_3^{-1}=P_3 \tag{19}$$

$$P_1P_2=P_2P_1,\quad P_1P_3=P_3P_1,\quad P_2P_3=P_3P_2 \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} P_jR_K &= R_KP_j, \quad \text{当 } j=K \text{ 时} \\ P_jR_K &= R_K^{-1}P_j, \quad \text{当 } j\neq K \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

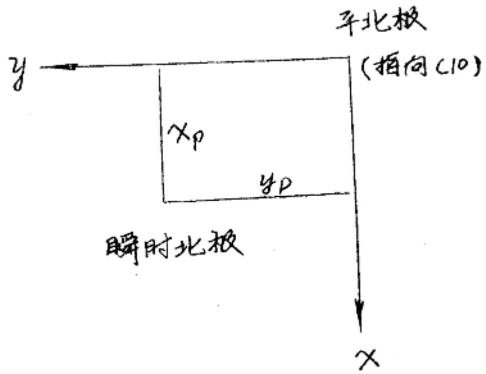
三、地球坐标系统中的各种笛卡儿坐标换算式

从笛卡儿坐标变换的一般公式出发，推导表一中六个笛卡儿坐标系间的相互关系式。

1、地心大地平直角坐标系（X_1、Y_1、Z_1）和地心大地瞬时直角坐标系（X_2、Y_2、Z_2）间的关系：

特点：原点一致，无平移；

旋转矩阵和极移元素相关；
都是右手坐标系，无反向。



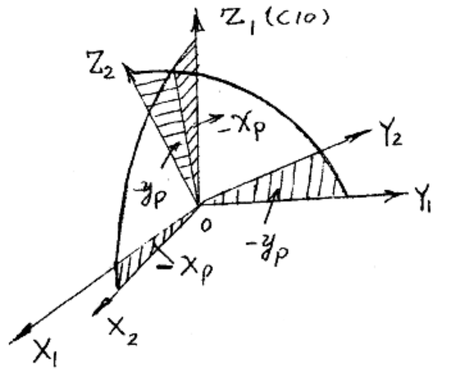


图 五

图四 极移坐标系

由图五可得：

$$\left.\begin{aligned} R_1(\phi) &= R_1(-y_p) \\ R_2(\psi) &= R_2(-x_p) \end{aligned}\right\} \quad 22$$

式中 x_p、y_p 为极移坐标系中瞬时北极对于平北极位移元素值。

为此由（16）式可得：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 = R_2(-X_p)R_1(-y_p)\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos(-X_p) & 0 & -\sin(-X_p) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-X_p) & 0 & \cos(-X_p) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-y_p) & \sin(-y_p) \\ 0 & -\sin(-y_p) & \cos(-y_p) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x_p & \sin x_p \sin y_p & \sin x_p \cos y_p \\ 0 & \cos y_p & -\sin y_p \\ -\sin x_p & \cos x_p \sin y_p & \cos x_p \cos y_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 \quad (24)$$

按（17）式和（18）式及（23）式得

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_2 = R_1(y_p)\,R_2(x_p)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_1 \tag{25}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_p & \sin y_p \\ 0 & -\sin y_p & \cos y_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x_p & 0 & -\sin x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x_p & 0 & \cos x_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_1$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x_p & 0 & -\sin x_p \\ \sin x_p \sin y_p & \cos y_p & \cos x_p \sin y_p \\ \sin x_p \cos y_p & -\sin y_p & \cos x_p \cos y_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_1 \tag{26}$$

2、地心大地平直角坐标系（X_1，Y_1，Z_1）和地心惯性直角坐标系（X_3，Y_3，Z_3）间的关系：

特点：原点一致，无平移；

旋转矩阵和格林尼治真恒星时，极移元素有关；

都是右手坐标系，无反向。

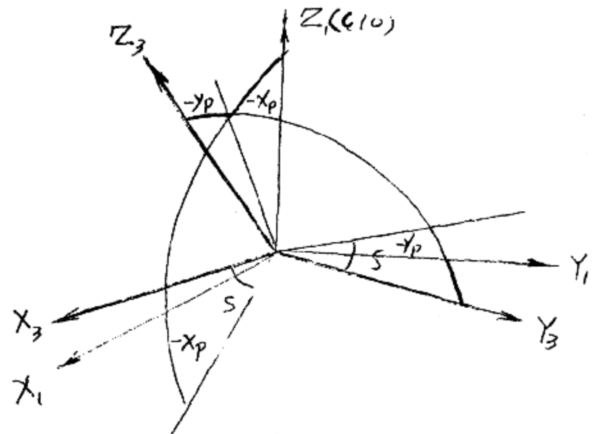


图 六

由图六可得：

$$\left.\begin{aligned} R_1(\phi) &= R_1(-Y_p) \\ R_2(\psi) &= R_2(-X_p) \\ R_3(\theta) &= R_3(S) \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

式中 X_p、Y_p 为极移坐标系中瞬时北极对于平北极位移亢素值，S 为格林尼治真恒星时。

为此由（16）式可得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 = R_2(-X_p) R_1(-Y_p) R_3(S) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_3 \qquad (28)$$

即：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos(-X_p) & 0 & -\sin(-X_p) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-X_p) & 0 & \cos(-X_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-Y_p) & \sin(-Y_p) \\ 0 & -\sin(-Y_p) & \cos(-Y_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_3$$

由于 X_p、Y_p 较小，视 $\cos X_p = \cos Y_p = 1$，$\sin X_p = X_p$，$\sin Y_p = Y_p$，$\sin X_p \sin Y_p = 0$，代入上式得：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & X_p \\ -\sin S & \cos S & -Y_p \\ -X_p\cos S - Y_p\sin S & -X_p\sin S + Y_p\cos S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_3 \qquad (29)$$

反演（28）式得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_3 = R_3(-S) R_1(Y_p) R_2(X_p) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 \qquad (30)$$

即

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-S) & \sin(-S) & 0 \\ -\sin(-S) & \cos(-S) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos Y_p & \sin Y_p \\ 0 & -\sin Y_p & \cos Y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos X_p & 0 & -\sin X_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin X_p & 0 & \cos X_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & -X_p\cos S - Y_p\sin S \\ \sin S & \cos S & -X_p\sin S + Y_p\cos S \\ X_p & -Y_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 \qquad (31)$$

在地心惯性直角坐标系中，Z_3 轴若和地心大地平直角坐标系 Z_1 轴一致，X_3 轴位于平赤道面，指向平春分点方向，则（29）、（31）两式中，就没有极移元素，此时 S 为格林尼治平恒星时。

即得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_3 ,$$

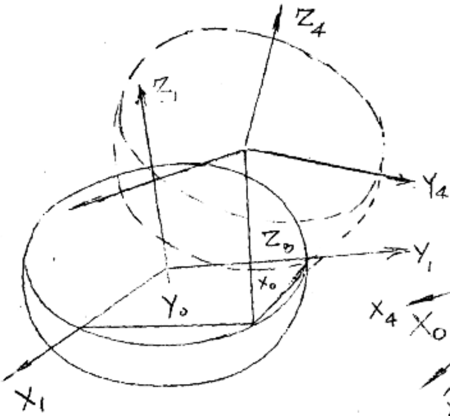
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1$$

3、地心大地平直角坐标系（X_1，Y_1，Z_1）和参心（局部）大地直角坐标系（X_4，Y_4，Z_4）间的关系

特点：原点不一致，有平移；

旋转矩阵和椭球定位的尤拉角元素有关；

都是右手坐标系，无反向。



图七

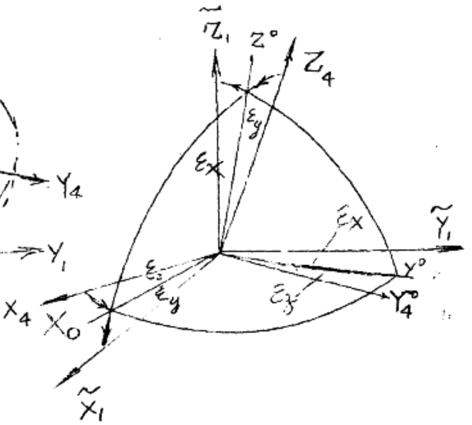


图 八

由图八可得：

$$
\left.
\begin{aligned}
R_1(\phi) &= R_1 \ (\varepsilon_x) \\
R_2(\psi) &= R_2 \ (\varepsilon_y) \\
R_3(\theta) &= R_3 \ (\varepsilon_z)
\end{aligned}
\right\} \quad (32)
$$

式中 ε_x，ε_y，ε_z 为尤拉角。

由（11）式可得：

$$
\begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix}_1 = R_1(\varepsilon_x) R_2(\varepsilon_y) R_3(\varepsilon_z) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_4 \quad (33)
$$

即
$$
\begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_x & \sin\varepsilon_x \\ 0 & -\sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_y & 0 & -\sin\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varepsilon_y & 0 & \cos\varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_z & \sin\varepsilon_z & 0 \\ -\sin\varepsilon_z & \cos\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_4
$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\varepsilon_y\cos\varepsilon_z & \cos\varepsilon_z\sin\varepsilon_z & -\sin\varepsilon_y \\ \sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_y\cos\varepsilon_z-\cos\varepsilon_x\sin\varepsilon_z & \sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_y\sin\varepsilon_z+\cos\varepsilon_x\cos\varepsilon_z & \sin\varepsilon_x\cos\varepsilon_y \\ \cos\varepsilon_x\sin\varepsilon_y\cos\varepsilon_z+\sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_z & \cos\varepsilon_x\sin\varepsilon_y\sin\varepsilon_y-\sin\varepsilon_x\cos\varepsilon_z & \cos\varepsilon_x\cos\varepsilon_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_4$$

———— (34)

由于尤柱角 ε_x、ε_y、ε_z 均很小，一般仅几秒左右，故可视 $\cos\varepsilon_x=\cos\varepsilon_y=\cos\varepsilon_z=1$；$\sin\varepsilon_x=\varepsilon_x$，$\sin\varepsilon_y=\varepsilon_y$，$\sin\varepsilon_z\equiv\varepsilon_z$；$\sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_y=\sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_z=\sin\varepsilon_y\sin\varepsilon_z=\sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_y\sin\varepsilon_z=0$。代入（34）式得：

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix}_1=\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_4 \qquad (35)$$

将（35）式代入（4）式得：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1=\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_4 \qquad (36)$$

在参心大地直角坐标系和地心大地平直坐标系换算公式中，一般还应考虑尺度比的影响 ΔL，则最后换算公式为：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1=\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_4+\Delta L\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_4 \qquad (37)$$